S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 331–339 (2019) УДК 510.5
DOI 10.33048/semi.2019.16.020 MSC 03D45

ФРИДБЕРГОВЫ НУМЕРАЦИИ СЕМЕЙСТВ ЧАСТИЧНО ВЫЧИСЛИМЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

С.С. ОСПИЧЕВ

Abstract. We consider computable numberings of families of partial computable functionals of finite types. We show, that if a family of all partial computable functionals of type 0 has a computable friedberg numbering, then family of all partial computable functionals of any given type also has computable friedberg numbering. Furthermore, for a type $\sigma|\tau$ there are infinitely many nonequivalent computable minimal nonpositive, positive nondecidable and friedberg numberings.

Keywords: partial computable functionals, computable morphisms, computable numberings, Rogers semilattice, minimal numbering, positive numbering, friedberg numbering.

1. Введение

Данная работа посвящена изучению вычислимых нумераций. Классически, термин *вычислимая нумерация* относится к эффективным перечислениям семейств вычислимо перечислимых множеств и частично вычислимых функций(обзор результатов [1],[2]). Затем, в работе [3] были предложены общие подходы, позволяющие рассуждать о вычислимой характеризации алгебраических структур. В частности, согласно [3] можно рассуждать о нумерации, обладающей той или иной алгоритмической сложностью в одной из общепринятых иерархий. На сегодняшний день получены различные результаты об обобщенно вычислимых нумерациях в арифметической иерархии([4]–[8]) и в иерархии

Ospichev, S.S., Friedberg numberings of families of partial computable functionals.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда(проект №17-11-01176).

Поступила 24 ноября 2018 г., опубликована 11 марта 2019 г.

Ершова([9]–[13]). Большинство результатов в теории нумераций связаны с изучением свойств полурешеток Роджерса, их мощности и строения экстремальных элементов. Рассмотрим эту структуру подробнее. Пусть ν и μ – вычислимые нумерации. Будем говорить, что нумерация μ сводится к нумерации $\nu(\mu \leqslant \nu)$, если существует вычислимая функция f, такая что $\mu(x) = \nu(f(x))$. μ эквивалентна $\nu(\mu \equiv \nu)$, если $\mu \leqslant \nu$ и $\nu \leqslant \mu$. Пусть $Com(\mathcal{S})$ – множество всех вычислимых нумераций семейства $\mathcal{S}$. Фактор-структуру $\langle Com(\mathcal{S})/_{\equiv}, \leqslant\rangle$ назовем *полурешеткой Роджерса.* В данной работе будут рассматриваться экстремальные элементы этих полурешеток, в частности вычислимые главные, позитивные и разрешимые нумерации.

Нумерацию ν назовем главной нумерацией семейства $\mathcal{S}$, если любая нумерация μ семейства $\mathcal{S}$ сводится к ν

Нумерацию ν назовем *позитивной*(*разрешимой*), если множество $\{\langle x, y\rangle | \nu(x) = \nu(y)\}$ является вычислимо перечислимым(вычислимым).В классе разрешимых нумераций отдельно выделим однозначные нумерации. Их назовем *фридберговыми.*

В качестве объекта исследования выбраны семейства частично вычислимых функционалов конечного типа, предложенные Ю.Л. Ершовым[14][15].

2. Основные определения.

Все используемые определения и обозначения из классической теории вычислимости можно найти в книге[1]. Приведем необходимые понятия, связанные с вычислимыми нумерациями частично вычислимых функционалов конечного типа.

Определим сначала понятие *типа функционала.* Множество всех типов $\mathcal{T}$ определим индукцией:

(1) $0 \in \mathcal{T}$.
(2) Если $\sigma, \tau \in \mathcal{T}$, то $(\sigma \times \tau) \in \mathcal{T}$ и $(\sigma|\tau) \in \mathcal{T}$
(3) $\mathcal{T}$ – наименьшее множество, удовлетворяющее условиям 1 и 2.

Классом функционалов назовем всякое семейство $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_\sigma | \sigma \in \mathcal{T}\}$ множеств, индексами которых являются типы, вместе с частичной бинарной операцией $\circ$ на $\bigcup\limits_{\sigma \in \mathcal{T}} \mathcal{F}_\sigma$, удовлетворяющей условию: $f \circ g$ определено тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{F}_{(\sigma|\tau)}$, $g \in \mathcal{F}_\sigma$ для некоторых $\sigma, \tau \in \mathcal{T}$ и при этом $f \circ g \in \mathcal{F}_\tau$.

