S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 639–405 (2019) УДК 517.9
DOI 10.33048/semi.2019.16.022 MSC 35L75

МАТРИЧНЫЙ АНАЛИЗ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРОЕКТОРОВ ВОЗМУЩЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Н.Б. УСКОВА

Abstract. We study bounded perturbations of an unbounded positive definite self-adjoint operator with discrete spectrum. The spectrum has semi-simple eigenvalues with finite geometric multiplicity and the perturbation belongs to operator space defined by rate of the off-diagonal decay of the operator matrix. We show that the spectral projections and the resolvent of the perturbed operator belong to the same space as the perturbation. These results are applied to the Hill operator and the operator with matrix potential. We also consider the inverse problem and the modified Galerkin method.

Keywords: the method of similar operators, the Hill operator, spectral projection.

1. Введение

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство и $\operatorname{End}\mathcal{H}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве $\mathcal{H}$, $\|X\|_\infty$ — норма оператора $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ в пространстве $\operatorname{End}\mathcal{H}$.

Определение 1. *Линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ с плотной в $\mathcal{H}$ областью определения $D(A)$, т. е. $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$, называется самосопряженным, если $A = A^*$.*

Можно также привести и другое, эквивалентное определению 1, определение, основанное на теореме Стоуна [1].

Uskova, N.B., The matrix analysis of spectral projections for the perturbed self-adjoint operators.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 16-01-00197, 19-01-00732).
Поступила 28 ноября 2017, опубликована 19 марта 2019.

Определение 2 ([2], [3]). *Линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ с плотной в $\mathcal{H}$ областью определения $D(A)$ называется самосопряженным, если оператор $iA : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ является генератором сильно непрерывной изометрической группы операторов $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\|T(t)\| = 1$.*

Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ самосопряженный положительно определенный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H}$, и $\sigma(A)$ — его спектр. Предположим, что резольвентное множество $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ непусто и резольвента $R(\cdot, A) : \rho(A) \to \operatorname{End} \mathcal{H}$ компактна, т. е. операторы $R(\lambda, A)$, $\lambda \in \rho(A)$, — компактны. Далее оператор A будет играть роль невозмущенного оператора с известными спектральными характеристиками.

Предположим, что спектр $\sigma(A)$ оператора A состоит из полупростых собственных значений

$$\lambda_n = an^2 + b(n)n + c(n), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $a > 0$, $|b(n)| \leqslant M_1$, $|c(n)| \leqslant M_2$, и M_1, $M_2 \geqslant 0$ — некоторые постоянные. Геометрическая кратность собственных значений λ_n конечна и не превосходит числа $l \geqslant 1$. Через Q_n обозначим проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\sigma_n = \{\lambda_n\}$ оператора A и $AQ_n = \lambda_n Q_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Рассматриваемый класс невозмущенных операторов с асимптотикой спектра (1) в значительной степени ориентирован на исследование дифференциальных операторов второго порядка, определяемых регулярными краевыми условиями.

Рассматривается возмущенный оператор $A-B : D(A-B) = D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, где возмущение B принадлежит алгебре $\operatorname{End} \mathcal{H}$. В данной статье основные исследования сосредоточены на проблеме асимптотического поведения спектральных проекторов и резольвенты возмущенного оператора $A - B$ и, в частности, собственных векторов.

Основные результаты данной статьи связаны с доказательством того факта, что скорость убывания внедиагональных элементов матрицы возмущения B сохраняют матрицы проекторов и резольвенты возмущенного оператора $A-B$.

Исследования ведутся в русле исследований, приводимых в статьях [4] – [8], где знаменитая теорема Н. Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье [9] распространялась на ограниченные операторы, действующих в банаховых пространствах.

Использование матриц позволяет определить классы ограниченных операторов, диагонали которых суммируемы с некоторым весом. Для ограниченных операторов такой подход был развит в [4] – [8] (в хронологическом порядке). В этих же работах производилась оценка матричных элементов резольвенты некоторого ограниченного оператора, действующего между банаховыми бесконечномерными пространствами X и Y. В указанных работах в пространствах X и Y действуют изометрические группы операторов. К сожалению, для рассматриваемого класса операторов такой подход может быть неприменим, так как при рассмотрении, например, дифференциального оператора, действующего из своей области определения $D(L)$ в пространстве $\mathcal{H}$, где $D(L)$ выступает в роли пространства X, в пространство $\mathcal{H} = Y$ естественным образом возникает действующая на $D(L)$ группа операторов, которая может не являться ограниченной. Кроме того, далее будут рассмотрены и другие весовые операторные пространства, отличные от введенных в работах [4] – [8].

Основным результатом работы является теорема 1 о подобии оператора $A - B$ оператору, который является прямой ортогональной суммой (см. определение 3) операторов конечного ранга. На ее основе

1) получены оценки матричных элементов резольвенты и спектральных проекторов оператора $A - B$;

2) получены асимптотические формулы для собственных векторов;

3) в частном случае рассмотрена обратная задача спектрального анализа;

4) рассмотрен метод Галеркина и его модификация для численного нахождения собственных значений; показано, что метод Галеркина не выводит из рассматриваемого весового операторного пространства.

Особо подчеркнем, что кроме случая скалярного потенциала, играющего роль возмущения, в работе также рассматривается матричный потенциал.

Статья организована следующим образом. Во втором параграфе вводятся используемые в работе классы операторов и приводятся основные определения. Третий параграф содержит формулировку основных результатов данной работы и сравнение результатов с известными. В четвертом параграфе коротко изложен метод подобных операторов в адаптированном для исследуемого случая виде. В пятом параграфе абстрактная схема применяется для построения различных допустимых троек для исследуемого оператора. Там же доказана основная теорема о подобии и следствия из нее, касающиеся спектральных проекторов и собственных векторов. В шестом параграфе для частного случая пространства $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \alpha, \beta)$ рассмотрена обратная задача спектрального анализа. В седьмом параграфе приведены результаты, касающиеся исследования оператора L_{bc} как примеры применения абстрактных результатов §3. Наконец, в восьмом параграфе рассмотрено применение метода Галеркина и его модификации для численного нахождения собственных значений операторов рассматриваемого класса.

2. Классы операторов и основные определения

В этом параграфе вводятся в рассмотрение понятие матрицы ограниченного оператора относительно разложения единицы системой ортогональных проекторов. Изучаемые далее классы операторов определяются различными типами убывания матричных элементов операторов.

Введем специальные классы операторов, которые определяются с помощью некоторой весовой функции. Этим классам может принадлежать рассматриваемый в данной работе оператор-возмущение B. Далее символом $\mathbb{J}$ обозначим одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$.

Пусть $\{P_k, k \in \mathbb{J}\}$ — система ортопроекторов (разложение единицы) из алгебры $\operatorname{End}\mathcal{H}$ со свойствами:

1) $P_iP_j = 0$ при $i \neq j$ для всех $i, j \in \mathbb{J}$;

2) ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{J}} P_kx$ безусловно сходится к $x \in \mathcal{H}$ для любого $x \in \mathcal{H}$;

3) из равенств $P_ix = 0$ для любого $i \in \mathbb{J}$ следует, что $x = 0$.

Каждому оператору $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ поставим в соответствие матрицу (X_{ij}), $i, j \in \mathbb{J}$, составленную из операторных блоков $X_{ij} = P_iXP_j$, $i, j \in \mathbb{J}$. Далее используется запись $X \sim (X_{ij})$. Введем, согласно [7], понятие диагонали матрицы (X_{ij}) оператора X. А именно, p-ой диагональю, где $p \in \mathbb{Z}$, матрицы (X_{ij})

назовем оператор $X_p \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, определяемый формулой

$$X_p = \sum_{i-j=p} X_{ij}.$$

Определим двустороннюю числовую последовательность $d_X : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, положив

$$d_X(p) = \|X_p\|.$$

Последовательность $d_X : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ является важной характеристикой убывания элементов матрицы оператора X, лежащих вне главной диагонали. Корректность определения операторов X_p, $p \in \mathbb{Z}$, (безусловная сходимость ряда) доказана в [7].

Если для некоторого оператора X из $\operatorname{End}\mathcal{H}$ выполнено условие

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} d_X(p) < \infty,$$

то оператор X будем называть оператором с суммируемыми диагоналями. Таким образом, этот оператор $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ представим в виде

$$X = \sum_{p\in\mathbb{Z}} X_p.$$

Операторы с суммируемыми диагоналями образуют подалгебру $\operatorname{End}_1\mathcal{H}$ из алгебры $\operatorname{End}\mathcal{H}$. В этой подалгебре норма вводится следующей формулой

$$\|X\|_1 = \sum_{p\in\mathbb{Z}} d_X(p)$$

и $\operatorname{End}_1\mathcal{H}$ является банаховой алгеброй.

Отметим, что с помощью последовательности $d_X(p)$, $p \in \mathbb{Z}$, можно задавать различные подпространства операторов. Например, посредством норм диагоналей определяются пространства $\operatorname{End}_p\mathcal{H} = \{X \in \operatorname{End}\mathcal{H}, \|X\|_{\operatorname{End}_p\mathcal{H}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_X^p(n) < \infty\}$, $p \in [1, \infty)$. Другие важные примеры весовых операторных пространств можно найти в [10] – [14].

Введем весовые классы (пространства) операторов, используемые далее в статье.

1. Класс $\operatorname{End}_\alpha\mathcal{H}$. Пусть $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ — субмультипликативный вес, т. е $\alpha(k+l) \leqslant \alpha(k)\alpha(l)$ и $\alpha(k) \geqslant 1$. Оператор $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ отнесем к $\operatorname{End}_\alpha\mathcal{H}$, если

$$\sum_p d_X(p)\alpha(p) < \infty.$$

Таким образом, пространство $\operatorname{End}_\alpha\mathcal{H}$ состоит из операторов, диагонали которых суммируемы с весом α [7]. Норма в $\operatorname{End}_\alpha\mathcal{H}$ задается формулой $\|X\|_\alpha = \sum\limits_p d_X(p)\alpha(p)$.

2. Класс $\operatorname{End}_u\mathcal{H}$. Рассмотрим алгебру операторов $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, матрицы которых обладают свойством

$$\sum_p \sup_{i-j=p} \big(\|X_{ij}\|u(i,j)\big) < \infty,$$

где $u : \mathbb{J} \times \mathbb{J} \to \mathbb{R}_+$ — скалярная весовая матрица, $u(i,j) \geqslant 1$ для всех i, j и $u(i,j) \leqslant Cu(i,k)u(k,j)$ для всех i, j, $k \in \mathbb{Z}$, и некоторой константы $C > 0$.

Пространство таких операторов обозначим $\operatorname{End}_u \mathcal{H}$ с нормой

$$\|X\|_u = \sum_p \sup_{i-j=p} \big(\|X_{ij}\| u(i,j)\big).$$

Такая алгебра операторов называлась в [15] алгеброй Гохберга- Баскакова-Сёструнда. В тривиальном случае, если $u(i,j) = u_0(i-j)$, где $u_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ — субмультипликативный вес и $C = 1$, то пространства $\operatorname{End}_\alpha \mathcal{H}$ и $\operatorname{End}_u \mathcal{H}$ совпадают. Очевидно также, что $\operatorname{End}_1 \mathcal{H} = \operatorname{End}_\alpha \mathcal{H}$ при $\alpha(p) \equiv 1$ для любого $p \in \mathbb{Z}$.

Пространства $\operatorname{End}_\alpha \mathcal{H}$ и $\operatorname{End}_u \mathcal{H}$ далее будут считаться пространствами со-отнесенными (ассоциированными) с пространством $\operatorname{End}\mathcal{H}$. В случае рассмотрения пространства $\operatorname{End}\mathcal{H}$ и соотнесенных с ним пространств, последовательность $d_X : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ всегда задается формулой

$$d_X(p) = \sup_{i-j=p} \|X_{ij}\|, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим двусторонний идеал операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ из банаховой алгебры $\operatorname{End}\mathcal{H}$. Норму любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ обозначим символом $\|X\|_2$. Отметим, что $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ является гильбертовым пространством. В статье систематически используются результаты об идеале $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ из монографии [16]. Так как проекторы P_k, $k \in \mathbb{Z}$, образуют дизъюнктную систему и являются ортопроекторами, то в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i,j} \|X_{ij}\|_2^2, \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}).$$

При этом последняя формула также может быть записана в виде

$$\|X\|_2^2 = \sum_{p\in\mathbb{Z}} d_X^2(p),$$

где

$$d_X(p) = \Big(\sum_{i-j=p} \|X_{ij}\|_2^2\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

и величина $d_X(p)$, $p \in \mathbb{Z}$, является нормой Гильберта-Шмидта p-ой диагонали X_p матрицы оператора X. Подчеркнем, что далее во всех пространствах, соотнесенных с $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ величина $d_X(p)$ считается также по формуле (2).

3. Класс $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$. Рассмотрим подпространство $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ операторов таких, что

$$\sum_p d_X(p)^2 \alpha^2(p) < \infty. \tag{3}$$

Условие (3) означает суммируемость с квадратом диагоналей матрицы оператора X с субмультипликативным весом.

4. Класс $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \alpha, \beta)$. Введем в рассмотрение две ненулевые последовательности положительных чисел $\alpha = (\alpha_i)$, $\beta = (\beta_i)$ из пространства l_2 числовых последовательностей суммируемых с квадратом. Оператор $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ отнесем к пространству $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \alpha, \beta)$, если

$$\|X_{ij}\|_2 \leqslant \operatorname{const} \alpha_i \beta_j,$$

для всех i, j, с нормой $\|X\|_{\alpha\beta} = \inf\{c > 0 : \|X_{ij}\| \leqslant c\alpha_i\beta_j\}$ для всех $i, j \in \mathbb{J}$. Такое пространство рассматривалось в [17], [18] и в [18] доказано, что $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \alpha, \beta)$ является банаховым пространством.

5. Класс $\mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H})$. Для любого оператора $0 \neq X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ рассмотрим двустороннюю последовательность вида (см. [19])

$$\beta_n(X) = \|X\|_2^{-\frac{1}{2}} \max\left\{\Big(\sum_{|k|\geqslant|n|} \|XQ_k\|_2^2\Big)^{\frac{1}{4}}, \Big(\sum_{|k|\geqslant|n|} \|Q_kX\|_2^2\Big)^{\frac{1}{4}}\right\}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

Последовательность $\{\beta_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, обладает следующими свойствами (см. [19]):

1) $\beta_n(X) = \beta_{-n}(X)$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) $\lim\limits_{|n|\to\infty} \beta_n(X) = 0$;

3) $\beta_n(X) \leqslant 1$;

4) $\beta_n(X) \geqslant \beta_{n+1}(X)$;

5) $\beta_n(X) \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, если и только если X не есть конечномерный оператор (далее будут рассматриваться только такие операторы);

6) конечна величина $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\|XP_{(n)}\|_2^2 + \|P_{(n)}X\|_2^2}{(\beta_n(X))^2}$.

Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ рассмотрим самосопряженный компактный оператор

$$f_X(A) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n(X) Q_n \in \operatorname{End}\mathcal{H},$$

являющийся функцией f_X от оператора A, где $f_X : \sigma(A) \to \mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, $f_X(\lambda_n) = \beta_n(X)$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\|f_X(A)\| \leqslant \max\limits_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n(X) = 1$. Такая функция была введена в работе [19]. Она характеризует скорость убывания норм строк (столбцов) операторной матрицы оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Оператор $f_B(A)$, построенный по возмущению B, для простоты обозначим через $f(A)$. Рассмотрим пространство операторов $\mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H}) \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, допускающих представление

$$X = X_l f(A), \quad X = f(A) X_r,$$

для некоторых X_l, $X_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ с нормой $\|X\|_{2,*} = \max\{\|X_l\|_2, \|X_r\|_2\}$. Очевидно, что $\|X\|_2 \leqslant \|X\|_{2,*}$, $X \in \mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H})$.

Отметим, что введенное выше пространство $\mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H})$ играет существенную роль в спектральном анализе возмущенных дифференциальных операторов первого порядка. Оно позволяет обходить трудность, заключающуюся в том, что собственные значения у невозмущенного оператора не разбегаются, а это, в свою очередь, затрудняет применение метода подобных операторов. Кроме того, такие операторы являются нормальными, для них не выполняется условие (1), они не укладываются в схему, проводимую в данной работе. Результаты статей [20] – [27], касающиеся операторов Дирака и операторов с инволюцией, получены именно с использованием пространства $\mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H})$.

Используемая далее терминология введена в работах [20], [24], и применялась также в работах [22], [23], [25], [28].

Заметим, что введенная ранее система спектральных проекторов $\{Q_n, n \in \mathbb{J}\}$ также есть дизъюнктная система проекторов. Разложение единицы системой проекторов $\{Q_n, n \in \mathbb{J}\}$ ведет к представлению гильбертова пространства $\mathcal{H}$ в виде прямой суммы взаимно ортогональных ненулевых замкнутых подпространств $\mathcal{H}_n$, т. е.

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{J}} \mathcal{H}_n, \tag{4}$$

где $\mathcal{H}_i$ ортогонально $\mathcal{H}_j$ при $i \neq j$ и $x = \sum\limits_{n \in \mathbb{J}} x_n$, $x_n \in \mathcal{H}_n$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{n \in \mathbb{J}} \|x_n\|^2$.

Определение 3. *Линейный оператор $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ называется ортогональной прямой суммой ограниченных операторов $\mathcal{E}_n \in \operatorname{End} \mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{J}$, относительно разложения (4), при этом используется запись*

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{n \in \mathbb{J}} \mathcal{E}_n, \tag{5}$$

если

1) $\mathcal{H}_n \subset D(\mathcal{E}) = \{x \in \mathcal{H} : \sum\limits_{k \in \mathbb{J}} \|\mathcal{E}_k x_k\|^2 < \infty, x_k = P_k x, k \in \mathbb{J}\}$, для всех $n \in \mathbb{J}$;

2) каждое подпространство $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{J}$, инвариантно относительно оператора $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_n$, $n \in \mathbb{J}$, есть сужение оператора $\mathcal{E}$ на $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{J}$;

3) $\mathcal{E}x = \sum\limits_{k \in \mathbb{J}} \mathcal{E}_k x_k$, $x \in D(\mathcal{E})$, где $x_k = Q_k x$, $k \in \mathbb{J}$.

Определение 4. *Разложение гильбертова пространства $\mathcal{H}$ вида*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k \in \mathbb{J}} U\mathcal{H}_k, \tag{6}$$

где U — обратимый оператор из $\operatorname{End} \mathcal{H}$ и $\mathcal{H}$ есть ортогональная прямая сумма подпространств $\mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{J}$, вида (4) назовем квазиортогональным или U-ортогональным. Если оператор U представим в виде $U = I + W$, где $W \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то квазиортогональное разложение пространства $\mathcal{H}$ назовем разложением Рисса.

Отметим, что U-ортогональное разложение (6) пространства $\mathcal{H}$ является ортогональным, если в $\mathcal{H}$ ввести эквивалентное скалярное произведение вида

$$(x, y)_* = (Ux, Uy), \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Определение 5. *Будем говорить, что линейный замкнутый оператор $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ является квазиортогональной (U-ортогональной) прямой суммой ограниченных операторов $\widetilde{\mathcal{E}}_k$, $k \in \mathbb{J}$, относительно квазиортогонального разложения пространства $\mathcal{H}$ вида (6), если $\widetilde{\mathcal{E}}_k = U\mathcal{E}_k U^{-1}$, $k \in \mathbb{J}$, для некоторого обратимого оператора $U \in \operatorname{End} \mathcal{H}$. При этом используется запись*

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{E}}_k.$$

Пусть $\mathcal{M}$ — один из рассматриваемых пяти классов операторов из алгебры $\operatorname{End} \mathcal{H}$ ($\mathcal{M} \subset \operatorname{End} \mathcal{H}$). В основе проводимого исследования лежит теорема о подобии оператора $A - B$ оператору, имеющему матрицу (относительно рассматриваемой системы проекторов $\{Q_k, k \in \mathbb{J}\}$) блочно-диагонального вида. Пусть $\Delta_m = \cup_{i=1}^m \{\lambda_i\}$ и $Q_{(m)}$ — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству Δ_m, т. е. $Q_{(m)} = P(\Delta_m, A)$.

Заметим, что невозмущенный оператор A есть ортогональная прямая сумма операторов $A_n = A|\mathcal{H}_n = \lambda_n I_n$, $\mathcal{H}_n = \operatorname{Ran} Q_n$, $n \in \mathbb{J}$, относительно разложения пространства $\mathcal{H}$ вида (4). Символом I_n обозначим тождественный оператор в каждом из пространств $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{J}$. При этом все операторы A_n, $n \in \mathbb{J}$, имеют ранг равный кратности собственного значения λ_n, $n \in \mathbb{J}$. Оператор A также есть ортогональная прямая сумма операторов

$$A = A_{(m)} \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{|j|>m \\ j\in\mathbb{J}}} A_j \Big) = A_{(m)} \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{|j|>m \\ j\in\mathbb{J}}} \lambda_j I_j \Big),$$

относительно ортогонального разложения пространства $\mathcal{H}$ вида

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{|j|>m \\ j\in\mathbb{J}}} \mathcal{H}_j \Big), \quad \mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Ran} Q_{(m)}.$$

Отметим, что $A_{(m)} = \bigoplus\limits_{\substack{|j|\leqslant m \\ j\in\mathbb{J}}} A_j = \bigoplus\limits_{\substack{|j|\leqslant m \\ j\in\mathbb{J}}} \lambda_j I_j$ относительно ортогонального разложения подпространства $\mathcal{H}_{(m)} = \bigoplus\limits_{\substack{|j|\leqslant m \\ j\in\mathbb{J}}} \mathcal{H}_j$.

Определение 6. *Два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ такой, что $A_1 U x = U A_2 x$, $x \in D(A_2)$, $UD(A_2) = D(A_1)$. Оператор U называется оператором преобразования оператора A_1 в A_2.*

3. Основные результаты

При формулировке основных результатов наряду с введенной системой ортогональных проекторов $\{Q_n, n \in \mathbb{Z}\}$ на собственные подпространства рассматриваемого самосопряженного оператора A, т. е. $AQ_n = \lambda_n Q_n$, $n \in \mathbb{J}$, где собственные значения λ_n, $n \in \mathbb{J}$, определены формулой (1), вводится система ортопроекторов $\{P_j, j \in \mathbb{Z}\}$ с $\dim \operatorname{Im} P_j = 1$. При этом каждый проектор Q_n, $n \in \mathbb{J}$, с $\dim \operatorname{Im} Q_n = k$ есть сумма $Q_n = P_{n_1} + P_{n_2} + \dots + P_{n_k}$ и, следовательно, $AP_{n_i} = \lambda_n P_{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Далее везде рассматривается операторная матрица B относительно системы проекторов $\{P_n, n \in \mathbb{J}\}$.

Если все собственные значения оператора A простые, то введенные системы проекторов $\{P_n, n \in \mathbb{J}\}$ и $\{Q_n, n \in \mathbb{J}\}$ совпадают.

В основе всех приводимых в статье результатов лежит

Теорема 1. *Существует такое целое число $m \geqslant 0$, что оператор $A - B$, $B \in \mathcal{M}$, подобен оператору блочно-диагонального вида*

$$\mathcal{A} = A - Q_{(m)} X Q_{(m)} - \sum_{\substack{|n|\geqslant m+1 \\ n\in\mathbb{J}}} Q_n X Q_n, \tag{7}$$

где оператор $X \in \mathcal{M}$ есть решение нелинейного операторного уравнения метода подобных операторов и оно может быть найдено методом итераций, начиная с $X^{(0)} = 0$, $X^{(1)} = B$, ...

Оператор $\mathcal{A}$ является прямой ортогональной суммой операторов конечного ранга вида

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{1(m)} \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{|k|>m \\ k\in\mathbb{J}}} \mathcal{A}_{1k} \Big),$$

где $\mathcal{A}_{1(m)} = (A - Q_{(m)} X)|\mathcal{H}_{(m)}$, $\mathcal{A}_{1k} = (A - Q_k X)|\mathcal{H}_k$, $|k| > m$, $k \in \mathbb{J}$. При этом оператор $A - B$ есть U-ортогональная прямая сумма операторов $U\mathcal{A}_{1(m)}U^{-1} \oplus$

$\Big(\bigoplus\limits_{\substack{|k|>m\\ k\in\mathbb{J}}} U\mathcal{A}_{1k}U^{-1}\Big)$ *относительно* U*-ортогонального разложения пространства* $\mathcal{H}$ *вида*

$$\mathcal{H} = U\mathcal{H}_{(m)} \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{|k|>m\\ k\in\mathbb{J}}} U\mathcal{H}_k\Big).$$

Нелинейное уравнение из теоремы 1, а также конкретный вид операторов X, U будет приведен в следующих параграфах.

Из подобия операторов $A - B$ и $\mathcal{A}$ следует, что спектральные проекторы оператора $\mathcal{A}$ (которые совпадают со спектральными проекторами Q_k, $|k| > m$, $k \in \mathbb{J}$, невозмущенного оператора A) и спектральные проекторы $\widetilde{Q}_k$, $|k| > m$, $k \in \mathbb{J}$, оператора $A - B$ подобны. А именно, имеют место равенство

$$\widetilde{Q}_k = UQ_kU^{-1}, \quad |k| > m, \quad k \in \mathbb{J},$$

где непрерывно обратимый оператор U из $\operatorname{End}\mathcal{H}$ будет построен и подробно рассмотрен в следующих параграфах. Здесь же только отметим, что из $B \in \mathcal{M}$ следует, что $U - I \in \mathcal{M}$.

Рассмотрим оператор $\widetilde{A} = A - B : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, где оператор B принадлежит введенному выше одному из весовых операторных пространств. Один из основных результатов статьи касается оценок матричных элементов спектральных проекторов $\widetilde{Q}_k$, $|k| > m$, $k \in \mathbb{J}$, оператора $\widetilde{A}$ и его резольвенты. Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 2. *Существует такое натуральное число* m*, что для каждого спектрального проектора* $\widetilde{Q}_k$, $|k| > m$, $k \in \mathbb{J}$, *имеют место оценки:*

1) если $B \in \operatorname{End}_\alpha\mathcal{H}$, *то* $\widetilde{Q}_k \in \operatorname{End}_\alpha\mathcal{H}$, *т. е.*

$$\sum_p d_{\widetilde{Q}_k}(p)\alpha(p) < \infty;$$

2) если $B \in \operatorname{End}_u\mathcal{H}$, *то* $\widetilde{Q}_k \in \operatorname{End}_u\mathcal{H}$, *т. е.*

$$\sum_p \sup_{i-j=p} \|(\widetilde{Q}_k)_{ij}\| u(i,j) < \infty;$$

3) если $B \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$, *то* $\widetilde{Q}_k \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$, *т. е.*

$$\sum_p d^2_{\widetilde{Q}_k}(p)\alpha^2(p) < \infty;$$

4) если $B \in \mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H})$, *то* $\widetilde{Q}_k \in \mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H})$ *и*

$$\|P_i(\widetilde{Q}_k - Q_k)P_j\|_2 \leqslant c_1 d_{ik}\beta_k, \quad i \neq j \neq k,$$

где $d_{ik} = \operatorname{dist}(\sigma_i, \sigma_k)$;

5) если $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \alpha, \beta)$, *то* $\widetilde{Q}_k \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \alpha, \beta)$ *и*

$$\|P_i(\widetilde{Q}_k - Q_k)P_j\|_2 \leqslant c_2 d_{ik}\alpha_i\beta_j,$$

где c_1, $c_2 > 0$ *— некоторые константы.*

Более того, если $\lambda_0 \in \rho(\widetilde{A})$, *то для* $R(\lambda_0, \widetilde{A})$ *имеют место оценки:*

1) если $B \in \mathrm{End}_\alpha \mathcal{H}$*, то* $R(\lambda_0, \widetilde{A}) \in \mathrm{End}_\alpha \mathcal{H}$*, т. е.*

$$\sum_p d_{R(\lambda_0, \widetilde{A})}(p)\alpha(p) < \infty;$$

2) если $B \in \mathrm{End}_u \mathcal{H}$*, то* $R(\lambda_0, \widetilde{A}) \in \mathrm{End}_u \mathcal{H}$*, т. е.*

$$\sum_p \sup_{i-j=p} \|d_{R(\lambda_0, \widetilde{A})}(p)\| u(i,j) < \infty;$$

3) если $B \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$*, то* $R(\lambda_0, \widetilde{A}) \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$*, т. е.*

$$\sum_p d^2_{R(\lambda_0, \widetilde{A})}(p)\alpha^2(p) < \infty;$$

4) если $B \in \mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H})$*, то* $R(\lambda_0, \widetilde{A}) \in \mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H})$*;*

5) если $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \alpha, \beta)$*, то* $\widetilde{P}_k R(\lambda_0, \widetilde{A}) \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \alpha, \beta)$ *и*

$$\|P_i R(\lambda_0, \widetilde{A}) P_j\|_2 \leqslant c_3 \alpha_i \beta_j,$$

где c_3 *— некоторая константа.*

Таким образом, из теоремы 2 следует, что матрицы спектральных проекторов и резольвенты наследуют убывание матричных элементов оператора B.

Обозначим символом $\mathcal{M}_1$ одно из двух следующих операторных пространств $\mathcal{M}_1 = \{\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \mathrm{End}_1 \mathcal{H}\}$, $\|X\|_{\mathcal{M}_1}$ — норма оператора X как элемента пространства $\mathcal{M}_1$.

Теорема 3. *Пусть* $B \in \mathcal{M}_1$*. Имеет место оценка (равномерной безусловной равносходимости спектральных разложений):*

$$\|\widetilde{Q}(\Omega) - Q(\Omega)\|_{\mathcal{M}_1} \leqslant \frac{C}{k(\Omega)},$$

где $Q(\Omega) = \sum\limits_{j\in\Omega} Q_j$, $\widetilde{Q}(\Omega) = \sum\limits_{j\in\Omega} \widetilde{Q}_j$, $\Omega = \{i \in \mathbb{J}, |i| > m\}$, $k(\Omega) = \min\limits_{j\in\Omega} |j|$.

Теорема 4. *Пусть оператор* A *такой, что системы проекторов* $\{Q_k\}$ *и* $\{P_k\}$ *совпадают и* $\dim \mathrm{Im}\, P_k = 1$, $P_k x = (x, e_k)e_k$*, а также собственные векторы* e_k, $k \in \mathbb{J}$*, образуют базис в пространстве* $\mathcal{H}$*. Тогда для всех* $|k| > m$ *собственные векторы* $\widetilde{e}_k$, $k \in \mathbb{J}$*, оператора* $A - B$ *имеют ряды Фурье вида* $\widetilde{e}_k = e_k + \sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq k}} \eta_{n,k} e_n$*, причем* $|\eta_{n,k}| < \frac{\mathrm{const}}{|\lambda_n^2 - \lambda_k^2|} W_{n,k}$*, где*

1) если $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$*, то* $\sum\limits_n |W_{n,k}|^2 < \infty$*;*

2) если $B \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$*, то* $\sum\limits_n |W_{n,k}|^2 \alpha^2(n-k) < \infty$*;*

3) если $B \in \mathfrak{S}_{2,f}$*, то* $|W_{n,k}| = \beta_n$*;*

4) если $B \in \mathrm{End}_u \mathcal{H}$*, то* $\sum\limits_n |W_{n,k}| u(n,k) < \infty$*;*

5) если $B \in \mathrm{End}_\alpha \mathcal{H}$*, то* $\sum\limits_n |W_{n,k}| \alpha(n-k) < \infty$*;*

6) если $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \alpha, \beta)$*, то* $|W_{n,k}| < \alpha_n \beta_k$*.*

В качестве примера применения абстрактной теоремы 2 рассмотрим ее применение к оператору Хилла с весовым потенциалом и к оператору с матричным потенциалом.

Пусть $\mathcal{H} = L_2[0,\pi]$ — гильбертово пространство суммируемых с квадратом модуля функций со скалярным произведением $(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x(t)\overline{y(t)}\,dt$. Рассмотрим оператор Хилла L_{bc} на отрезке $I = [0,\pi]$, порожденный дифференциальным выражением

$$(ly)(t) = -y''(t) + v(t)y(t)$$

с комплекснозначным потенциалом $v \in L_2[0,\pi]$. Область определения оператора $D(L_{bc}) \subset W_2^2(I)$ из пространства Соболева

$$W_2^2(I) = \{x : I \to \mathbb{C}, x \ - \ \text{непрерывно дифференцируема}, \\ x' \ - \ \text{абсолютно непрерывна}, x'' \in L_2(I)\},$$

задается краевыми условиями:

(a) периодическими: $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$ (bc=per);

(b) антипериодическими: $y(0) = -y(\pi)$, $y'(0) = -y'(\pi)$ (bc=ap);

(c) Дирихле: $y(0) = y(\pi) = 0$ (bc=dir).