На множестве типов $\mathcal{T}$ зададим отношение эквивалентности $\sim$ как наименьшее отношение эквивалентности, которое для $\sigma, \tau, \rho, \sigma', \tau' \in \mathcal{T}$ удовлетворяет условиям:

(1) $(\sigma \times \tau) \sim (\tau \times \sigma)$;
(2) $((\sigma \times \tau) \times \rho) \sim (\sigma \times (\tau \times \rho))$;
(3) $((\sigma \times \tau)|\rho) \sim (\sigma|(\tau|\rho))$
(4) $(\sigma|(\tau \times \rho)) \sim ((\sigma|\tau) \times (\sigma|\rho)$;
(5) если $\sigma \sim \sigma'$ и $\tau \sim \tau'$, то $(\sigma \times \tau) \sim (\sigma' \times \tau')$ и $(\sigma|\tau) \sim (\sigma'|\tau')$

Класс функционалов $\mathbf{F}$ назовем λ-*моделью*, если существует такое семейство функционалов $\{\mathcal{S}_{\sigma,\sigma'} | \sigma, \sigma' \in \mathcal{T}, \sigma \sim \sigma'\}$, что $\mathcal{S}_{\sigma,\sigma'} \in \mathcal{F}_{(\sigma|\sigma')}$. Если $\sigma \sim \sigma'$ и $\sigma' \sim \sigma''$, то для любого $f \in \mathcal{F}_\sigma$ имеем $\mathcal{S}_{\sigma,\sigma''} \circ f = \mathcal{S}_{\sigma',\sigma''} \circ (\mathcal{S}_{\sigma,\sigma'} \circ f)$. Для любого $\sigma \in \mathcal{T}$, если $f \in \mathcal{F}_\sigma$, то $\mathcal{S}_{\sigma,\sigma} \circ f = f$.

Класс функционалов $\mathbf{F}$ назовем *экстенсиональным*, если для любых $\sigma, \tau \in \mathcal{T}$, $f, f' \in \mathcal{F}_{(\sigma|\tau)}$ из того, что $f \circ g = f' \circ g$ для любого $g \in \mathcal{F}_\sigma$ следует, что $f = f'$.

Перед тем, как перейти к построению конкретной экстенсиональной λ-модели $\mathbf{C}$, введем еще несколько понятий.

Пару $\langle \mathcal{S}, \nu \rangle$, где ν – нумерация $\mathcal{S}$, назовем *нумерованным множеством.* Семейство $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ назовем *ν-вполне перечислимым*, если множество $\{x | \nu(x) \in \mathcal{S}'\}$ вычислимо перечислимо. Для любых $s_0, s_1 \in \mathcal{S}$ определим $s_0 \leqslant_\nu s_1 \rightleftharpoons s_0 \in \mathcal{S}_0 \to s_1 \in \mathcal{S}_0$ для любого вполне перечислимого подмножества $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$.

Аппроксимацией нумерованного множества $\mathfrak{C} = \langle \mathcal{S}, \nu \rangle$ назовем любой подобъект $\langle \mathfrak{C}_0, \mu \rangle$ этого объекта, для которого выполнены условия:

(1) предикат $R(x,y) \rightleftharpoons \mu\nu_0(x) \leqslant_\nu \nu(y)$ вычислимо перечислим;
(2) если $\mathcal{S}', \mathcal{S}''$ – два ν-вполне перечислимых подмножества $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}' \nsubseteq \mathcal{S}''$, то существует $s_0 \in \mathcal{S}_0$ такой, что $\mu(s_0) \in \mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}''$.