На функцию v накладываются одно из следующих условий:

1) $v(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} v_k e^{i2kt}$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |v_k|^2\alpha^2(k) < \infty$;

2) $v(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} v_k e^{i2kt}$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |v_k|\alpha(k) < \infty$;

3) $v(t) = \sum\limits_{k>0} v_k \cos kt$, $\sum\limits_{k>0} |v_k|^2\alpha^2(k) < \infty$;

4) $v(t) = \sum\limits_{k>0} v_k \cos kt$, $\sum\limits_{k>0} |v_k|\alpha(k) < \infty$.

Напомним, что здесь $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ — субмультипликативный вес.

Следуя работам [19] и [29], рассмотрим замкнутый оператор L_{bc}, порожденный дифференциальным выражением l с областью определения

$$D(L_{bc}) = \{f \in W_2^2(I) : f \quad \text{удовлетворяет краевому условию bc}, \\ \text{где} \quad bc \in \{per, ap, dir\}\}.$$

Если $v = 0$, то соответствующий оператор, который далее будет играть роль невозмущенного оператора, будем обозначать через L_{bc}^0, $bc \in \{per, ap, dir\}$.

Исследованию спектральных свойств оператора L_{bc} посвящено множество работ, соответствующую подробную библиографию можно найти в [29], а также в более поздней работе этих же авторов [30]. Обзор работ по базисности Рисса собственных и присоединенных функций имеется в [31], [32].

Спектральные лакуны оператора L_{bc} с потенциалом 1) изучались П. Джаковым и Б.С. Митягиным в работе [29]. Одним из основных результатов является теорема 41 ([29, с. 128]), которую приведем без доказательства.

Теорема 5. *([29, с. 128]) Пусть $L = L^0 + v$, где $L^0 = L_{per}^0$ или L_{ap}^0 с потенциалом $v(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} v_k e^{2ikt}$. Тогда для $n > n_0(\|v\|)$ оператор L имеет в круге с центром в точке n^2 и радиусом $r = r(\|v\|)$ в точности два (с учетом их алгебраической кратности) периодических (если n четно) или антипериодических (если n нечетно) собственных значения λ_n^+ и λ_n^-. Более того, для любого субмультипликативного веса $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ такого, что $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |v_k|^2\alpha^2(k) < \infty$ следует, что*

$$\sum_{n>n_0(\|v\|)} |\gamma_n|^2\alpha^2(n) < \infty, \quad \text{где} \quad \gamma_n = \lambda_n^+ - \lambda_n^-.$$

Таким образом, в работе [29] доказано, что из суммируемости с квадратом потенциала с субмультипликативным весом α следует суммируемость с квадратом, начиная с некоторого номера $n_0(\|v\|)$, спектральных лакун оператора Хилла с тем же весом α. Следовательно, спектральные лакуны наследуют это свойство потенциала.

Отдельно отметим работу [33], в которой разработана новая модификация метода подобных операторов, предназначенная для исследования оператора L_{bc} и с ее помощью проведено полное исследование спектральных свойств оператора L_{bc}. Результаты работы [33] анонсировались в [34]. В этих работах вопросы анализа матрицы спектральных проекторов и резольвенты не рассматривались.

Спектральные свойства оператора L^0_{bc} легко описываются, а именно ([29]):

(a) $bc = per:\ \lambda_n = (2n)^2$, $n \geqslant 0$, он имеет собственные подпространства $E_n = \mathrm{Span}\,\{e^{\pm 2int}, n \geqslant 0\}$, $\dim E_n = 2$, $E_0 = \{\mathrm{const}\}$, $\dim E_0 = 1$;

(b) $bc = ap:\ \lambda_n = (2n+1)^2$, $n \geqslant 0$, $E_n = \mathrm{Span}\,\{e^{\pm i(2n+1)t}, n \geqslant 0\}$, $\dim E_n = 2$;

(c) $bc = dir:\ \lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathrm{Span}\,\{\sin nx, n \in \mathbb{N}\}$, $\dim E_n = 1$.

Отметим, что для периодических краевых условий (для оператора L^0_{per}) все его собственные значения двукратны за исключением числа $\lambda_0 = 0$. Для антипериодических краевых условий (для оператора L^0_{ap}) все его собственные значения двукратны, а для краевых условий Дирихле (для оператора L^0_{dir}) все собственные значения простые.

В качестве системы проекторов P_n, $n \in \mathbb{J}$, рассмотрим проекторы $P_n = (x, e_n)e_n$, где векторы e_n введены выше и $x \in L_2[0,1]$. Заметим, что $\mathbb{J} = \mathbb{Z}$ для операторов L^0_{per}, L^0_{ap} и $\mathbb{J} = \mathbb{N}$ для L^0_{dir}.

Пусть $\sigma_n = \{\lambda_n\}$, $n \in \mathbb{J}$, тогда $Q_n = P(\sigma_n, L^0_{bc})$. Для любого $x \in L_2[0,1]$ проекторы Q_n определяются следующим образом:

$$Q_n x = (x, e_{-n})e_{-n} + (x, e_n)e_n = P_{-n}x + P_n x, \quad n \in \mathbb{N},\ P_0 x = (x, e_0)e_0,\ bc = per,$$

$$Q_n x = (x, e_{-n-1})e_{-n-1} + (x, e_n)e_n = P_{-n-1}x + P_n x, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad bc = ap,$$

$$Q_n x = P_n x = (x, e_n)e_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad bc = dir.$$

Очевидно, что при $bc = dir$ системы проекторов $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ и $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$ совпадают.

Теорема 6. *Для каждого спектрального проектора $\widetilde{Q}_k$ оператора L_{per} с потенциалом 1) имеет место неравенство (при достаточно больших k)*

$$\sum_p d^2_{\widetilde{Q}_k}\alpha^2(p) < \infty.$$

Более того, если λ_0 из резольвентного множества оператора L, то для $R(\lambda_0, L)$ имеет место оценка

$$\sum_p d^2_{R(\lambda_0,L)}\alpha^2(p) < \infty,$$

где $d^2_X(p) = \sum\limits_{i-j=p} \|X_p\|^2_2$.

Теорема 6 означает, что диагонали матрицы спектральных проекторов исследуемого оператора L_{per} также суммируемы с квадратом с весом α, как и коэффициенты Фурье потенциала v. Это свойство сохраняет и резольвента оператора L_{per}.

Отметим, что кроме упомянутых работ [29] – [34] операторы L_{bc} исследуются также в работах других авторов (см., например, [35] – [37]). В работе [35] приведена асимптотика собственных значений оператора L_{per}, а в [37] рассматривалась асимптотика спектра негладких возмущенных дифференциальных операторов $2m$-ого порядка. Отличие цитируемых работ от настоящей работы заключается в том, что в них не рассматривались весовые потенциалы, а также отсутствуют результаты, касающиеся принадлежности спектральных проекторов специальным операторным пространствам, построенным с учетом вида потенциала. Это, в свою очередь, является основным результатом данной работы. В работе [30] также не ставился вопрос принадлежности спектральных проекторов весовым операторным пространствам, хотя в ней рассматривались весовые пространства функций.

Отметим работы М.С. Бичегкуева [38] – [40], в которых проводится спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах. Однако при исследовании таких операторов использовался совершенно другой метод, основанный на сведении данного оператора к оператору в невесовых пространствах. Более того, в этих работах рассматриваются отличные от введенных выше весовые пространства функций, хотя так же как и в данной работе весовые пространства функций вводятся с использованием коэффициентов Фурье этих функций, что в свою очередь приводит в [38] – [40] к весовым пространствам последовательностей.

Аналогичные теореме 6 результаты содержатся в теоремах 15 – 17 для другого типа потенциала и (или) краевых условий. Приведем еще один пример.

Рассмотрим гильбертово пространство $L_2([0,1],\mathbb{C}^m) = L_2^m[0,1] = \underbrace{L_2[0,1]\times\cdots\times L_2[0,1]}_{m \text{ раз}}$ измеримых на $[0,1]$ со значениями в $\mathbb{C}^m$ и суммируемых с квадратом нормы функций. Скалярное произведение в $L_2^m[0,1]$ определяется формулой

$$(f,g)=\sum_{i=1}^{m}(f_i,g_i),\ f=(f_1,f_2,\dots,f_m)\in L_2^m[0,1],\ g=(g_1,g_2,\dots,g_m)\in L_2^m[0,1],$$

$(f_i,g_i)=\int_0^1 f_i(x)\overline{g_i(x)}\,dx$ — скалярное произведение в пространстве $L_2[0,1]$ комплексных функций, и норма

$$\|f\|^2=\sum_{i=1}^{m}\int_0^1|f_k(x)|^2\,dx$$

порождается этим скалярным произведением.

В пространстве $L_2^m[0,1]$ рассмотрим дифференциальный оператор L_1, порожденный дифференциальным выражением

$$(l_1y)(t)=-y''(t)-V(t)y(t),$$

и краевыми условиями Дирихле

$$y(0)=y(1)=0.$$

Отметим, что оператор L_1 назывался в [31] оператором Штурма-Лиувилля с матричным потенциалом $V=(v_{ij})$, $i,j=1,\dots,m$, и $v_{ij}\in L_2[0,1]$.

Операторы такого класса рассматривались О.А. Велиевым в работе [31] при условии $v_{ij} \in L_1[0,1]$, $i,j = 1,\dots,m$, и была доказана базисность Рисса корневых функций оператора L_1 в случае простых собственных значений матрицы V, а также получены оценки на собственные значения и собственные векторы оператора L_1 (см. [31, теорема 2]). Такой оператор также будем обозначать через L_{dir}.

Пусть $Q_k = P(\sigma_k, L_2)$, где $(L_2y)(t) = -y''(t) : D(L_1) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\sigma_k = \{\lambda_{k,j}, j = 1,2,\dots,m\}$, $k \in \mathbb{N}$.

В рассматриваемом случае системы проекторов $\{Q_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, и $\{P_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, совпадают.

Теорема 7. *Пусть матричный потенциал $V(t) = (v_{ij}(t))$, $i,j = 1,2,\dots,m$, оператора L_{dir} такой, что функции v_{ij} имеют ряды Фурье вида $v_{ij}(t) = \sum\limits_{k>0} v_{ijk}\cos\pi kt$, и $\sum\limits_{k>0} |v_{ijk}|\alpha(k) < \infty$. Тогда существует такое натуральное число n, что при всех $k > n$ для всех спектральных проекторов $\widetilde{P}_k$ оператора L_{dir} имеет место неравенства*

$$\sum_p d_{\widetilde{P}_k}(p)\alpha(p) < \infty,$$

$$\sum_p d_{R(\lambda,L_{dir})}(p)\alpha(p) < \infty.$$

Имеет место оценка равномерной безусловной равносходимости спектральных разложений

$$\|\widetilde{Q}(\Omega) - Q(\Omega)\|_\alpha \leqslant \frac{C}{j(\Omega)},$$

где $Q(\Omega) = \sum\limits_{j\in\Omega} Q_j$, $\widetilde{Q}(\Omega) = \sum\limits_{j\in\Omega} \widetilde{Q}_j$, $\Omega = \{i \in \mathbb{N} : i > m\}$, $j(\Omega) = \min\limits_{j\in\Omega} j$.

Более того, при $m = 1$ (т. е. в случае скалярного потенциала) собственные векторы $\widetilde{e}_j$, $j > n$, оператора L_{dir} представимы в виде

$$\widetilde{e}_j = e_j + \sum_{i\neq j} \frac{w_{ij}}{i^2 - j^2} e_i,$$

и $\sum\limits_{i\neq j} |w_{ij}|\alpha(i-j) < \infty$ для любого $j > n$.

В работе [31] при исследовании оператора с матричным потенциалом также не рассматривались затрагиваемые здесь вопросы. Отметим работы [41], [42], в которых изучались спектральные свойства оператора с матричным потенциалом с квазипериодическими и полупериодическими краевыми условиями тем же методом исследования, что и в данной работе. Но и там не рассматривались вопросы матричного анализа спектральных проекторов.

Заметим, что далее в § 3 в общем виде и в § 5 в примерах приведены общие формулы для выражения спектральных проекторов $\widetilde{Q}_k$ оператора L_{bc} через спектральные проекторы Q_k оператора L_{bc}^0 (следствие 4), вытекающие из подобия оператора L_{bc} оператору, имеющему матрицу блочно-диагонального вида относительно системы проекторов $\{P_k, k \in \mathbb{J}\}$.

Для некоторых классов операторов удается восстановить оценки матричных элементов оператора B, зная оценки коэффициентов Фурье собственных векторов возмущенного оператора.

Теорема 8. *Пусть самосопряженный оператор A из теоремы 2 возмущается некоторым оператором $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и выполнены условия:*

1) $\dim \operatorname{Im} P_k = 1$ *для любого k;*

2) $4\|B\|_2 < \inf\limits_{i \neq j} d_{ij}$, $d_{ij} = \operatorname{dist}_{i \neq j}(\sigma_i, \sigma_j)$*;*

а собственные векторы e_k, $k \in \mathbb{Z}$, невозмущенного оператора A и $\widetilde{e}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, возмущенного оператора $A - B$, $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, связаны равенством

$$\widetilde{e}_k = e_k + \sum_{i \neq k} \eta_{ik} e_i,$$

причем $|\eta_{ik}| \leqslant \operatorname{const} d_{ik} \alpha_i \beta_k$, $d_{ik} = \operatorname{dist}_{i \neq k}(\sigma_i, \sigma_k)$. Тогда имеют место оценки

$$\|B_{ij}\|_2 \leqslant \operatorname{const} \alpha_i \beta_j, \quad i, j \in \mathbb{Z},$$

т. е. $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \alpha, \beta)$.

В настоящей работе также затронут вопрос применения проекционных методов (метода Галеркина) в проблеме собственных значений. Предложена модификация метода Галеркина и показано, что полученный при модификации оператор принадлежит тому же пространству, что и рассматриваемый оператор.

Теорема 9. *Пусть $\widetilde{\lambda}$ — простое изолированное собственное значение оператора L_{dir} с условиями на потенциал 3) (или 4)). Тогда существуют последовательности $\{\mu_{1k}\}$ и $\{\mu_{2k}\}$ собственных значений операторов $A_{1k} = (L_0 - Q_k B Q_k)|\mathcal{H}_{(k)}$, где $Q_k = \sum\limits_{i=1}^{k} P_k$, $\mathcal{H}_{(k)} = \operatorname{Ran} Q_k$, и $A_{2k} = (L_0 - Q_k(B+C)Q_k)|\mathcal{H}_{(k)}$, где элементы C_{ij} матрицы оператора C считаются по формуле*

$$C_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{l \neq k} \frac{B_{il} B_{lj}}{\lambda_i - \lambda_j}, & j > k, \\ \sum\limits_{l > k} \frac{B_{il} B_{lj}}{\lambda_i - \lambda_j}, & j \leqslant k, \end{cases}$$

причем $C \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ (или $C \in \operatorname{End}_\alpha \mathcal{H}$) такие, что, начиная с некоторого k, имеют место оценки

$$|\widetilde{\lambda} - \mu_{1k}| = \mathcal{O}(k^{-1}), \quad |\widetilde{\lambda} - \mu_{2k}| = \mathcal{O}(k^{-2}).$$

Методом исследования возмущенного оператора L_{bc} является метод подобных операторов [2], [3], [43], [44], обычно используемый в спектральном анализе различных дифференциальных операторов.

4. Метод подобных операторов

Пусть $L_A(\mathcal{H})$ — банахово пространство операторов, подчиненных оператору A, т. е. $B \in L_A(\mathcal{H})$, если $D(A) \subset D(B)$ и $\|Bx\| \leqslant \operatorname{const}(\|x\| + \|Ax\|)$ для любого $x \in D(A)$, полагая $\|B\|_A = \inf \operatorname{const}$. Рассматриваемая задача такова, что можно считать $D(A) = D(B)$.

Основная идея метода подобных операторов состоит в следующем. Пусть A — хорошо изученный линейных замкнутый оператор и $B \in L_A(\mathcal{H})$ — оператор-возмущение, в некотором смысле малый по сравнению с A. При выполнении определенных условий оператор $A - B$ может быть подобен оператору $A - B_0$, где оператор B_0 имеет несложную по отношению к A структуру. А именно, оператор $A - B_0$ есть прямая ортогональная сумма ограниченных операторов конечного ранга. Так же как и в [2], [19] будем придерживаться аксиоматического подхода, идеологии и терминологии метода подобных операторов.

Отметим, что разработанный А.Г. Баскаковым метод подобных операторов обычно используется для получения различных спектральных характеристик дифференциальных операторов. Например, в [19] с его помощью изучались спектральные свойства оператора Дирака. В уже цитированной работе [33] была получена асимптотика собственных значений оператора L_{per}. В работе [45] с его помощью получены оценки спектральных проекторов, в [46] проводился спектральный анализ несамосопряженного дифференциального оператора четвертого порядка с негладкими коэффициентами, а в [47] методом подобных операторов получена асимптотика собственных значений некоторых классов дифференциальных операторов.