Отметим, что так как аппроксимация - это подобъект, то вместо $\langle \mathfrak{C}_0, \mu \rangle$ можно использовать нумерованное множество $\langle \mathcal{S}_0, \eta \rangle$, где $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, а $\eta \leqslant \nu$ В дальнейшем, все используемые нумерованные множества будут обладать свойством $\mathcal{C}^*_{20}(\mathfrak{C} \in \mathcal{C}^*_{20})$. Полное определение можно посмотреть в [1, гл.3], приведем здесь только основные свойства:

(1) существует наименьший элемент семейства S_0, т.е. найдется такой x, что $R(x,y)$ для любого y. В дальнейшем будем предполагать, не ограничивая общности, что наименьший элемент – $\eta(0)$.
(2) по любой паре можно узнать, существует ли точная верхняя грань для любой пары элементов из аппроксимации. Существует частично вычислимая функция g, такая что, если наименьшая верхняя грань существует, то функция g определена и выдает значение наименьшей верхней грани.
(3) $\mathfrak{C}$ эквивалентно некоторому wn-подсемейству $\mathcal{S}$ семейства всех в.п. множеств. В частности, для главной нумерации ν' семейства $\mathcal{S}$ и любых вычислимо перечислимых множеств $R_0, R_1 \in \mathcal{S}$ выполняется, что $R_0 \leqslant_{\nu'} R_1 \equiv R_0 \subseteq R_1$.

Каждый элемент $\nu(y) \in \mathfrak{C}$ однозначно определяется множеством элементов аппроксимации, расположенных под ним, точнее вычислимо перечислимым множеством $R_y = \{x | R(x,y)\}$. В дальнейшем мы будем использовать обозначение $\nu^s(y)$, подразумевая s-тый шаг вычисления множества R_y.

Теперь построим некоторую λ-модель $\mathbf{C}$.

(1) Пусть $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{C}^*_{20}$.
(2) Если $\mathcal{C}_\sigma$ и $\mathcal{C}_\tau$ уже определены, то полагаем $\mathcal{C}_{(\sigma\times\tau)} \rightleftharpoons \mathcal{C}_\sigma \times \mathcal{C}_\tau$ – декартово произведение $\mathcal{C}_\sigma$ и $\mathcal{C}_\tau$ $\mathcal{C}_{(\sigma|\tau)} \rightleftharpoons \mathfrak{Mor}(\mathcal{C}_\sigma, \mathcal{C}_\tau)$ – семейство вычислимых морфизмов из $\mathcal{C}_\sigma$ в $\mathcal{C}_\tau$

Класс $\mathbf{C}$ назовем *классом частично вычислимых функционалов*, а элементы $\mathcal{C}_\sigma$, $\sigma \in \mathcal{T}$, – *частично вычислимыми функционалами типа* σ. Отметим, что если $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{C}^*_{20}$, то по [1, гл. 3], для любого $\sigma \in \mathcal{T}$ семейство $\mathcal{C}_\sigma \in \mathcal{C}^*_{20}$ и обладает главной вычислимой нумерацией.

Перейдем к вычислимым нумерациям семейств функционалов.

Нумерацию ν семейства $\mathcal{M} \subseteq \mathfrak{S}_0 \times \mathfrak{S}_1$ назовем вычислимой тогда и только тогда, когда существует вычислимые функции f, g такие, что для всех $x, y \in \omega$:

$$\nu(c(x,y)) = \langle \nu_0(f(x)), \nu_1(g(y)) \rangle$$

Здесь и далее, $c(x,y) = z$ – вычислимая функция, биективно связывающая ω^2 и ω, $l(z) = x$ и $r(z) = y$ – ее вычислимые обратные функции.

Нумерацию ν семейства морфизмов $\mathcal{M} \subseteq \mathfrak{Mor}(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1)$ назовем вычислимой тогда и только тогда, когда существует вычислимая функция f такая, что для всех $x, y \in \omega$:

$$[\nu(x)](\nu_0(y)) = \nu_1(f(x, y))$$

Отметим, что в экстенсиональной λ-модели для эквивалентных типов их классы функционалов, как и их нумерации эквивалентны.

3. Фридберговы нумерации семейств частично вычислимых функционалов

Теорема 3.1. *Пусть семейство всех функционалов $\mathcal{C}_0$ обладает вычислимой фридберговой нумерацией, тогда семейство всех функционалов любого заданного типа σ обладает вычислимой фридберговой нумерацией.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по сложности типов. Семейство всех функционалов $\mathcal{C}_0$ обладает вычислимой фридберговой нумерацией. Пусть семейства всех функционалов $\mathcal{C}_\sigma$ и $\mathcal{C}_\tau$ обладают вычислимыми фридберговыми нумерациями, покажем, что таковыми обладают и семейства всех функционалов типов $\sigma \times \tau$ и $\sigma|\tau$,

Пусть ν_0 и ν_1 – вычислимые главные нумерации семейств $\mathcal{C}_\sigma$ и $\mathcal{C}_\tau$ соответственно, а μ_0 и μ_1 – вычислимые фридберговы нумерации этих семейств, и h_0, h_1 – соответствующие сводящие функции. Не ограничивая общности, будем также считать, что $\mu_0(0)$ и $\mu_1(0)$ – наименьшие элементы в описываемых семействах.

1. Для семейства $\mathcal{C}_{\sigma\times\tau}$ определим нумерацию μ следующим образом:

$$\mu(x) = \langle \mu_0(l(x)), \mu_1(r(x)) \rangle$$

Легко заметить, что полученная нумерация будет вычислимой фридберговой нумерацией семейства $\mathcal{C}_{\sigma\times\tau}$.

2. Рассмотрим семейство $\mathcal{C}_{\sigma|\tau} = \mathfrak{Mor}(\mathcal{C}_\sigma, \mathcal{C}_\tau)$

Пусть ν – вычислимая главная нумерация семейства $\mathcal{C}_{\sigma|\tau}$, по определению вычислимой нумерации семейства морфизмов существует такая вычислимая функция f, что

$$[\nu(x)](\nu_0(y)) = \nu_1(f(x, y))$$

Отметим, что $\forall x, y_0, y_1$ из $\nu_0(y_0) = \nu_0(y_1)$ следует, что $\nu_1(f(x, y_0)) = \nu_1(f(x, y_1))$

Тогда нумерация ν':

$$[\nu'(x)](\mu_0(y)) = \nu_1(f(x, h_0(y))),$$

где h_0 – вычислимая функция, сводящая нумерацию μ_0 к ν_0, также будет нумерацией всего семейства $\mathcal{C}_{\sigma|\tau}$.

Пусть $\mathcal{C}'$ – нумерованное множество $\langle \mathcal{C}_\sigma, \mu_0 \rangle$, а ν' – это вычислимая нумерация всех морфизмов из $\mathfrak{Mor}(\mathcal{C}', \mathcal{C}_\tau)$. Из [1, Лемма 2, с. 128], нумерованное множество $\mathcal{C}'$ эквивалентно нумерованному множеству $\mathbf{N} = \langle \omega, Id \rangle$, а семейство всех морфизмов $\mathfrak{Mor}(\mathbf{N}, \mathcal{C}_\tau)$ находится во взаимно однозначном соответствии с семейством всех вычислимых нумераций, сводимых к ν_1. Поэтому для доказательства теоремы достаточно построить вычислимую фридбергову нумерацию всех вычислимых нумераций семейства $\mathcal{C}_\tau$.

Для доказательства этого факта воспользуемся конструкцией М.Куммера[16], который представил простое доказательство без приоритета теоремы Фридберга[17] о существовании однозначной вычислимой нумерации семейства всех частично вычислимых функций.

Пусть η – вычислимая нумерация семейства $\mathcal{C}_\tau$, определим множество $dom(\eta) = \{y | \eta(y) \neq \mu_1(0)\}$. Это множество вычислимо перечислимо, так как под $\mu_1(0)$ находится только один элемент аппроксимации (сам $\mu_1(0)$).

Рассмотрим семейства

$$L_1 = \{\eta || dom(\eta)| - \textit{четная}\}$$
$$L_2 = \{\eta || dom(\eta)| - \textit{нечетная или бесконечна}\}$$

Тогда $L_1 \bigcap L_2 = \emptyset$, и $L = L_1 \bigcup L_2$ – семейство всех вычислимых нумераций $\mathcal{C}_\tau$.

Покажем, что семейство L_1 обладает вычислимой фридберговой нумерацией.

Пусть γ – вычислимая фридбергова нумерация всех конечных множеств четной мощности. Тогда

$$\alpha(e)(y) = \begin{cases} \mu_1(l(e)+1), & \text{если } y \in \gamma(r(e)) \\ \mu_1(0), & \text{если } y \notin \gamma(r(e)) \end{cases}$$

вычислимая фридбергова нумерация.

Покажем, что L_2 обладает вычислимой нумерацией. Возьмем такую аппроксимацию ν', что для любых e, s $dom(\nu'_s(e))$ - конечно. Построим нумерацию β:

Шаг 0. Для любого e полагаем $\beta^0(e) = \mu_1(0)$

Шаг $s+1$. Если $e > s$ или $dom(\nu'_{s+1}(e))$ – четной мощности, то полагаем $\beta^{s+1}(e) = \beta^s(e)$, иначе $\beta^{s+1}(e) = \nu'_{s+1}(e)$.