В последнее время существенно усилился интерес к методу подобных операторов. Кроме уже упомянутых работ, отметим недавно опубликованные работы [48] – [62], в которых этот метод выступает в качестве основного метода исследований.

Заметим, что кроме применения к исследованию различных дифференциальных операторов, метод подобных операторов также адаптировался и для несколько иного класса задач [63] – [65]. Например, в проблеме обусловленности собственных значений или в проблеме Пирси и Шилдса.

В описании метода подобных операторов мы будем придерживаться работы [19].

Определение 7 ([19]). *Пусть $\mathcal{M}$ — линейное многообразие операторов из $L_A(\mathcal{H})$ и $J : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $\Gamma : \mathcal{M} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ — линейные операторы. Тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ назовем допустимой тройкой для невозмущенного оператора A, а $\mathcal{M}$ — пространством допустимых возмущений, если:*

1) $\mathcal{M}$ — банахово пространство со своей нормой, непрерывно вложенное в $L_A(\mathcal{H})$, т. е. $\|X\|_A \leqslant c\|X\|_*$ для любого $X \in \mathcal{M}$, где $\|X\|_*$ — норма X как элемента $\mathcal{M}$;

2) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор;

3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$, причем $A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX$, для каждого $X \in \mathcal{M}$;

4) $X(\Gamma Y)$, $(\Gamma Y)X \in \mathcal{M}$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}$ и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что $\max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma Y)X\|_*\} \leqslant \gamma\|X\|_*\|Y\|_*$, для всех $X, Y \in \mathcal{M}$ и $\|\Gamma\| \leqslant \gamma$;

5) для любого $X \in \mathcal{M}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ такое, что $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_\infty < \varepsilon$.

Зафиксируем теперь допустимую для оператора A тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ и рассмотрим некоторое возмущение $B \in \mathcal{M}$. Будем искать оператор преобразования оператора $A - B$ в оператор $A - JX$ в виде $U = I + \Gamma X$, где X – подлежащий определению оператор из $\mathcal{M}$.

Теорема 10 ([19]). *Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ тройка и $B \in \mathcal{M}$. Тогда если выполнено условие*

$$\|J\|\|B\|_*\|\Gamma\| < \frac{1}{4}, \tag{8}$$

то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX$, где оператор $X \in \mathcal{M}$ является решением нелинейного операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B, \tag{9}$$

которое можно найти методом простых итераций, полагая $X^{(0)} = 0$, $X^{(1)} = B, \dots$.

Иногда трудно построить пространство возмущений, содержащее сразу рассматриваемое возмущение. В таком случае осуществляется построение трансформаторов J и Γ на всем пространстве $L_A(\mathcal{H})$, таким образом, чтобы операторы вида $A - JX$ имели несложную структуру. Затем строится пространство допустимых возмущений $\mathcal{M}$ такое, что оно вместе с сужениями операторов J и Γ на это пространство, далее обозначаемыми теми же символами, образует допустимую тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ для невозущенного оператора A.

В некоторых случаях удобнее найти допустимую тройку другим путем. Пусть $\mathcal{M}$ — нужное пространство допустимых возмущений, но $B \notin \mathcal{M}$, $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$. Тогда сначала определяем трансформаторы $J : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ и $\Gamma : \mathcal{M} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ для операторов из $\mathcal{M}$ и получим допустимую для невозмущенного оператора A тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$. Затем продолжим трансформаторы J и Γ на пространство $L_A(\mathcal{H})$, обозначив продолжения теми же символами, следующим образом. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$, положим

$$JX = J(X(A-\lambda_0 I)^{-1})(A-\lambda_0 I), \quad X \in L_A(\mathcal{H}),$$
$$\Gamma X = \Gamma(X(A-\lambda_0 I)^{-1})(A-\lambda_0 I), \quad X \in L_A(\mathcal{H}).$$

Эти продолжения корректны, т. е. не зависят от выбора числа $\lambda_0 \in \rho(A)$.

В случае, если возмущение B не принадлежит $\mathcal{M}$, то делается предварительное преобразование подобия оператора $A - B$, $B \in L_A(\mathcal{H})$, в оператор $A - \widetilde{B}$, где $\widetilde{B} \in \mathcal{M}$ [19], [66]. Такое преобразование возможно если операторы ΓB, JB, B удовлетворяют условиям:

1) $\Gamma B \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ и $\|\Gamma B\| < 1$;
2) $(\Gamma B)D(A) \subset D(A)$ и $A\Gamma Bx - (\Gamma B)Ax = (B - JB)x$ для любого $x \in D(A)$;
3) $B\Gamma B$, $\Gamma B(JB) \in \mathcal{M}$;
4) для любого $\varepsilon > 0$, существует $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ такое, что $\|B(A-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Теорема 11 ([19], [66])**.** *При выполнении условий 1) – 4) имеет место равенство*

$$(10) \qquad (A - B)(I + \Gamma B) = (I + \Gamma B)\big(A - JB - (I + \Gamma B)^{-1}(B\Gamma B - (\Gamma B)JB)\big).$$

Остановимся еще на одном вопросе. В работе [67] авторы приводят полный исторический и библиографический обзор по операторам преобразования. Метод подобных операторов также использует операторы преобразования. Но метод подобных операторов не сводится только к построению операторов преобразования, он базируется на трех основных взаимосвязанных понятиях: пространстве допустимых возмущений, трансформаторе J и трансформаторе Γ, чего нет в теории операторов преобразования.

5. Построение допустимых троек

Теперь займемся построением различных допустимых троек. Вернемся к представлению оператора $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ операторной матрицей $X \sim (X_{ij})$, $i, j \in \mathbb{Z}$, где проекторы $\{P_j\}$, $j \in \mathbb{Z}$, введены в § 1, чтобы затронуть понятие ряда Фурье оператора (см. [7]).

Рассмотрим периодическое сильно непрерывное изометрическое представление $\mathbb{P} : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ периода 2π, определенное равенством $\mathbb{P}(t)x = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikt}P_k x$.

Каждому оператору $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ поставим в соответствие сильно непрерывную операторную функцию $\Phi_x : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$, определенную формулой $\Phi_x(t) = \mathbb{P}(t)X\mathbb{P}(-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим ее ряд Фурье

$$\Phi_x(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $X_k = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbb{P}(t)X\mathbb{P}(-t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$, $k \in \mathbb{Z}$. Ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} X_k$ называется рядом Фурье оператора $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, а операторы X_k, $k \in \mathbb{Z}$, — его коэффициентами Фурье. В [7] показано, что каждый коэффициент Фурье X_k, $k \in \mathbb{Z}$, представим в виде сильно сходящегося ряда $X_k = \sum\limits_{n-m=k} P_m X P_n$. Таким образом, введенное ранее понятие p-ой диагонали матрицы оператора X совпадает с понятием p-ого коэффициента Фурье этого оператора.

Следует отметить, что идеология оценки элементов матрицы спектральных проекторов с использованием метода подобных операторов и подходящего пространства допустимых возмущений впервые была приведена в [45]. Результаты статьи [68] также получены с использованием этой методики. В настоящей работе исследования ведутся именно в русле исследований статьи [45].

Отметим, что использование в качестве пространства допустимых возмущений $\mathcal{M}$ некоторого пространства операторов из алгебры операторов специального типа в методе подобных операторов было проведено в работах [17] – [26], [45].

В работах [17], [18] рассматривалось пространство $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H},\alpha,\beta)$ в качестве пространства допустимых возмущений, а в работе [69] в качестве невозмущенного оператора выступал нормальный компактный ограниченный оператор со специальными свойствами. Именно такой оператор изначально рассматривался Р. Тернером [67], а в качестве одного из пространств допустимых возмущений — пространство $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H},\alpha,\beta)$ и еще одно из весовых операторных пространств, ассоциированных с $\operatorname{End}\mathcal{H}$. В данной работе это весовое пространство не рассматривается. Отметим также, что в работах [17], [18], [69] не рассматривались вопросы оценок спектральных проекторов и резольвенты.

В работе [45] вводилось другое пространство допустимых возмущений, проводилась оценка спектральных проекторов, коэффициентов Фурье собственных векторов и рассматривалась обратная задача спектрального анализа в пространстве допустимых возмущений. В данной работе это пространство не используется.

Основная схема построения используемых далее допустимых троек состоит в следующем. Во всех рассматриваемых тройках $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ оператор $J : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ определяется формулой

$$JX = \sum_{\substack{|i|>m\\ i\in\mathbb{J}}} Q_i X Q_i + Q_{(m)} X Q_{(m)}, \quad X \in \mathcal{M}, \tag{11}$$

$JX = J_m X$. Конкретный выбор пространства допустимых возмущений гарантирует сходимость этого ряда в сильной операторной топологии. Оператор Γ определяется с помощью задания его операторных блоков. В качестве ΓX_{ln} для X_{ln} возьмем оператор Y_{ln}, удовлетворяющий условию $Q_l Y_{ln} Q_n = Y_{ln}$ и являющийся решением уравнения

$$AY_{ln} - Y_{ln}A = A_l Y_{ln} - Y_{ln}A_n = \lambda_l Y_{ln} - \lambda_n Y_{ln} = Q_l(X - JX)Q_l, \tag{12}$$

где $A_j = AQ_j = \lambda_j Q_j$, $j \in \mathbb{J}$, и $Y_{nn} = 0$ для всех $n \in \mathbb{J}$. При конкретном выборе пространства допустимых возмущений нам придется доказывать ограниченность оператора $\Gamma = \Gamma_m$, восстанавливая его из операторных блоков $\Gamma_m X_{ln}$.

Из определения оператора $J = J_m$ немедленно вытекает, что оператор $A - JX$, где $X \in \mathcal{M}$ является прямой ортогональной суммой операторов конечного ранга $A - JX = \mathcal{A}_{1(m)} \oplus \Big(\bigoplus\limits_{\substack{|i|>m\\ i\in\mathbb{J}}} \mathcal{A}_{1i}\Big)$, где $\mathcal{A}_{1(m)} = (A - Q_{(m)}X)|_{\mathcal{H}_{(m)}}$, $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Ran} Q_{(m)}$, $\mathcal{A}_{1i} = (A - Q_i X)|_{\mathcal{H}_i}$, $\mathcal{H}_i = \operatorname{Ran} Q_i$ относительно представления пространства $\mathcal{H}$ вида $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \Big(\bigoplus\limits_{\substack{|i|>m\\ i\in\mathbb{J}}} \mathcal{H}_i\Big)$.

Доказательство теоремы 1. 1) Рассмотрим сначала случай $\mathcal{M} = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Очевидно, что $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset L_A(\mathcal{H})$ и

$$\|X\|_A \leqslant \|XA^{-1}\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \leqslant \operatorname{const} \|X\|_2.$$

Так как $P_i P_j = 0$ при $i \neq j$, то оператор J_m из (11) является проектором. Из (12) следует оценка $\|\Gamma_m X_{ln}\|_2 \leqslant \frac{\|X_{ln}\|_2}{|\lambda_l - \lambda_n|}$, при $n \neq l$ и ($l > m$ или $n > m$) и $\Gamma_m X_{lm} = 0$ в противном случае. Так как

$$\|\Gamma_m X\|_2^2 = \sum_{l,n} \|\Gamma_m X_{ln}\|_2^2 \leqslant \sum_{l,n} \frac{\|X_{ln}\|_2^2}{(al^2 + \mathcal{O}(l) - an^2 - \mathcal{O}(n))^2} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\substack{l\neq n\\ l>m \text{ или } n>m}} (a(l^2 - n^2) + \mathcal{O}(l) - \mathcal{O}(n))^{-2} \|X\|_2^2 \leqslant \gamma^2 \|X\|_2^2,$$

где

$$\gamma \leqslant C(2m-1)^{-1}, \tag{13}$$

и $C > 0$ — некоторая постоянная. Выполнение остальных условий, относящихся к оператору Γ_m очевидно.

Проверим свойство $(\Gamma_m X)D(A) \subset D(A)$. Пусть $Q_{(n)} = \sum\limits_{i=1}^{n} Q_i$ и рассмотрим оператор $AQ_{(n)}\Gamma_m XA^{-1}$, который принадлежит $\operatorname{End}\mathcal{H}$. Тогда для любого вектора x из $\mathcal{H}$ имеем (с учетом условия 3) определения 7)

$$AQ_{(n)}\Gamma_m XA^{-1}x = Q_{(n)}\Gamma_m Xx + Q_{(n)}(X - J_m X)A^{-1}x,$$

при этом при $n \to \infty$ правая часть равенства сходится к элементу $\Gamma_m Xx + (X - J_m X)A^{-1}x$, последовательность $Q_{(n)}\Gamma_m XA^{-1}x$ тоже сходится к некоторому вектору x_0. Следовательно, последовательность $AQ_{(n)}\Gamma_m XA^{-1}x$ сходится к некоторому элементу $y_0 \in \mathcal{H}$. Так как оператор A замкнут, то $x_0 \in D(A)$ и $Ax_0 = y_0$, где $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Таким образом, свойство доказано.

Проверим выполнение условия 5) определения 7. Так как $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_\infty \leqslant \|X\|_2 \|(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_\infty$ и первый сомножитель конечен, а второй можно сделать сколь угодно малым засчет подходящего выбора точка λ_ε, например, на мнимой оси $\|(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_\infty = \max\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda - \lambda_\varepsilon|^{-1} \to 0$, то условие 5) выполнено.

Итак, построенная тройка $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J_m, \Gamma_m)$ является допустимой для оператора A. Условие (8) теоремы 10 выполняется за счет выбора подходящего числа

m, так как константу γ можно сделать сколь угодно малой. Таким образом, оператор $A-B$, $B\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, подобен оператору являющемуся прямой ортогональной суммой операторов конечного ранга вида $A-J_mX$, $X\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Преобразование подобия осуществляет оператор $U=I+\Gamma_mX$, где $\Gamma_mX\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Эта часть теоремы доказана.

2) Пусть теперь $B\in\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$. Норму в $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ оставим такую же, как и в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Заметим, что $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ — полное пространство. Все приведенные выше доказательства остаются в силе. Кроме того из $X\in\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ следует, что $J_mX\in\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ и $\Gamma_mX\in\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$. Осталось только проверить, что из $X\in\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ и $Y\in\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ следует, что $X(\Gamma_mY)\in\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ и $(\Gamma_mY)X\in\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$. Действительно,

$$\sum_p\|(X\Gamma_mY)_p\|_2^2\alpha^2(p)=\sum_p\left\|\sum_k X_k(\Gamma_mY)_{p-k}\right\|_2^2\alpha^2(p)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_p\left(\sum_k\frac{\|X\|_k\alpha(k)}{\alpha(k)}\frac{\|\Gamma_mY_{p-k}\|_2\alpha(p-k)}{\alpha(p-k)}\right)^2\alpha^2(p)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_p\left(\sum_k\|X_k\|_2\alpha(k)\|\Gamma_mY_{p-k}\|_2\alpha(p-k)\right)^2.$$

Рассмотрим две последовательности: $\beta_k=\|X_k\|\alpha(k)$, $\delta_j=\|\Gamma_mY_{p-k}\|_2\alpha(p-k)$, $(\beta_k)\in l_2$, $(\delta_j)\in l_1$ (за счет того, что $\|\Gamma_mY_{p-k}\|_2\leqslant\frac{\|Y_{p-k}\|_2}{|\alpha(p-k)||2i+p-k|}$), поэтому $\sum\limits_k\beta_k\gamma_{p-k}\in l_2$, т. е. $\sum\limits_p\|(X\Gamma_mY)_p\|_2^2\alpha^2(p)<\infty$. Аналогично рассматривается оператор $(\Gamma_mY)X$.

Следовательно, на каждом итерационном шаге оператор, стоящий в правой части равенства (9), принадлежит $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$, и оператор X принадлежит этому же пространству, как предел последовательности операторов из $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$.

3) Пусть $B\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H},\alpha,\beta)$. Поскольку $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H},\alpha,\beta)\subset L_A(\mathcal{H})$, то

$$\|X\|_A\leqslant\mathrm{const}\,\|X\|_2\leqslant\|X\|_{\alpha\beta}\sqrt{\sum_{i,j}\alpha_i^2\beta_j^2}\leqslant\mathrm{const}\,\|X\|_{\alpha\beta}.$$

Следовательно, условие 1 определения 7 имеет место.