β – вычислимая нумерация семейства L_2.

Отметим некоторые свойства полученных аппроксимаций.

(1) для любых e, s существуют такие x, t, что $\beta^s(e) \subseteq \alpha^t(x)$. Это выполняется, так как $dom(\beta^s(e))$ –конечное множество, а для любого y найдется y_0, t, такой что $\nu_1^s(y) \subseteq \mu_1^t(y_0)$ (множество $\{y_0 | \exists t \forall x (R^s(x,y) \to R^t(x, h_1(y_0)))\}$ – вычислимо перечислимо, так как R^s выполняется только на конечном наборе x, и не пусто, так как μ_1 - вычислимая нумерация).

(2) Пусть M – множество минимальных индексов β, $M = \{i | \forall j < i \, \beta(i) \neq \beta(j)\}$. Так как $\beta(i) \neq \beta(j) \leftrightarrow \exists y \exists x ((R(x, f(i, h(y)))) \& \neg R(x, f(j, h(y))) \vee (\neg R(x, f(i, h(y)))) \& R(x, f(j, h(y))))$. Множество M – $0'$-перечислимо, а значит найдется $0'$-вычислимая инъективная функция $\bar{g}$, такая что $range(\bar{g}) = M$ и вычислимая функция g, такая что $\forall u \exists s_0 \forall s \geq s_0 \; \bar{g}(u) = g(u,s)$.

Перейдем к описанию построения вычислимой фридберговой нумерации μ(ее аппроксимации μ^s). На шаге s мы будем выбирать последователя e для числа i, предполагая, что $\mu(e) = \beta(\bar{g}(i))$. Если в дальнейшем, на шаге $t > s$, $g(i,s) \neq g(i,t)$, то освобождаем e, $\mu(e)$ приравняем к некоторому элементу из L_1, а затем выбираем нового последователя для i. Во множество $\mathcal{IN}$ будем записывать все такие k, что $\alpha(k)$ уже представлено в μ. Переменная $cand$ содержит наименьший индекс μ, который еще не рассматривался.

Шаг 0. $\mathcal{IN}_0 = \emptyset$; $cand = 0$; для всех e, y: $\mu^0(e)(y) = \mu_1(0)$.

Шаг $s+1$. $i := l(s)$; $t := max(\{s' < s | l(s') = i\} \cup \{0\})$. Выбираем первый из подходящих случаев:

(1) Если у i нет последователя, то выбираем $cand$ в качестве последователя i. $cand := cand + 1$.
(2) Если у i есть последователь e и $g(i,s) = g(i,t)$, то полагаем $\mu^s(e) = \beta^s(g(i,s))$.
(3) Если у i есть последователь e и $g(i,s) \neq g(i,t)$, то ищем такое $k \notin \mathcal{IN}^s$ и $s_0 > s$, что $\mu^s(e) \subseteq \alpha^{s_0}(k)$. Освобождаем последователя e и для любого $s_1 > s$ полагаем $\mu^{s_1}(e) = \alpha^{s_1+s_0}(k)$. $\mathcal{IN}_{s+1} := \mathcal{IN}_s \cup \{k\}$.

Далее выбираем наименьший $m \notin \mathcal{IN}^{s+1}$ и для всех $s_0 > s$ полагаем $\mu^{s_0}(cand) = \alpha^{s_0}(m)$. $\mathcal{IN}_{s+1} := \mathcal{IN}_s \cup \{m\}$; $cand := cand + 1$.

Построение закончено.

Отметим, что благодаря случаям 1 и 2 шага $s+1$, для каждого i найдется последователь e, который никогда не будет освобожден и $\mu(e) = \beta(\bar{g}(i))$. Для всех e, которые были последователями, но были освобождены, в случае 3 шага $s+1$ найдутся различные элементы из L_1. Также для каждого элемента из L_1 найдется номер в μ. Значит, μ – фридбергова нумерация. На каждом шаге $\mu^s(e)$ – это некоторая аппроксимация нумерации $\mathcal{C}_\tau$ и $\mu^s(e) \subseteq \mu^{s+1}(e)$, то μ – вычислимая нумерация.

□

Небольшие модификации представленной конструкции позволяют получить и более сильный результат:

Следствие 3.2. *Семейство $\mathcal{C}_{\sigma|\tau}$ обладает бесконечным числом вычислимых попарно неэквивалентных фридберговых и позитивных неразрешимых нумераций.*

Доказательство. Пусть μ – вычислимая фридбергова нумерация семейства $L = \mathcal{C}_{\sigma|\tau}$, построенная в Теореме 3.1, μ_1 – вычислимая фридбергова нумерация семейства $\mathcal{C}_\tau$. Для каждого $n \in \omega$ определим также нумерацию η_n некоторого подсемейства $\mathcal{C}_\tau$:

$$\eta_n(y) = \begin{cases} \mu_1(y), & \text{если } y \leq n \\ \mu_1(0), & \text{если } y > n \end{cases}$$

Пусть L' – семейство всех η_n и μ' – вычислимая фридбергова нумерация этого семейства.

Легко заметить, что семейство $L \setminus L'$ также обладает вычислимой фридберговой нумерацией – достаточно рассмотреть конструкцию из 3.1 с $L'_1 = L_1 \setminus L'$ и $L'_2 = L_2 \setminus L'$. Обозначим эту нумерацию μ.

Для любого множества A определим нумерацию γ^A семейства $L' \bigcup \{\mu_1\}$:

$$\gamma^A(e) = \begin{cases} \eta_e, & \text{если } e \notin A \\ \mu_1, & \text{если } e \in A \end{cases}$$

Из того, что $\eta_n \subseteq \mu_1$ получаем, что для любых A и B, из $\gamma^A \leqslant \gamma^B$ следует $A \leqslant_m B$, а для любого вычислимо перечислимого невычислимого множества A нумерация γ^A является вычислимой позитивной неразрешимой.

Для построения фридберговых нумераций воспользуемся аналогом конструкции из 3.1.

Пусть $L' = L_1 \bigcup L_2$, L_1 – семейство всех η_{2n+1}, а L_2 – семейство всех η_{2n}. Легко заметить, что каждый элемент из L_2 имеет бесконечно много продолжений из L_1.

Пусть A – произвольное вычислимо перечислимое невычислимое множество, A^s – его аппроксимация конечными множествами. Построим фридбергову нумерацию δ^A семейства L'.

На шаге s мы будем выбирать последователя $e \notin A^s$ для числа i, предполагая, что $\mu(e) = \eta_{2i}$. Если в дальнейшем, на шаге $t > s$, $e \in A^t$, то освобождаем e, $\mu(e)$ приравниваем к некоторому элементу из L_1, а затем выбираем нового последователя для i.

Шаг 0. $\mathcal{IN}_0 = \emptyset$; $cand_1 = 1$; $cand_2 = 0$; для всех e, y: $\mu^0(e)(y) = \mu_1(0)$.

Шаг $s+1$. $i := l(s)$; $t := max(\{s' < s | l(s') = i\} \cup \{0\})$. Выбираем первый из подходящих случаев:

(1) Если у i нет последователя, то выбираем $cand_2$ в качестве последователя i. $cand_2 := cand_2 + 1$.
(2) Если у i есть последователь e и $e \notin A^s$, то полагаем $\mu^s(2e) = \eta_{2i+1}$.
(3) Если у i есть последователь e и $e \in A^t$, то ищем такое $k \notin \mathcal{IN}^s$ и $s_0 > s$, что $\mu^s(2e) \subseteq \eta_{2k}$. Освобождаем последователя e и для любого $s_1 > s$ полагаем $\mu^{s_1}(e) = \eta_{2k}$. $\mathcal{IN}_{s+1} := \mathcal{IN}_s \cup \{k\}$.

Далее выбираем наименьший $m \notin \mathcal{IN}^{s+1}$ и для всех $s_0 > s$ полагаем $\mu^{s_0}(cand_1) = \eta_{2m}$. $\mathcal{IN}_{s+1} := \mathcal{IN}_s \cup \{m\}$; $cand_1 := cand_1 + 2$.