Перейдем теперь к оператору Γ_m и проверим все связанные с ним условия. Сначала вычислим норму оператора Γ_mX. Заметим, что $\Gamma_mX\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H},\alpha,\beta)$ при $X\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H},\alpha,\beta)$. Из следующих неравенств

$$\|\Gamma_mX\|_2^2\leqslant\sum_{\max\{n,l\}>m}\frac{\|X_{nl}\|^2}{(\lambda_n-\lambda_l)^2}\leqslant\|X\|_{\alpha\beta}^2\sum_{\max\{n,l\}>m}\frac{\alpha_n^2\beta_l^2}{(\lambda_n-\lambda_l)^2}\leqslant$$
$$\leqslant\max_{\max\{n,l\}>m}(\lambda_n-\lambda_l)^{-2}\sum_{n,l}\alpha_n^2\beta_l^2\|X\|_{\alpha\beta}^2=\gamma_1^2\|X\|_{\alpha\beta}^2,$$

следует, что $\Gamma_mX\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H},\alpha,\beta)$ и постоянная γ_1 допускает оценку

$$\gamma_1\leqslant C\max_{\max\{n,l\}>m}(\lambda_n-\lambda_l)^{-1}\left(\sum_{l,n}\alpha_n^2\beta_l^2\right)^{\frac12},\quad C>0,$$

и может быть сделана малой за счет надлежащего выбора числа m.

Покажем, что $X(\Gamma_m Y) \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \alpha, \beta)$. Пусть $Z_{ij} = (X\Gamma_m Y)_{ij}$, тогда $Z_{ij} = P_i Z P_j = \sum\limits_k X_{ik}(\Gamma_m Y)_{kj}$. Оценим

$$\|Z_{ij}\| \leqslant \sum_{\substack{j\neq k\\ \max\{k,j\}>m}} \frac{\alpha_i\beta_k\alpha_k\beta_j}{|\lambda_k-\lambda_j|}\|X\|_{\alpha\beta}\|Y\|_{\alpha\beta} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{i\neq k\\ \max\{k,j\}>m}} \frac{\alpha_k\beta_k}{|\lambda_k-\lambda_j|}\|X\|_{\alpha\beta}\|Y\|_{\alpha\beta}\alpha_i\beta_j.$$

Таким образом, $Z \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \alpha, \beta)$ и $\|Z\|_{\alpha\beta} \leqslant \gamma_2\|X\|_{\alpha\beta}\|Y\|_{\alpha\beta}$, где

$$\gamma_2 = \max \sum_{\substack{k\neq j\\ \max\{k,j\}>m}} \frac{\alpha_k\beta_k}{|\lambda_k-\lambda_j|} \leqslant \max_{\max\{k,j\}>m} |\lambda_k-\lambda_l|^{-1}\sum_k \alpha_k\beta_k.$$

Отметим, что $\max\limits_{\max\{k,j\}>m}|\lambda_k-\lambda_l|^{-1}$ имеет порядок m^{-1}, т. е. $\max\limits_{\max\{k,j\}>m}|\lambda_k - \lambda_l|^{-1} = \mathcal{O}(m^{-1})$. Константу γ_2 также можно сделать малой за счет выбора числа m. Аналогично рассматривается случай $(\Gamma_m X)Y$.

Применяя теорему 10 получаем, что оператор $A-B$ подобен оператору $A-J_mX$, где $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \alpha, \beta)$ и $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$.

4) Пусть $\mathcal{M} = \mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H})$. Очевидно, что $\mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H}) \subset L_A(\mathcal{H})$ и

$$\|X\|_A \leqslant \|XA^{-1}\|_\infty = \|f(A)X_rA^{-1}\|_\infty \leqslant \mathrm{const}\|X_r\|_2 \leqslant \mathrm{const}\|X\|_f.$$

Так как $\mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то трансформаторы J_m и Γ_m, построенные в п. 1, также действуют и в $\mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H})$.

Поскольку, если $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то он представим в виде $B = B_l f(A) = f(A)B_r$, где $B_l = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_n}BP_n$; $B_r = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_n}P_nB$, $\beta_n = \beta_n(B)$, B_l, $B_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, причем соответствующие ряды сходятся в силу условия 6) на функцию β_n.

Непосредственно из определения трансформаторов J_m, $\Gamma_m \in \operatorname{End}\mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H})$ следует, что подпространство $\mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H})$ из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ является для них инвариантным, причем

$$J_m(\widetilde{X}f(A)) = (J_m\widetilde{X})f(A), \quad J_m(f(A)\widetilde{X}) = f(A)J_m(\widetilde{X}),$$

$$\Gamma_m(\widetilde{X}f(A)) = (\Gamma_m\widetilde{X})f(A), \quad \Gamma_m(f(A)\widetilde{X}) = f(A)(\Gamma_m\widetilde{X}), \widetilde{X} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}),$$

поэтому для $X \in \mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H})$, $\Gamma_m X \in \mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H})$ и $\|\Gamma_m X\|_2 \leqslant \|\Gamma_m X_l f(A)\|_2 \leqslant \gamma\|X_l\|_2 \leqslant \gamma\|X\|_f$, т. е. $\|\Gamma_m\| \leqslant \gamma$, где γ определено формулой (13) из п. 1.

Пусть $X = X_l f(A)$, $Y = f(A)Y_r$, X_l, $Y_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда

$$Y\Gamma_m X = f(A)\Gamma_m Y_r X_l f(A) = f(A)Z_r = Z_l f(A),$$

где $Z_r = (\Gamma_m Y_r)X_l f(A)$, $Z_l = f(A)\Gamma_m Y_r X_l$, X_l, $Y_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Так как $(\Gamma_m Y_r)X_l f(A) \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то

$$\|Z_r\|_2 = \|(\Gamma_m Y_r)X_l f(A)\|_2 \leqslant \gamma\|Y_r\|_2\|X_l\|_2 = \gamma\|X\|_f\|Y\|_f.$$

Для оператора Z_l справедливы аналогичные оценки. Таким образом, выполнено условие 4) определения 7 с константой γ из формулы (13). Проверка остальных условий определения 7 проводится в п. 1. Осталось применить теорему 10. Итак, оператор $A-B$, $B \in \mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H})$, подобен оператору $A-J_mX$,

$X \in \mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H})$. Преобразование подобия осуществляет оператор $U = I + \Gamma_m X$, где $\Gamma_m X \in \mathfrak{S}_{2,f}(\mathcal{H})$.

5) Пусть теперь $\mathcal{M} = \operatorname{End}_u \mathcal{H}$. Из неравенств

$$\|X\|_A \leqslant \|XA^{-1}\|_\infty \leqslant \|A^{-1}\|_\infty \|X\|_\infty \leqslant \operatorname{const} \|X\|_u,$$

и

$$\|X\|_\infty = \sum_p \sup_{i-j=p} \|X_{ij}\| \leqslant \sum_p \sup_{i-j=p} \|X_{ij}\| u(i,j)$$

следует выполнение п. 1 определения 7. Напомним, что $\operatorname{End}_u \mathcal{H}$ — полное пространство [15].

Оператор J_m определяется формулой (11). Пусть $Y_{ij} = (\Gamma_m X)_{ij}$, тогда

$$\sum_p \sup_{\substack{i-j=p \\ \max\{i,j\}>m}} \big(\|Y_{ij}\| u(i,j)\big) = \frac{1}{a} \sum_p \sup_{\substack{i-j=p \\ \max\{i,j\}>m}} \left(\frac{\|X_{ij}\|}{|\lambda_i - \lambda_j|} u(i,j) \right) \leqslant Cm^{-1} \|X\|_u.$$

Таким образом, оператор $\Gamma_m : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ построен.

Проверим выполнение свойств допустимой тройки, относящихся к нему. Сначала покажем, что из $X \in \operatorname{End}_u \mathcal{H}$ и $Y \in \operatorname{End}_u \mathcal{H}$ следует $XY \in \operatorname{End}_u \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \sum_p \sup_{i-j=p} |(XY)_{ij}| u(i,j) &\leqslant \sum_p \sup_{i-j=p} \left| \sum_k X_{ik} Y_{kj} u(i,k) u(k,j) \right| \leqslant \\ &\leqslant \sum_p \sum_k \sup_i \big(\|X_{ik}\| u(i,k)\big) \sup_i \big(\|Y_{k,i-p}\| u(k,i-p)\big) \leqslant \\ &\leqslant \sum_k \sup_i \big(\|X_{ik}\| u(i,k)\big) \sum_k \sup_p \sup_i \|Y_{k,i-p}\| u(k,i-p) \leqslant \|X\|_u \|Y\|_u. \end{aligned}$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что $X(\Gamma_m Y) \in \operatorname{End}_u \mathcal{H}$, $(\Gamma_m Y)X \in \operatorname{End}_u \mathcal{H}$ и $\|X(\Gamma_m Y)\|_u$, $\|(\Gamma_m Y)X\|_u \leqslant \gamma \|X\|_u \|Y\|_u$, где порядок константы γ определяется величиной $\mathcal{O}(m^{-1})$. При этом γ может быть сделана сколь угодно малой за счет подходящего выбора числа m. Остальные доказательства аналогичны случаю 1). Таким образом, $B \in \operatorname{End}_u \mathcal{H}$.

Случаи $B \in \operatorname{End}_\alpha \mathcal{H}$ и $B \in \operatorname{End} \mathcal{H}$ являются следствиями предыдущего случая при $\alpha(n) = u_0(i-j)$, $i - j = n$ и $u(i,j) \equiv 1$. Теорема доказана.

Перейдем к формулировке и доказательству вытекающих из теоремы 1 следствий.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 1 для спектральных проекторов $\widetilde{Q}_k = P(\widetilde{\sigma}_k, A-B)$ и $\widetilde{Q}_{(m)} = P(\widetilde{\Delta}_m, A-B)$ имеют место представления*

$$\begin{aligned} &\widetilde{Q}_k = Q_k U^{-1} + \Gamma_m X Q_k U^{-1}; \\ &\widetilde{Q}_{(m)} = Q_{(m)} U^{-1} + \Gamma_m X Q_{(m)} U^{-1}; \\ &\widetilde{Q}_k - Q_k = (\Gamma_m X Q_k - Q_k \Gamma_m X) U^{-1}; \\ &\widetilde{Q}_{(m)} - Q_{(m)} = (\Gamma_m X Q_{(m)} - Q_{(m)} \Gamma_m X) U^{-1}, \end{aligned} \tag{14}$$

где $U = I + \Gamma_m X$, $U^{-1} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\Gamma_m X)^i$, причем какому из пространств допустимых возмущений принадлежит оператор B, тому же пространству принадлежит и оператор $\widetilde{Q}_k - Q_k$. Кроме того, при $n \neq k$ оператор $Q_n \widetilde{Q}_k =$

$Q_n\Gamma_m XQ_kU^{-1} = Q_n\Gamma_m XQ_k + Q_n\Gamma_m XQ_k \sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^i(\Gamma_m X)^i$ *принадлежит соответствующему пространству допустимых возмущений, и*

$$\|Q_n\widetilde{Q}_k\|_{\mathcal{M}} \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|\lambda_n - \lambda_k|}, \quad Q_n\widetilde{Q}_k \in \mathcal{M}, \quad n \neq k; \tag{15}$$

при $n = k$, $Q_k\widetilde{Q}_k = Q_kU^{-1}$.

Доказательство. Все равенства вытекают из подобия операторов $A-B$ и $A-J_mX$ с оператором преобразования $U = I + \Gamma_m X$ и представления для $U^{-1} = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(-1)^i(\Gamma_m X)^i$. Следствие доказано. □

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы 1 для собственных и присоединенных векторов* $\widetilde{e}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, *возмущенного оператора* $A - B$ *имеют место представления*

$$\widetilde{e}_k = W_k + \sum_{n \geqslant m+1} V_{n,k}, \text{ при } \lambda_k \in \Delta_m,$$

$$\widetilde{e}_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{n,k}, \quad \lambda_k \notin \Delta_m, \tag{16}$$

где $V_{n,k} \in \operatorname{Im} Q_k$, $W_k \in \operatorname{Im} Q_{(m)}$ *и* $\|V_{n,k}\|_{\mathcal{M}} \leqslant \mathrm{const}\,\frac{\|X_{n,k}\|_{\mathcal{M}}}{|\lambda_n-\lambda_k|}$.

Доказательство. Сначала установим равенство $\operatorname{Im}\widetilde{Q}_k = \operatorname{Im}\widetilde{Q}_kQ_k$ для всех $k > m$. Поскольку

$$\widetilde{Q}_kQ_k = \widetilde{Q}_k(I + \Gamma_m X)^{-1}\widetilde{Q}_k(I + \Gamma_m X) = \widetilde{Q}_k + R_k,$$

где норма оператора R_k может быть сделана сколь угодно малой при достаточно больших m, то операторы $\widetilde{Q}_kQ_k$ и Q_k подобны и $\dim\operatorname{Im}\widetilde{Q}_kQ_k = \dim\operatorname{Im}\widetilde{Q}_k$. Так как размерность $\operatorname{Im}\widetilde{Q}_k$ конечна и $\operatorname{Im}\widetilde{Q}_kQ_k \subset \operatorname{Im}\widetilde{Q}_k$, $k > m$, доказываемое равенство верно.

Следовательно, любой собственный вектор $\widetilde{e}_j^{(i)}$ оператора $A-B$, отвечающий собственному значению $\widetilde{\lambda}_j$, $\widetilde{\lambda}_j \in \widetilde{\sigma}_j$, $j > m$, допускает представление вида

$$\widetilde{e}_j^{(i)} = \widetilde{Q}_j\widetilde{e}_j^{(i)} = \widetilde{Q}_jQ_jy_j, \quad y_j \in \mathcal{H}.$$

В свою очередь, вектор Q_jy_j представим в виде $\sum\limits_l \beta_{j,l}e_j^{(l)}$, где суммирование ведется по всем l, таким что векторы $e_j^{(l)}$ являются собственными векторами, отвечающими собственному значению λ_j. Значит,

$$\widetilde{e}_j^{(i)} = \sum_l \beta_{j,l}\widetilde{Q}_je_j^{(i)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} Q_n \sum_l \beta_{j,l}\widetilde{Q}_je_j^{(i)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} V_{n,j}, \tag{17}$$

где $V_{n,j} = \sum\limits_l \beta_{j,l}Q_n\widetilde{Q}_je_j^{(l)} = Q_n\widetilde{Q}_j\sum\limits_l \beta_{j,l}e_j^{(l)}$, $V_{n,j} \in \operatorname{Im} Q_n$, и по следствию 1, имеем $\|Q_n\widetilde{Q}_j\|_{\mathcal{M}} \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|\lambda_n-\lambda_j|}$.

В силу следствия 1 операторы $Q_n\widetilde{Q}_j \in \mathcal{M}$, поэтому для доказательства осталось показать, что $|\beta_{j,l}| < \mathrm{const}$ для всех j, l. В силу следствия 1 операторы

Q_j и $\widetilde{Q}_j$ отличаются на оператор $D_j(m)$, норма которого достаточно мала при больших m. Следовательно, из (14) имеем

$$\widetilde{Q}_j e_j^{(l)} = Q_j e_j^{(l)} + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i Q_j(\Gamma_m X)^i e_j^{(l)} + \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \Gamma_m X Q_j(\Gamma_m X)^i e_j^{(l)} =$$
$$= e_j^{(l)} + D_j(m)e_j^{(l)},$$

тогда

$$\widetilde{e}_j^{(i)} = \sum_l \beta_{j,l}(e_j^{(l)} + D_j(m)e_j^{(l)}).$$

Умножим скалярно обе части последнего равенства на вектор $e_j^{(l)}$ и получим систему уравнений относительно $\beta_{j,l}$:

$$\beta_{j,l} + \sum_l \beta_{j,l}(D_j(m)e_j^{(l)}, e_j^{(l)}) = (\widetilde{e}_j^{(l)}, e_j^{(l)}).$$

В матрице этой системы диагональные элементы преобладают по модулю, поэтому система разрешима относительно $\beta_{j,l}$ и ее решение ограничено.

Оценим теперь векторы $V_{n,j}$ по норме

$$\|V_{n,j}\| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|\lambda_n - \lambda_l|}\|Q_n X Q_j\|_{\mathcal{M}}.$$

Следствие 2 доказано. □

Следствие 3. *Пусть* $\lambda_0 \in \rho(A-B)$, *тогда* $R(\lambda_0, A-B) = (A - B - \lambda_0)^{-1}$ *принадлежит тому же операторному пространству, что и оператор* B.

Доказательство. Так как

$$(A - B - \lambda_0 I)^{-1} = (I + \Gamma_m X)(A - J_m X - \lambda_0 I)^{-1}(I + \Gamma_m X)^{-1},$$

и оператор $A - J_m X - \lambda_0 I$ блочно-диагональный, а $X \in \mathcal{M}$, $\Gamma_m X \in \mathcal{M}$,

$$(I + \Gamma_m X)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(\Gamma_m X)^j,$$

то имеет место утверждение следствия. □

Доказательство теоремы 2. Теорема 2 немедленно вытекает из следствий теоремы 1. Выполнение же условий 4) и 5) теоремы 2 следует из того, что

$$\|P_i(\widetilde{Q}_k - Q_k)P_j\|_2 \leqslant \|(P_i\Gamma_m X P_k)(P_k U^{-1} P_j)\|_2 \leqslant \|P_k U^{-1} P_j\|_\infty \|P_i \Gamma_m X P_k\|_2$$

и оценок норм элементов $P_i\Gamma_m X P_k$ операторной матрицы оператора $\Gamma_m X$ в соответствующем пространстве допустимых возмущений. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. В условиях теоремы 1 для спектральных проекторов $Q(\Omega)$ и $\widetilde{Q}(\Omega)$ имеет место равенство

$$\widetilde{Q}(\Omega) - Q(\Omega) = (\Gamma_m X Q(\Omega) - Q(\Omega)\Gamma_m X)(I + \Gamma_m X)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\|\widetilde{Q}(\Omega) - Q(\Omega)\|_{\mathcal{M}_1} \leqslant C(\|\Gamma_m X Q(\Omega)\|_{\mathcal{M}_1} - \|Q(\Omega)\Gamma_m X\|_{\mathcal{M}_1}),$$

где $C = \|(I - \Gamma_m X)^{-1}\|_\infty$. Для каждого из слагаемых последнего неравенства, с учетом оценок теоремы 1 на нормы матричных элементов оператора $\Gamma_m X$ и вытекает доказываемое равенство. Теорема доказана.

Доказательства теоремы 4. Рассмотрим случай 2) (остальные рассматриваются аналогично). В формуле (17) полагаем $l = 1$, получаем

$$\widetilde{e}_j = \sum_{n \neq l} P_n \widetilde{P}_j e_j = \sum_{n \neq l} P_n \Gamma X P_k U^{-1} e_j,$$

здесь

$$P_n \Gamma_m X P_k = \begin{cases} \frac{X_{nk}}{\lambda_n - \lambda_k}, & \max\{|n|, |k|\} > m, \quad \lambda_k \neq \lambda_n, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и матрица $P_k U^{-1}$ имеет ненулевую только k-ую строку, $P_n \Gamma_m X P_k U^{-1} e_j$ — это есть j-тый столбец матрицы оператора $P_n \Gamma_m X P_k U^{-1} \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$, следовательно, $\sum\limits_{n \neq k} \frac{(X_{nj})^2}{(\lambda_n - \lambda_k)^2} \alpha^2(n-j) < \infty$.

Утверждения теоремы 4 вытекают из принадлежности оператора X соответствующему пространству допустимых возмущений. Теорема доказана.

6. К одной обратной задаче спектрального анализа

Пусть теперь известны некоторые оценки коэффициентов Фурье возмущенного оператора $A - B$, где оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ такой же, как и в теореме 2 и известно, что $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Докажем приведенную во введении теорему 8, позволяющую в этом частном случае отнести возмущение к пространству $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \alpha, \beta)$.

Доказательство теоремы 8. В качестве пространства допустимых возмущений возьмем $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Проектор $J : \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \to \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ определим формулой

$$JX = \sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i X P_i,$$

т. е. $J = J_0$, а оператор $\Gamma = \Gamma_0 : \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \to \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ определим также как и в теореме 2. Выполнение условия 2 теоремы 8 обеспечивает подобие оператора $A - B$ оператору $A - JX$, где $A - JX$ — оператор диагонального вида. Отметим, что в рассматриваемом случае операторы X_{ij} одномерны и матрица оператора ΓX имеет вид

$$(\Gamma X)_{ij} = \begin{cases} \frac{X_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, & \text{при} \quad i \neq j, \\ 0, & \text{при} \quad i = j. \end{cases}$$

Собственные векторы e_k, $k \in \mathbb{Z}$, оператора A и собственные векторы $\widetilde{e}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, оператора $A - B$ в силу подобия операторов $A - B$ и диагонального оператора $A - JX$ связаны равенствами

$$\widetilde{e}_k = e_k + \Gamma X e_k = e_k + \sum_{i \neq k} (\Gamma X)_{ik} e_i = e_k + \sum_{i \neq k} \frac{X_{ik}}{\lambda_i - \lambda_k} e_i.$$

Так как собственные векторы e_i, $i \in \mathbb{Z}$, оператора A (или оператора $A - JX$) образуют базис и разложение любого вектора по базису единственно, а по условию теоремы 8 это разложение имеет вид $\widetilde{e}_k = e_k + \sum\limits_{i \neq k} \eta_{ik} e_i$ и $|\eta_{ik}| \leqslant \operatorname{const} d_{ik} \alpha_i \beta_k$, то

$$\frac{|X_{ik}|}{|\lambda_i - \lambda_k|} \leqslant \operatorname{const} d_{ik} \alpha_i \beta_k, \quad i, k \in \mathbb{Z}, \quad i \neq k,$$

откуда $|X_{ik}| \leqslant \operatorname{const} \alpha_i \beta_k$, кроме $i = k$. Таким образом, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \alpha, \beta)$.

Вернемся к нелинейному уравнению (9). Напомним, что в силу определения операторов J и Γ имеют место равенства $J(\Gamma X) = 0$, $J(\Gamma X)(JY) = 0$, $X, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Поэтому

$$JX = J(B\Gamma X) + JB$$

и, подставив в (9) вместо JB его выражение, получим

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)JX + B,$$

$$X = B(I + \Gamma X) - (\Gamma X)JX,$$

$$B = (X + (\Gamma X)JX)(I + \Gamma X)^{-1}.$$

Операторы, стоящие в правой части равенства принадлежат $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \alpha, \beta)$. Поэтому $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}, \alpha, \beta)$.

7. Исследование оператора Хилла

Вернемся теперь к рассмотрению оператора Хилла L_{per} с условиями на потенциал 1). Отметим, что без ограничения общности можно считать, что у потенциала v число $v_0 = \int_0^\pi v(t)\,\mathrm{d}t$ равно нулю. Если это не так, то оператор $A-B$, где $(Ay)(t) = -\dfrac{d^2y}{dt^2}$, $(By)(t) = -v(t)y(t)$, представим в виде $A-B = \widetilde{A}-\widetilde{B}$, где $(\widetilde{A}y)(t) = -\dfrac{d^2y}{dt^2} - v_0y(t)$, $(\widetilde{B}y)(t) = -(v(t) - v_0)y(t)$. Тогда для потенциала $v(t) - v_0$ новый коэффициент $\widetilde{v}_0 = 0$, а собственные векторы и спектральные проекторы для операторов A и $\widetilde{A}$ одинаковы, собственными значениями оператора $\widetilde{A}$ являются числа $\lambda_n - v_0$. Следовательно, это никак не влияет на дальнейшее изложение. Итак, далее полагается, что $v_0 = 0$. Пусть проекторы P_n одномерны и $P_nx = (x, e_n)e_n$, $n \in \mathbb{J}$. Очевидно, что матрица оператора-возмущения B имеет вид $B = (b_{ln})$, где $b_{lm} = v_{l-m}$. Так как $\dim \operatorname{Im} P_k = 1$ для любого k, то

$$P_iBP_jx = (Be_j, e_i)(x, e_j)e_i = b_{ij}(x, e_j)e_i = v_{i-j}(x, e_j)e_i,$$

где v_{i-j} — $i-j$-ый коэффициент в разложении Фурье функции v по собственным векторам невозмущенного оператора. У матрицы элементы, стоящие на диагоналях, параллельных главной диагонали, одинаковы и главная диагональ нулевая, так как $v_0 = 0$. Условие 1) на потенциал v означает, что матрица оператора B обладает свойством $\sum\limits_{p\in\mathbb{Z}} |B_p|^2\alpha^2(p) < \infty$, где B_p — p-ая диагональ операторной матрицы оператора B относительно введенной системы проекторов $\{P_n\}$, $n \in \mathbb{J}$. Условие 1) на функцию v не гарантирует принадлежность возмущения B пространству $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ или $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$. Поэтому сначала надо произвести предварительное преобразование подобия так, чтобы полученное возмущение попало в $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ и далее применять теорему 2 и следствия из нее.

Построим допустимую тройку для предварительного преобразования подобия оператора $A - B$ в оператор $A - \widetilde{B}$, где $\widetilde{B} \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$. Оператор J_0X, $X \in L_A(\mathcal{H})$, определим формулой $J_0X = \sum\limits_{n\geqslant 0} Q_nXQ_n$, где $Q_n = P(\sigma_n, A)$, поэтому он будет иметь матрицу вида

$$(J_0X)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & \text{при} \quad |i| = |j|, \\ 0, & \text{при} \quad |i| \neq |j|. \end{cases}$$

Очевидно, что у числовой матрицы оператора J_0B ненулевая только побочная диагональ (при $i=-j$). Посчитаем: $\|J_0B\|_2^2 \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |b_{2n}|^2 < \infty$ и $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |b_{2n}|^2\alpha^2(2n) < \infty$, т. е. $J_0B \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ (и $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$).

Отметим, что Q_n, $n \neq 0$, в данном случае имеет вид $Q_nx = (x,e_n)e_n + (x,e_{-n})e_{-n} = P_nx + P_{-n}x$, $Q_0x = (x,e_0)e_0$, $Q_0x = P_0x$.

Из вида оператора J_0 следует, что J_0 — проектор и $\|J_0\| \leqslant 1$, так как $\|J_0X\| = \|X\|$ для такого оператора $X \in L_A(\mathcal{H})$, что $P_iXP_i = X$ для любого $i \in \mathbb{J}$.

Перейдем теперь к оператору Γ_0B. Зададим матрицу оператора Γ_0B формулой

$$(\Gamma_0B)_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad |i|=|j|, \\ \frac{b_{ij}}{\lambda_i-\lambda_j}, & \text{при} \quad |i|\neq|j|. \end{cases}$$

Покажем, что $\Gamma_0B \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$. Действительно,

$$\sum_p \sum_{i-j=p} \frac{|b_{ij}|^2}{|\lambda_i-\lambda_j|^2}\alpha^2(p) = \frac{1}{4}\sum_p \frac{|v_p|^2\alpha^2(p)}{p^2}\sum_i \frac{1}{(2i-p)^2}.$$

Напомним, что у оператора L_{per} собственные значения $\lambda_n = (2n)^2$, $n \geqslant 0$, т. е. $a=4$, а величина $\mathcal{O}(n)$ отсутствует. Следовательно, $\Gamma_0B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\Gamma_0B \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$. Рассмотрим теперь оператор $B(\Gamma_0B)$. Справедливы следующие неравенства

$$\sum_p \|(B(\Gamma_0B))_p\|_2^2\alpha^2(p) \leqslant \sum_p \left\|\sum_k B_k(\Gamma_0B)_{p-k}\right\|_2^2 \alpha^2(p) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_p\left(\sum_k \|B_k\|_\infty \|(\Gamma_0B)_{p-k}\|_2 \frac{\alpha(k)\alpha(p-k)}{\alpha(k)\alpha(p-k)}\right)^2\alpha^2(p) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_p\left(\sum_k \|B_k\|_\infty\alpha(k)\|(\Gamma_0B)_{p-k}\|_2\alpha(p-k)\right)^2.$$

Рассмотрим две последовательности: $\varepsilon_k = \|B_k\|_\infty\alpha(k)$ и $\delta_k = \|\Gamma_0B_k\|_2\alpha(k)$. Так как $\|B_k\|_\infty = \sup\limits_{i-j=k}|b_{ij}| = |v_k|$, то $(\varepsilon_l) \in l_2$. Из оценок

$$\|\Gamma_0B_{p-k}\|_2 = \sqrt{\sum_l \frac{|B_{p+l,k+l}|^2}{(p-k)^2(p+k+2l)^2}} \leqslant \frac{|B_{p-k}|}{|p-k|}\sqrt{\sum_l\frac{1}{(p+k+2l)^2}},$$

получаем, что

$$|\delta_{p-k}| \leqslant \frac{|B_{p-k}|\alpha(p-k)}{|p-k|}\sqrt{\sum_l \frac{1}{(p+k+2l)^2}},$$

и поэтому $(\delta_l) \in l_1$, тогда их свертка $\kappa_p = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\varepsilon_k\delta_{p-k}$, $p\in\mathbb{Z}$, есть элемент l_2, т. е. $\sum\limits_p \kappa_p^2 < \infty$. Следовательно, $B\Gamma_0B \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$.

Таким образом, справедлива

Лемма 1. *Операторы J_0B, Γ_0B, $(\Gamma_0B)J_0B$ и $B\Gamma_0B$ принадлежат пространству $\mathcal{M} = \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$.*

Лемма 2. *Если $\|\Gamma_0B\| < 1$, то оператор $J_0B + (I+\Gamma_0B)^{-1}(B\Gamma_0B - (\Gamma_0B)J_0B)$ принадлежит $\mathcal{M} = \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$.*

Доказательство. Так как оператор $I+\Gamma_0 B$ обратим при условии $\|\Gamma_0 B\| < 1$ и оператор $(I+\Gamma_0 B)^{-1}$ допускает представление вида

$$(I+\Gamma_0 B)^{-1} = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k(\Gamma_0 B)^k = I + \sum_{k\geqslant 1}(-1)^k(\Gamma_0 B),$$

то

$$(I+\Gamma_0 B)^{-1}(B\Gamma_0 B - (\Gamma_0 B)J_0 B) = \\ = B\Gamma_0 B - (\Gamma_0 B)J_0 B + \sum_{k\geqslant 1}(\Gamma_0 B)^k(B\Gamma_0 B - (\Gamma_0 B)J_0 B).$$

В связи с тем, что каждый из операторов, входящих в формулу, есть элемент $\mathcal{M}$, то и их сумма также элемент $\mathcal{M}$. Лемма доказана. □

Наряду с операторами J_0 и Γ_0 рассмотрим семейства операторов J_n и Γ_n, определенных в § 3 с помощью (11) и (12). Очевидно, что

(18)

$$J_n B = J_0 B - J_0(Q_{(n)}BQ_{(n)}) + Q_{(n)}BQ_{(n)} = J_0 B - Q_{(n)}J_0 BQ_{(n)} + Q_{(n)}BQ_{(n)}, \\ \Gamma_n B = \Gamma_0 B - \Gamma_0(Q_{(n)}BQ_{(n)}) = \Gamma_0 B - Q_{(n)}\Gamma_0 BQ_{(n)}.$$

Заметим, что в отличии от оператора J_0, оператор $J_n B$ производит блочную диагонализацию матрицы оператора B, вырезая из нее «главный» блок размера $2n+1$ и обе диагонали, главную и побочную. Здесь также учтены равенства

$$J_0(P_l X P_l) = P_l J_0 X P_l, \quad \Gamma_0(P_l X P_k) = P_l(\Gamma_0 X)P_k,$$

для всех l, k. Непосредственно из формул (18) следует, что $J_n B \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ и $\Gamma_n B \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ для всех $n \geqslant 0$. Кроме того, из (18) следует

$$\lim_{n\to\infty}\|\Gamma_n B\|_2^2 = \lim_{n\to\infty}\|\Gamma_0 B - \Gamma_0 Q_{(n)}BQ_{(n)}\|_2^2 = 0. \tag{19}$$

Лемма 3. *Существует такое $n_0 \geqslant 0$, что операторы B, $J_n B$, $\Gamma_n B$, $n \geqslant n_0$, удовлетворяют условиям теоремы 11 с $\mathcal{M} = \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$.*

Доказательство. Из леммы 1 и формулы (18) следует, что $J_n B, \Gamma_n B \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ для всех $n \geqslant 0$. Формула (19) позволяет выбрать такое $n \geqslant n_0$, чтобы $\|\Gamma_n B\| < 1$. Следовательно, условия 1) и 3) выполнены.

Проверим выполнение условия 4). Для этого оператор $B(A-\lambda_\varepsilon I)^{-1}$ представим в виде $D = BA^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}(A-\lambda_\varepsilon I)^{-1}$. Здесь оператор $A^{\frac{1}{2}}$ на собственных векторах оператора A определяется равенством $A^{\frac{1}{2}}e_k = \lambda_k^{\frac{1}{2}}e_k$ для всех k. Тогда

$$\|D\| = \|BA^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}(A-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\| \leqslant \|BA^{-\frac{1}{2}}\|_\infty \cdot \|A^{\frac{1}{2}}(A-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_\infty \leqslant \\ \leqslant \mathrm{const}\,\|A^{\frac{1}{2}}(A-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_\infty.$$

Последний множитель можно сделать сколь угодно малым за счет подходящего выбора числа λ_ε.