Построение закончено. Полученная нумерация имеет следующий вид:

$$\delta^A(e) = \begin{cases} \eta_{2a+1}, & \text{если } e = 2x, x \notin A \\ \eta_{2b}, & \text{если } e = 2x, x \in A \\ \eta_{2c}, & \text{если } e = 2x+1 \end{cases}$$

для подходящих a, b, c. По построению, нумерация δ^A – вычислимая фридберговая нумерация семейства L', и для любых вычислимо перечислимых множеств A и B, из $\delta^A \leqslant \delta^B$ следует $A \leqslant_m B$.

Нумерации $\mu \bigoplus \delta^A$ и $\mu \bigoplus \gamma^A$ для вычислимо-перечислимых невычислимых множеств A и будут вычислимыми попарно неэквивалентными фридберговыми и позитивными неразрешимыми нумерациями.

□

В [18] был представлен результат о существовании минимальных непозитивных нумераций семейств вычислимо перечислимых множеств. Покажем, что для семейства всех функционалов типа $\sigma|\tau$ из 3.1 эти результаты также выполняются.

Теорема 3.3. [18, Хуторецкий] *Пусть $\mathcal{A}$ – семейство вычислимо перечислимых множеств, для которого выполняется:*

(1) *существует вычислимая нумерация η семейства $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$, такая что для любого $n \in \omega$ выполняется $\eta(n) \supset \eta(n+1)$;*
(2) *Найдется множество $B \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_1$, такое что $B \supseteq \eta(0)$;*
(3) *существует вычислимая фридбергова нумерация семейства $\mathcal{B} = \mathcal{A} \setminus (\mathcal{A}_1 \cup \{B\})$.*

Тогда существует бесконечно много попарно неэквивалентных вычислимых минимальных непозитивных нумераций семейства $\mathcal{A}$.

В качестве $\mathcal{A}$ возьмем семейство $\mathbf{C}_{\sigma|\tau}$. Определим нумерацию η_n для каждого натурального n:

$$\eta_n(y) = \begin{cases} \mu_1(0), & \text{если } y \leq n \\ \mu_1(y), & \text{если } y > n \end{cases}$$

Легко заметить, что нумерация $\eta(n) = \eta_{n+1}$ удовлетворяет первому условию, а в качестве B из второго условия можно взять μ_1. тогда в качестве $\mathcal{A}_1$ возьмем семейство $\{\eta_{n+1}\}_{n\in\omega}$ Рассуждения из доказательства предыдущего следствия доказывают, что $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A}_1 \cup \{B\})$ обладает фридберговой нумерацией, а значит все условия теоремы выполнены.

Из [1, гл.4, §3, стр. 352] следует, что если $\mathcal{C}_0$ обладает аппроксимацией с фридберговой нумерацией, то для любого $\sigma \in \mathcal{T}$ и $\mathcal{C}_\sigma$ обладает аппроксимацией с фридберговой нумерацией. Возникает естественный вопрос, существует ли фридбергова нумерация семейства, аппроксимация которого обладает фридберговой нумерацией?

Пусть ν – главная нумерация семейства $\mathcal{C}_\sigma$, μ – фридбергова нумерация аппроксимации $\mathcal{C}_0$, h – вычислимая функция, которая сводит μ к ν.

Предложение 3.4. *Если над любым элементом аппроксимации найдется больший элемент аппроксимации, или $\forall x \exists y (R(x, h(y)) \& \neg R(y, h(x)))$, то семейство $\mathcal{C}_0$ обладает вычислимой фридберговой нумерацией.*

Доказательство. Опять воспользуемся конструкцией Куммера [16].

Рассмотрим семейства

$$L_1 = \{\nu(y) || R_y| - \text{нечетная}\}$$
$$L_2 = \{\nu(y) || R_y| - \text{четная или бесконечная}\}$$

Отметим, что из того, что $\nu(y)$ не является элементом аппроксимации следует, что R_y бесконечно. Если $\mu(x_0) \subseteq \nu(y)$ и $\mu(x_0) \neq \nu(y)$ то значит $\exists x_2(\mu(x_0) \subsetneq \mu(x_2) \subsetneq \nu(y)$. Действительно, так как множества $A_1 = \{x | \mu(x_0) \subseteq \nu(x)\}$ и $A_2 = \{x | \mu(x) \subseteq \nu(y)\}$ являются ν-вполне перечислимыми, то найдется x_1 из $A_1 \setminus A_2$, такой что $\mu(x_1) \subseteq \nu(y)$. По [1, гл.2, §6, стр. 193, Предложение 5], так как $\mu(x_0) \subseteq \nu(y)$ и $\mu(x_1) \subseteq \nu(y)$, то найдется x_2, такой что $\mu(x_0) \subseteq \mu(x_2)$, $\mu(x_1) \subseteq \mu(x_2)$ и $\mu(x_2) \subseteq \nu(y)$.

Значит, L_1 состоит только из элементов аппроксимации и $L_1 = \{\mu(y) || R_{h(y)}| - \text{нечетная}\}$ и обладает вычислимой фридберговой нумерацией. L_2 вычислимо и любой шаг аппроксимации элемента из L_2 обладает счетным числом продолжений из L_1. Тогда $L_1 \bigcup L_2$ обладает вычислимой фридберговой нумерацией. □

Отметим также, что указанное свойство является вполне естественным – так, подобной аппроксимацией обладает семейство всех вычислимо перечислимых множеств.

References

[1] Yu.L. Ershov, *Theory of numerations*, M.: Nauka, 1977(In Russian). MR0506676

[2] S.A. Badaev, S.S. Goncharov, *Computability and numberings. In: New Computational Paradigms*, S.B.Cooper, B.Lowe, A.Sorbi (eds.). Springer, 2008, 19-–34. MR2762078

[3] S.S. Goncharov, A. Sorbi, *Generalized computable numerations and nontrivial Rogers semilattices*, Algebra and Logic, **36**:6 (1997), 359–369. MR1657301

[4] S.A. Badaev, S.S. Goncharov, *Rogers semilatices of families of arithmetic sets*, Algebra and Logic, **40**:5 (2001), 283–291. MR1917529

[5] S.A. Badaev, S.S. Goncharov, A. Sorbi, *On elementary theories of Rogers semilattices*, Algebra and Logic, **44**:3 (2005), 143–147. MR2170687

[6] S.A. Badaev, S.S. Goncharov, A. Sorbi, *Isomorphism types of Rogers semilattices for families from different levels of the arithmetical hierarchy*, Algebra and Logic, **45**:6 (2006), 361–370. MR2321084

[7] S.A. Badaev, S.Yu. Podzorov, *Minimal coverings in the Rogers semilattices of Σ^0_n-computable numberings*, Siberian Math. J., **43**:4 (2002), 616–622. MR1934578

[8] S.Yu. Podzorov, *On the local structure of Rogers semilattices of Σ^0_n-computable numberings*, Algebra and Logic, **44**:2 (2005), 82–94. MR2170694

[9] S.S. Goncharov, S. Lempp, D.R. Solomon, *Friedberg numberings of families of n-computably enumerable sets*, Algebra and Logic, **41**:2 (2002), 81–86. MR1922986

[10] S.S. Ospichev,*Friedberg numberings in the Ershov hierarchy*, Algebra and Logic, **54**:4 (2015), 283–295. MR3468410

[11] K.Sh. Abeshev, S.A. Badaev, M. Mustafa, *Families Without Minimal Numberings*, Algebra and Logic, **53**:4 (2014), 271–286. MR3309848

[12] K.Sh. Abeshev, *On the existence of universal numberings for finite families of d.c.e. sets*, Math. Logic Quat., **60**:3 (2014), 161–167. MR3207205

[13] S.A. Badaev, S. Lempp, *A Decomposition of the Rogers semilattice of a family of d.c.e. sets*, J. Symb. Logic, **74**:2 (2009), 618–640. MR2518814

[14] Yu.L. Ershov, *Computable functionals of finite types*, Algebra and Logic, **11**:4 (1972), 203–242. MR0360238

[15] Yu.L. Ershov, *Everywhere-defined continuous functionals*, Algebra and Logic, **11**:6 (1972), 363–368. MR0360239

[16] M. Kummer, *An easy priority-free proof of a theorem of Friedberg*, Theoretical Computer Science, **74**:2 (1990), 249–251. MR1067521

[17] R.M. Friedberg, *Three theorems on recursive enumeration: I. Decomposition II. Maximal set III. Enumeration without duplication*, J. Symbolic Logic, **23** (1958), 309–316. MR0109125

[18] A.B. Hutoreckii, *Two existence theorems for computable numerations*, Algebra and Logic, **8**:4 (1969), 277–282. MR0289294

Sergey Ospichev
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Novosibirsk State University,
2, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: ospichev@math.nsc.ru