Пусть теперь $x \in D(A)$. Проверим выполнение условия 2) на собственных векторах e_j, $j \in \mathbb{Z}$, оператора A. Напомним, что через b_{ij} обозначены элементы числовой матрицы оператора B в базисе из собственных векторов оператора A. Заметим, что вектор $\Gamma_n Be_j$ представим в виде $\sum\limits_{i\in\Omega}\frac{b_{ij}}{\lambda_i-\lambda_j}e_i$, поэтому

$$A\Gamma_n Be_j = \sum_{i\in\Omega}\frac{b_{ij}\lambda_i}{\lambda_i-\lambda_j}e_i, \quad \Gamma_n BAe_j = \sum_{i\in\Omega}\frac{b_{ij}\lambda_j e_i}{\lambda_i-\lambda_j},$$

$$(B - J_n B)e_j = \sum_{i \in \Omega} b_{ij} e_i,$$

где $\Omega = \{i, j : |i| \neq |j|, \max\{|i|, |j|\} > n\}$. Поэтому очевидно, что равенство $A\Gamma_n B - \Gamma_n BA = B - J_n B$ имеет место на собственных векторах оператора A. Отсюда следует, что $A\Gamma_n B = \Gamma_n BA + (B - J_n B)$. Рассмотрим оператор $Q_{(k)} A\Gamma_n B(A - \lambda_0 I)^{-1}$, где $\lambda_0 \in \rho(A)$. Очевидно, что

$$Q_{(k)} A\Gamma_n B(A - \lambda_0 I)^{-1} = AQ_{(k)}\Gamma_n B(A - \lambda_0 I)^{-1} = \\ = Q_{(k)}\Gamma_n BA(A - \lambda_0 I)^{-1} + Q_{(k)}(B - J_n B)(A - \lambda_0 I)^{-1}.$$

Тогда для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ справедливо представление $(A - \lambda_0 I)^{-1}x = y \in D(A)$ и равенства

$$AQ_{(k)}\Gamma_n B(A - \lambda_0 I)^{-1}x = Q_{(k)}\Gamma_n BA(A - \lambda_0 I)^{-1}x + \\ + Q_{(k)}(B - J_n B)(A - \lambda_0 I)^{-1}x = Q_{(k)}(B - J_n B)y + Q_{(k)}\Gamma_n BAy.$$

Так как последовательность $Q_{(k)}(B - JB)y \to (B - JB)y$ и $Q_{(k)}\Gamma_n BAy \to \Gamma_n BAy$, то и последовательность $AQ_{(k)}\Gamma_n By$ сходится к некоторому вектору $z \in \mathcal{H}$. Пусть $z_k = AQ_{(k)}\Gamma_n By$, $k \geqslant 1$. Так как последовательность $Q_{(k)}\Gamma_n By$, $k \geqslant 1$, сходится к вектору $w_0 = \Gamma_n By$ и оператор A замкнут, то $z_0 \in D(A)$ и $Aw_0 = z_0$, где $z_0 = \lim\limits_{k\to\infty} z_k$. Таким образом, $(\Gamma_n B)D(A) \subset D(A)$. Лемма доказана. $\square$

Из лемм 1 – 3 и теоремы 1 следует

Теорема 12. *Если число n таково, что $\|\Gamma_n B\| < 1$, то оператор L_{per} с условием на потенциал вида 1) подобен оператору*

$$L^0_{per} - \widetilde{B}, \tag{20}$$

где $\widetilde{B} \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$, $\widetilde{B} = J_n B + (I + \Gamma_n B)^{-1}(B\Gamma_n B - (\Gamma_n B)J_n B)$, операторы $J_n B$, $\Gamma_n B \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ определены равенствами (18) и оператором преобразования оператора L_{per} в оператор (20) служит оператор $I + \Gamma_n B$.

Полученный выше результат позволяет свести изучение оператора L_{per} к изучению оператора $A - \widetilde{B}$, где $\widetilde{B}$ есть оператор из весового пространства операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$. Поэтому для него применима теорема 2.

Пусть $U = (I + \Gamma_n B)(I + \Gamma_m X) = I + U_{nm}$, где $U_{nm} = \Gamma_n B + \Gamma_m X + (\Gamma_n B)(\Gamma_m X)$, $U_{nm} \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$.

Теорема 13. *Пусть число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\|\Gamma_n B\| < 1$. Тогда существует такое натуральное число $m \geqslant n$, что оператор L_{per} есть квазиортогональная (U-ортогональная) прямая сумма ограниченных операторов*

$$L_{per} = U(L^0_{per} - Q_{(m)}X)|_{\mathcal{H}_{(m)}}U^{-1} \oplus \Big(\bigoplus_{j>m} U(L^0_{per} - Q_j X)|_{\mathcal{H}_j}U^{-1}\Big),$$

относительно квазиортогонального разложения пространства $\mathcal{H} = L_2[0,1]$ вида

$$\mathcal{H} = U\mathcal{H}_{(m)} \oplus \Big(\bigoplus_{j>m} U\mathcal{H}_j\Big).$$

Причем это разложение является разложением Рисса. Оператор $X \in \mathcal{M} = \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного операторного уравнения (9), рассматриваемого в пространстве $\mathcal{M} = \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ с трансформаторами J_m и Γ_m, определяемыми формулами (18). Имеет место равенство

$$(L^0_{per} - B)U = U(L^0_{per} - Q_{(m)}XQ_{(m)} - \sum_{j>m} Q_jXQ_j), \tag{21}$$

Следствие 1. *Для спектральных проекторов $\widetilde{Q}_k = P(\widetilde{\sigma}_k, A - B)$ и $\widetilde{Q}_{(m)} = P(\widetilde{\Delta}_m, A - B)$ имеют место формулы (14), (15).*

Из теоремы 13 следует также утверждение теоремы 6.

Перейдем к антипериодическим краевым условиям. Напомним, что в этом случае собственными векторами являются $e_n = e^{i(2n+1)t}$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Однако заметим, что числовая матрица оператора-возмущения B в базисе из собственных векторов оператора L_{per} и оператора L_{ap} отличаются только строкой и столбцом, отвечающим собственному вектору $e_0 = \mathrm{const}$ оператора L_{per} так как

$$Be_j = \int_0^\pi v(t)e^{i2jt}e^{it}e^{-i2lt}e^{-it}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi v(t)e^{i2jt}e^{-i2lt}\,\mathrm{d}t.$$

Все остальные рассуждения остаются в силе и величина $\max\limits_{\max\{i,j\}>m} |\lambda_i - \lambda_j|$ также имеет порядок $\mathcal{O}(m^{-1})$.

Таким образом, верна

Теорема 14. *Результаты теоремы 13 имеют место и для оператора Хилла L_{ap} с условиями на потенциал 2).*

Рассмотрим теперь оператор Хилла L_{dir} с потенциалом v таким, что выполнено 3). В рассматриваемом случае $P_nx = Q_nx = (x, e_n)e_n$. Непосредственный подсчет показывает, что матрица оператора - возмущения B в базисе $\{e_n\}$ имеет вид $B = (b_{ij})$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} v_{i-j} + v_{i+j}, & i \geqslant j, \\ v_{j-i} + v_{i+j}, & i < j. \end{cases} \tag{22}$$

Так как коэффициенты v_n потенциала v убывают, то

$$|b_{ij}| \leqslant \begin{cases} 2|v_{|i-j|}|, & i \neq j, \\ |v_{2i}|, & i = j. \end{cases} \tag{23}$$

Поэтому

$$\|(J_0B)_{ij}\| \leqslant \begin{cases} |v_{2i}|, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Оператор J_0B принадлежит пространству $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ так как

$$\sum_p \sum_{i-j=p} \|(J_0B)_{ij}\|^2\alpha^2(p) < \infty.$$

Здесь учтено, что $\alpha(0) = 1$. Принадлежность оператора Γ_0B пространству $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ и все остальные рассуждения проводятся аналогично предыдущему. Поэтому имеет место

Теорема 15. *Пусть число $n \in \mathbb{Z}_+$ таково, что $\|\Gamma_n B\| < 1$. Тогда существует такое натуральное число m, что оператор Хилла L_{dir} с условием на потенциал 3) есть U-ортогональная прямая сумма ограниченных операторов вида*

$$L_{dir} = U((L^0_{dir} - Q_{(m)}X)|_{\mathcal{H}_{(m)}})U^{-1} \oplus \Big(\bigoplus_{j>m} U((L^0_{dir} - Q_j X)|_{\mathcal{H}_j})U^{-1}\Big),$$

относительно разложения Рисса пространства $\mathcal{H}$ вида

$$\mathcal{H} = U\mathcal{H}_{(m)} \oplus \Big(\bigoplus_{j>m} U\mathcal{H}_j\Big).$$

При этом ограниченные операторы из U-ортогонального разложения имеют ранг m и один соответственно. Оператор $X \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ есть решение уравнения (9), рассматриваемого в $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$ с операторами J_m и Γ_m, определенными равенствами (11), (12). Оператор $I + \Gamma_m X$ обратим и преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - B_0$ осуществляет оператор $U = (I + \Gamma_n B)(I + \Gamma_m X) = U_{nm} + I$, $U_{nm} \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(\mathcal{H})$. Более того, для спектральных проекторов $\widetilde{Q}_k$ и $\widetilde{Q}_{(m)}$ оператора $A - B$ имеют место формулы (14), (15), причем $\widetilde{Q}_k \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $\sum\limits_p \sum\limits_{i-j=p} |(\widetilde{Q}_k - Q_k)_{ij}|^2 \alpha^2(p) < \infty$. Если $\widetilde{e}_j$ — собственный вектор, то он представим в виде

$$\widetilde{e}_j = e_j + \sum_{i \neq j} \eta_{i,j} e_i,$$

где $|\eta_{i,j}| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|i^2 - j^2|}|w_{ij}|$ и $\sum\limits_i |w_{ij}|^2 \alpha^2(i-j) < \infty$.

Рассмотрим теперь другой потенциал, а именно потенциал 2). Очевидно, что $\sum\limits_{p\in\mathbb{Z}} |B_p|\alpha(p) < \infty$. Поэтому в данном случае в качестве пространства допустимых возмущений $\mathcal{M}$ удобно сразу рассматривать пространство $\mathrm{End}_\alpha\,\mathcal{H}$ с введенной ранее в нем нормой. Таким образом, из теорем 1, 2 немедленно вытекает

Теорема 16. *Оператор Хилла L_{per} (L_{ap}) с потенциалом 2) подобен оператору, являющемуся прямой суммой ограниченных операторов вида*

$$L^0_{per} - (Q_{(m)}X|_{\mathcal{H}_{(m)}} \oplus \Big(\bigoplus_{n>m} (Q_n X)|_{\mathcal{H}_n}\Big)), \tag{24}$$

или

$$L^0_{ap} - (Q_{(m)}X|_{\mathcal{H}_{(m)}} \oplus \Big(\bigoplus_{n>m} (Q_n X)|_{\mathcal{H}_n}\Big)), \tag{25}$$

где m — некоторое натуральное число, $Q_n = P(\{\lambda_n\}, L_0)$, $Q_{(m)} = \sum\limits_{i=0}^m Q_i$. При этом оператор X, являющийся решением нелинейного операторного уравнения (9), является элементом операторного пространства $\mathrm{End}_\alpha\,\mathcal{H}$. Более того, для спектральных проекторов $\widetilde{Q}_n$, $\widetilde{Q}_{(m)}$ оператора L_{per} (L_{ap}) имеют место формулы (14) и $\sum\limits_k d_{\widetilde{Q}_k}(p)\alpha(p) < \infty$.

Важно отметить, что в случае $\mathcal{M} = \mathrm{End}_\alpha\,\mathcal{H}$ разложение гильбертова пространства $\mathcal{H} = L_2[0,\pi]$ не является разложением Рисса.

Перейдем теперь к рассмотрению оператора L_{dir} с условиями на потенциал 4).

Из вида матрицы оператора-возмущения (22) и оценки элементов (23) следует, что и в этом случае $B \in \operatorname{End}_\alpha \mathcal{H}$. Поэтому имеет место теорема 17, вытекающая из теорем 2, 4. Еще раз отметим, что в случае оператора L_{dir} системы проекторов P_n, $n \in \mathbb{J}$, и Q_n, $n \in \mathbb{J}$, совпадают.

Теорема 17. *Пусть дан оператор L_{dir} с условием 4) на потенциал. Тогда существует такое натуральное число $m > 0$, что при всех $k > m$ для спектральных проекторов $\widetilde{Q}_k$ оператора L_{dir} имеет место неравенство*

$$\sum_p d_{\widetilde{Q}_k}(p)\alpha(p) < \infty$$

и собственные векторы $\widetilde{e}_j$, $j > m$, оператора L_{dir} представимы в виде

$$\widetilde{e}_j = e_j + \sum_{i \neq j} \eta_{i,j} e_i,$$

где $|\eta_{i,j}| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|i^2 - j^2|}|w_{i,j}|$ и $\sum\limits_i w_{i,j}\alpha(i-j) < \infty$ для любого $j > m$.

Перейдем теперь к рассмотрению оператора Штурма-Лиувилля с матричным потенциалом. Напомним, что матричный потенциал $V(t) = (v_{ij}(t))$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, состоит из функций $v_{ij} \in L_2[0,1]$ таких, что $v_{ij}(t) = \sum\limits_{k>0} v_{ijk} \cos \pi k t$, $\sum\limits_{k>0} |v_{ijk}|\alpha(k) < \infty$.

Спектральные свойства оператора L_{dir} хорошо известны. А именно, его собственными значениями являются числа

$$\lambda_{n,k} = (\pi n)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

и соответствующими собственными векторами-функциями

$$e_{n,k} = \sqrt{2} \sin \pi n t f_k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

где векторы f_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, образуют ортонормированный базис в $\mathbb{C}^m$. Система проекторов $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$, $n \in \mathbb{J}$, в рассматриваемом случае совпадают и $P_n = P(\sigma_n, L_2)$, где $\sigma_n = \{\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \ldots, \lambda_{n,m}\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Непосредственный подсчет показывает, что элементами числовой матрицы оператора возмущения B — умножения на матричный потенциал являются числа

$$b_{l_i,k_j} = \begin{cases} \frac{1}{2}(v_{l-k,ij} - v_{l+k,ij}), & l > k, \\ \frac{1}{2}(v_{k-l,ij} - v_{l+k,ij}), & l < k, \\ v_{0,ij} - \frac{1}{2}v_{2l,ij}, & l = k, \end{cases}$$

или, короче, $b_{l_i,k_j} = \frac{1}{2}(v_{|l-k|,ij} - v_{l+k,ij})$, при $l \neq k$. При этом $|b_{l_i,k_j}| \leqslant |v_{|l-k|,ij}|$. Из вышесказанного немедленно следует, что операторная матрица оператора возмущения B относительно системы проекторов есть элемент алгебры $\operatorname{End}_\alpha \mathcal{H}$. Поэтому теорема 7 вытекает из теорем 1, 2, 4.

8. К модификации метода Галеркина нахождения собственных значений

Рассмотрим возмущенный оператор $A - B : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ из §3. Обычно для приближенного нахождения первых собственных значений оператора $A-B$ используют проекционные методы [70], которые заключаются в следующем. Вместо исходного оператора рассматривают последовательность конечномерных операторов $((A-B)_k)$, $k \geqslant 1$, собственные значения которых находятся численно (метод Галеркина [70]). Тогда каждое собственное значение оператора $A - B$ является пределом последовательности собственных значений операторов $((A-B)_k)$ при $k \to \infty$. Рассмотрим метод Галеркина с точки зрения метода подобных операторов, используя идеологию из [2, §29], [43].

Из подобия операторов $A - B$, $B \in \mathcal{M}$ (напомним, что здесь в качестве $\mathcal{M}$ выступает одно из весовых пространств), и $A - J_kX$ следует равенство $\sigma(A-B) = \sigma(A - J_kX)$, но

$$\sigma(A - J_kX) = \sigma_{(k)} \bigcup \Big(\bigcup_{n>k} \sigma_n \Big),$$

где $\sigma_{(k)} = \sigma(AQ_{(k)} - Q_{(k)}X|\mathcal{H}_k)$, $\mathcal{H}_{(k)} = \operatorname{Ran} Q_{(k)}$ и $\sigma_n = \sigma(AQ_n - Q_nX|\mathcal{H}_n)$, $\mathcal{H}_n = \operatorname{Ran} Q_n$. Нас интересует оператор $AQ_{(k)} - Q_{(k)}X|\mathcal{H}_k$ и множество $\sigma_{(k)}$, так как именно этот оператор и его спектр используются в проекционных методах. Если бы оператор X был известен, то, соответственно, был бы известен и искомый спектр $\sigma_{(k)}$. Но нам известен не сам оператор $X \in \mathcal{M}$, а последовательные приближения к нему, причем первым приближением $X^{(1)}$ является оператор B, вторым — $X^{(2)} = B\Gamma_kB - (\Gamma_kB)J_kB - (\Gamma_kB)J_k(B\Gamma_kB) + B$, и т. д. Приближения выше третьего порядка уже не используются ввиду их громоздкости. Мы же ограничимся первыми двумя приближениями.

Так как

$$A - JX^{(1)} = A - JB = (A - Q_{(k)}BQ_{(k)})|\mathcal{H}_{(k)} \oplus (A - \sum_{i>k} Q_iBQ_i)|\mathcal{H}^{(k)}$$

где $\mathcal{H}_{(k)} \oplus \mathcal{H}^{(k)} = \mathcal{H}$. Таким образом, оператор $A - J_kB$ можно рассматривать как прямую сумму операторов, первый из которых $A_{1k} = (A - Q_{(k)}BQ_{(k)})|\mathcal{H}_{(k)}$ и есть конечномерный оператор, обычно используемый в проекционных методах. Зная спектр оператора A_{1k}, мы обладаем и приближением к спектру исходного оператора.

Из равенства

$$(A - Q_{(k)}XQ_{(k)})|\mathcal{H}_{(k)} = (A - Q_{(k)}BQ_{(k)} - Q_{(k)}(X-B)Q_{(k)})|\mathcal{H}_{(k)}$$

следует, что существует такая нумерация собственных значений $\widetilde{\lambda}_l$ оператора $(A-B)|\mathcal{H}_{(k)}$, что

$$|\widetilde{\lambda}_l - \mu_l(A_{1k})| \leqslant \|Q_{(k)}(X-B)Q_{(k)}\|.$$

При этом из уравнения (9) следует, что величина $\|X - B\|_{\mathcal{M}}$ имеет порядок γ.

Из приведенных выше рассуждений естественным образом вытекает, что для ускорения сходимости последовательности собственных значений, используемой в проекционный методах, следует подправить последовательность конечномерных операторов, собственные значения которых и будут численно найдены. А именно, следует использовать операторы $A - JX^{(2)} = A - J_kB -$

$J_k(B\Gamma_k B)$, а точнее, операторы $A_{2k} = (A - Q_{(k)}BQ_{(k)} - Q_{(k)}(B\Gamma_k B)Q_{(k)})|\mathcal{H}_k$ (берутся вторые приближения по методу подобных операторов). Назовем такую последовательность A_{2k} конечномерных операторов последовательностью конечномерных операторов модифицированного метода Галеркина.

Так как для второго приближения $X^{(2)}$ к решению нелинейного уравнения (9) метода подобных операторов имеет место оценка

$$\|X - X^{(2)}\|_{\mathcal{M}} \leqslant \gamma^2,$$

то $|\widetilde{\lambda}_l - \mu_l(A_{2k})| = \mathcal{O}(\gamma^2)$. Таким образом, имеет место

Теорема 18. *Пусть $\widetilde{\lambda}$ — простое изолированное собственное значение оператора $A - B$. Тогда существуют последовательности $\{\mu_{1k}\}$, $\{\mu_{2k}\}$ собственных значений операторов A_{1k} и A_{2k} соответственно такие, что начиная с некоторого k справедливы оценки:*

$$|\widetilde{\lambda} - \mu_{1k}| = \mathcal{O}(k^{-1}),$$
$$|\widetilde{\lambda} - \mu_{2k}| = \mathcal{O}(k^{-2}).$$

При этом оператор A_{1k} есть $A_{1k} = (A - Q_{(k)}BQ_{(k)})|\mathcal{H}_{(k)}$, оператор A_{2k} есть $A_{2k} = (A - Q_{(k)}BQ_{(k)} - Q_{(k)}(B\Gamma_k B)Q_{(k)})|\mathcal{H}_{(k)}$. Таким образом, оператор A_{2k} представим в виде $A_{2k} = (A - Q_{(k)}CQ_{(k)})|\mathcal{H}_{(k)}$, где C принадлежит тому же весовому операторному пространству, что и оператор B.

Пусть $A = L^0_{dir}$. Тогда из теоремы 18 следует теорема 9 из введения. При этом учтен вид оператора $B\Gamma_k B$ из пространства допустимых возмущений $\mathcal{M}$.

References

[1] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear operators. Spectral operators. Part III*, Pure and Applied Mathematics. VII, Wiley-Interscience, New York, 1971. MR 0412988

[2] A.G. Baskakov, *Harmonic analysis of linear operators*, Izdatelstvo VGU, Voronezh, 1987. MR 1607000

[3] A.G. Baskakov, *Methods of abstract harmonic analysis in the perturbation of linear operators*, Siberian Math. J., **24**:1 (1983), 17–32. MR 0688589

[4] A.G. Baskakov, *Wiener's theorem and the asymptotic estimates of the elements of inverse matrices*, Functional Anal. Appl., **24**:3 (1990), 222–224. MR 1082033

[5] A.G. Baskakov, *Abstract harmonic analysis and asymptotic estimates of elements of inverse matrices*, Math. Notes, **52**:2 (1992), 764–771. MR 1187870

[6] A.G. Baskakov, *Asymptotic estimates for elements of matrices of inverse operators and harmonic analysis*, Siberian Math. J., **38**:1 (1997), 10–22. MR 144668

[7] A.G. Baskakov, *Estimates for the entries of inverse matrices and the spectral analysis of linear operators*, Izv. Math., **61**:6 (1997), 1113–1135. MR 1609144

[8] A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, *Memory estimation of inverse operators*, J. Funct. Anal., **267**:8 (2014), 2551–2605. MR 3255468

[9] J.-P. Kahane, *Series de Fourier absolument convergence*, New York, 1970. MR 0275043

[10] Q. Sun, *Wienner's lemma for infinite matrices*, Constructive Approx., **34** (2011), 209–235. MR 2822769

[11] Q. Sun, *Wienner's lemma for infinite matrices*, Trans. Amer. Math. Soc., **354**:7 (2007), 3099–3123. MR 2299448

[12] I.A. Krishtal, T. Strohmer, T. Wertz, *Localization of matrix factorizations*, Found. Comput. Math., **15**:4 (2015), 931–951. MR 3371374

[13] I.A. Krishtal, *Wiener's lemma and memory localization*, J. Fourier Anal. Appl., **17**:4 (2011), 674–690. MR 2819172

[14] I.A. Krishtal, *Wiener's lemma: pictures at an exhibition*, Rev. Un. Mat. Argentina, **52**:2 (2011), 61–79. MR 2952951

[15] C.E. Shin, Q. Sun, *Wiener's lemma: localization and various approaches*, Appl. Math. J. Chinese Univ., **28**:4 (2013), 465–484.

[16] I.Ts. Gohberg, M.G. Krein, *An introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert space*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969. MR 0246142

[17] Y.L. Ul'yanova, *Spectral properties of relatively finite-dimensional perturbations of selfadjoint operators*, Russian Math. (Izv. VUZ.), **41**:10 (1997), 72–75. MR 1488006

[18] A.G. Baskakov, *Spectral analysis with respect to finite-dimensional perturbations of spectral operators*, Soviet Math. (Izv. VUZ.), **35**:1 (1991), 1–11. MR 1132804

[19] A.G. Baskakov, A.V. Derbushev, A.O. Shcherbakov, *The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials*, Izv. Math., **75**:3 (2011), 445–469. MR 2847780

[20] A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, E.Yu. Romanova, *Spectral analysis of a differential operator with an involution*, J. Evol. Equat, **17** (2017), 669–684.

[21] A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, N.B. Uskova, *Linear differential operator with an involution as a generator of an operator group*, Operators and Matrices, **12**:3 (2018), 723–756. MR 3853364

[22] A.G. Baskakov, N.B. Uskova, *A generalized Fourier method for the system of first-order differential equations with an involution and a group of operators*, Differ. Equ., **54**:2 (2018), 277–281. MR 3797532

[23] A.G. Baskakov, N.B. Uskova, *Spectral analysis of differential operator with an involution and a group of operators*, Differ. Equ., **54**:9 (2018), 1287–1291.

[24] A.G. Baskakov, N.B. Uskova, *Fourier method for first order differential equations with an involution groups of operators*, Ufa Math. J., **10**:3 (2018), 11–34.

[25] A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, N.B. Uskova, *General Dirac operators as generators of operator groups*, arXiv 1806.10831.

[26] A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, N.B. Uskova, *Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices*, arXiv 1812.10331.

[27] N.B. Uskova, *Asymptotic of eigenvalues of scalar differential operator with an involution*, Belgorod State University. Sci. Bull. Math. Phys., **49**:27 (279) (2017), 42–44.

[28] G.V. Garkavenko, N.B. Uskova, *The asymptotic of eigenvalues of difference operator with growthing potential and groups of operators*, Mathem. Fiz. Comp. Model., **20**:4 (2017), 6–17.

[29] P.B. Djakov, B.S. Mityagin, *Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators*, Russian Math. Surv., **61**:4 (2006), 663–766. MR 2279044

[30] P.B. Djakov, B.S. Mityagin, *Riesz basis property of Hill operators with potentials in weighted spaces*, Trans. Moscow Math. Soc., **75** (2014), 151–172.

[31] O.A. Veliev, *Non-self-adjoint Sturm-Liouville operators with matrix potentials*, Math. Notes, **81**:4 (2007), 440–448. MR 2351855

[32] O.A. Veliev, A.A. Shkalikov, *On the Riesz basis property of the eigen- and associated functions of periodic and antiperiodic Sturm-Liouville problems*, Math. Notes, **85**:6 (2009), 647–660. MR 2572858

[33] A.G. Baskakov, D.M. Polyakov, *The method of similar operators in the spectral analysis of the Hill operator with nonsmooth potential*, Sb. Math. **208**:1 (2017), 1–43. MR 3598763

[34] A.G. Baskakov, D.M. Polyakov, *Spectral properties of the Hill operator*, Math. Notes, **99**:4 (2016), 598–602. MR 3507425

[35] A.V. Karpikova, *Asymptotics for eigenvalues of Sturm-Liouville operator with periodic boundary conditions*, Ufa Math. J., **6**:3 (2014), 28–34. MR 3427548

[36] A.V. Karpikova, *Spectral analysis of the Hill-Scrödinger operator*, Belgorod State University. Sci. Bull. Math. Phys., **34**:5(176) (2014), 34–37.

[37] E.F. Akhmerova, *Asymptotics of the spectrum of nonsmooth perturbations of differential operators of order* $2m$, Math. Notes, **90**:6 (2011), 813–823. MR 2962959

[38] M.S. Bichegkuev, S.V. Besaeva, *Spectral properties of difference and differential operators in weighted spaces*, Russian Math. (Izv. VUZ.), **55**:2 (2011), 13–17. MR 2814817

[39] M.S. Bichegkuev, *Spectral analysis of differential operators with unbounded operator coefficients in weighted spaces of functions*, Math. Notes, **95**:1 (2014), 15–21. MR 3267188

[40] M.S. Bichegkuev, *Spectral analysis of difference and differential operators in weighted spaces*, Sb. Math., **204**:11 (2013), 1549–1564. MR 3155860

[41] N.B. Uskova, *On the spectral properties of a second order differential operator with a matrix potential*, Differ. Equ., **52**:5 (2016), 579–588. MR 3541452

[42] N.B. Uskova, *On spectral properties of Sturm-Liouville operator with matrix potential*, Ufa Math. J., **7**:3 (2015), 88–99. MR 3430694
[43] A.G. Baskakov, *A theorem on splitting an operator and some related questions in the analytic theory of perturbations*, Math. USSR-Izv., **28**:3 (1987), 421–444. MR 854591
[44] A.G. Baskakov, *Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators*, Izv. Math., **45**:1 (1995), 1–31. MR 1307054
[45] N.B. Uskova, *On estimates for spectral projections of perturbed selfadjoint operators*, Siberian Math. J., **41**:3 (2000), 592–600. MR 1778685
[46] D.M. Polyakov, *Spectral analysis of a fourth-order nonselfadjoint operator with nonsmooth coefficients*, Siberian Math. J., **56**:1 (2015), 138–154. MR 3407948
[47] N.B. Uskova, *On the spectrum of some classes of differential operators*, Differ. Equ., **30**:2 (1994), 328–330. MR 1299422
[48] D.M. Polyakov, *Spectral analysis of a fourth order differential operator with periodic and antiperiodic boundary conditions*, St. Petersburg Math. J., **27**:5 (2016), 789–811. MR 3582944
[49] D.M. Polyakov, *On spectral properties of fourth order differential operator with periodic and semiperiodic boundary conditions*, Russian Math. (Izv. VUZ.), **59**:5 (2015), 64–68. Zbl. 06465047
[50] D.M. Polyakov, *Method of similar operators in spectral analysis of a fourth-order nonselfadjoint operator*, Differ. Equ., **51**:3 (2015), 421–425. MR 3373213
[51] A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, *On completeness of spectral subspace of linear relations and ordered pairs of linear operators*, J. Math. Anal. Appl., **407** (2013), 157-178. MR 3063113
[52] D.M. Polyakov, *Spectral properties of an even-order differential operator*, Differ. Equ., **52**:8 (2016), 1098–1103.
[53] D.M. Polyakov, *Spectral properties of 1D Scrödinger operator*, Vestnik Voronezh. Gos. Univer. Phys. Math., 2 (2016), 146–152.
[54] G.V. Garkavenko, N.B. Uskova, *Method of similar operators in research of spectral properties of difference operators with growthing potentials*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14**, (2017), 673–689.
[55] G.V. Garkavenko, N.B. Uskova, *Spectral analysis of a class of difference operator with growthing potential*, Izvestiya Saratov Univ. (N.S.). Ser. Math. Mech. Inform. **16**:4 (2016), 395–402. MR 3584324
[56] G.V. Garkavenko, N.B. Uskova, *The similar operators method in investigation of spectral properties of one class difference operators*, Vestnik Voronezh. Gos. Univer. Phys. Math., 3 (2016), 101–111.
[57] G.V. Garkavenko, N.B. Uskova, A.R. Zgolich, *The similar operators method and spectral properties of two difference operator with order potential*, Belgorod State University. Sci. Bull. Math. Phys., 20(43) (2016), 42–49.
[58] A.N. Shelkovoy, *Asymptotic behavior of the eigenvalues of a differential operator with nonlocal boundary conditions*, Belgorod State University. Sci. Bull. Math. Phys., 13(43) (2016), 72–80.
[59] D.M. Polyakov, *A one-dimensional Schrödinger operator with square-integrable potential*, Siberian Math. J., **59**:3 (2018), 470–485.
[60] I.N. Braeutigam, D.M. Polyakov, *On the asymptotics of eigenvalues of a fourth-order differential operator with matrix coefficients*, Differ. Equ., **54**:4 (2018), 450–467.
[61] G.V. Garkavenko, A.R. Zgolich, N.B. Uskova, *Spectral analysis of a difference operator with a growing potential*, J. Phys. Conf. Series, **973** (2018), 012053. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012053. MR 3584321
[62] G.V. Garkavenko, N.B. Uskova, *The theorem of the decomposition of linear operators and the asymptotic behaviour of the eigenvalues of difference operator with a growing potential*, J. Pure. Appl. Math., **18**:1 (2018), 91–106.
[63] N.B. Uskova, *A Pearcy–Shields problem*, Russian Math. (Izv. VUZ.), **41**:10 (1997), 76–78. MR 1488007
[64] N.B. Uskova, *On the method of similar operators in Banach algebras*, Russian Math. (Izv. VUZ.), **49**:3 (2005), 75–81. MR 2179847
[65] G.V. Garkavenko, *On diagonalization of certain classes of linear operators*, Russian Math. (Izv. VUZ.), **38**:11 (2005), 11–16. MR 1393073
[66] T.V. Azarnova, N.B. Uskova, *On similary transformation of operators*, Vestnik Voronezh. Gos. Univer. Phys. Math., 2 (2007), 121–126.

[67] V.V. Katrakhov, S.M. Sitnik, *The transmutation method and boundary-value problem for singular elliptic equations*, SMFN, **64**:2 (2018), 211–426.

[68] N.B. Uskova, *Estimates for spectral expansions of eigenvectors for some classes of perturbed linear operators*, Differ. Equ., **33**:4 (1997), 79–81. MR 1615739

[69] N.B. Uskova, *On a result of R. Turner*, Math. Notes, **76**:6 (2004), 844–854. MR 2127501

[70] M.A. Krasnoselskii and others, *Solution of operator equations*, Nauka, Moscow, 1967.

Natalia Borisovna Uskova
Voronezh State Technical University,
14, Moskovsky ave.,
Voronezh, 394026, Russia
E-mail address: nat-uskova@mail.ru