S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 427–434 (2019) УДК 510.6
DOI 10.33048/semi.2019.16.024 MSC 03B45

УЗНАВАЕМОСТЬ В ПРЕДГЕЙТИНГОВЫХ И СТРОЙНЫХ ЛОГИКАХ

Л.Л. МАКСИМОВА, В.Ф. ЮН

Abstract. In this paper the problems of recognizability and strong recognizavility, perceptibility and strong perceptibility in extensions of the minimal Johansson logic J [1] are studied. These concepts were introduced in [2, 3, 4]. Although the intuitionistic logic Int is recognizable over J [2], the problem of its strong recognizability over J is not solved. Here we prove that Int is strong recognizable and strong perceptible over the minimal pre-Heyting logic Od and the minimal well-composed logic JX. In addition, we prove the perceptibility of the formula F over JX. It is unknown whether the logic J+F is recognizable over J.

Keywords: Recognizability, strong recognizability, minimal logic, pre-Heyting logic, Johansson algebra, Heyting algebra, superintuitionistic logic, calculus.

В работе исследуются проблемы узнаваемости и сильной узнаваемости, различимости и сильной различимости в расширениях минимальной логики J Йохансона [1].

Указанные понятия были введены в [2, 3, 4].

Например, формула A различима над логикой J, если существует алгоритм, проверяющий по любой конечной системе схем аксиом Ax, выводима ли A в J$+Ax$; формула A сильно различима над логикой J, если существует алгоритм, проверяющий по любой конечной системе Rul аксиом и правил вывода, выводима ли A в исчислении J$+Rul$.

В параграфах $1, 2$ мы дадим необходимые определения и известные факты.

Maksimova, L.L., Yun, V.F., Recognizability in pre-Heyting and well-composed logics.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.1, проект № 0314-2019-0002.

Поступила 26 июня 2018 г., опубликована 29 марта 2019 г.

В параграфе 3 докажем различимость над наименьшей стройной логикой JX известной формулы F. Логика JF исследовалась в ряде работ [5, 6], она разрешима и обладает дизъюнктивным и интерполяционным свойствами. Неизвестно, узнаваема ли логика JF над J.

Хотя интуиционистская логика Int узнаваема над J [2], проблема сильной узнаваемости Int над J не решена. Понятие сильной узнаваемости было введено в [4]. Там была сформулирована проблема: является ли логика Int сильно узнаваемой над J? В этой статье мы докажем сильную узнаваемость и сильную различимость Int над минимальной предгейтинговой логикой Od и минимальной стройной логикой JX, приведем алгоритмы сильной различимости. Для доказательства используем найденную в [7] характеризацию гейтинговых алгебр посредством невложимости. Также установим сильную различимость некоторых формул.

1. Логики и многообразия

Язык минимальной логики J Йохансона содержит связки $\&, \vee, \to$ и пропозициональную константу $\perp$; $\top = \perp \to \perp$, $\neg A = A \to \perp$.

Минимальная логика J имеет те же аксиомы, что и позитивное интуиционистское исчисление и единственное правило вывода $R1$: $A, A \to B/\ B$.

J-*логика* — это любое множество формул, содержащее все аксиомы исчисления J и замкнутое относительно $R1$ и подстановки. Для J-логики L пишем $\Gamma \vdash_L A$, если A выводима из множества $L \cup \Gamma$ с помощью правила $R1$.

Рассмотрим формулы:

$Int = \perp \to p$,

$Hyb = \perp \vee (\perp \to p)$,

$Od = \neg\neg(\perp \to p)$,

$X = (\perp \to p) \vee (p \to \perp)$,

$F = (\perp \to p \vee q) \to (\perp \to p) \vee (\perp \to q)$.

Введем обозначения для некоторых J-логик:

$\mathrm{Int} = \mathrm{J} + Int$,

$\mathrm{Neg} = \mathrm{J} + \perp$,

$\mathrm{Hyb} = \mathrm{J} + Hyb$,

$\mathrm{Od} = \mathrm{J} + Od$,

$\mathrm{JX} = \mathrm{J} + X$,

$\mathrm{JF} = \mathrm{J} + F$,

$\mathrm{For} = \mathrm{J} + p$.

J-логика называется *нетривиальной*, если не совпадает с For.

Логика называется *суперинтуиционистской, негативной, гибридной, предгейтинговой, стройной*, если содержит соответственно Int, Neg, Hyb, Od, JX.

Пусть L – логика, Rul – множество аксиом и правил вывода. Пишем $\mathrm{J}+Rul \geq L$, если все формулы из L выводимы в $(\mathrm{J} + Rul)$; пишем $\mathrm{J} + Rul = L$, если L совпадает с множеством формул, выводимых в $(\mathrm{J} + Rul)$.

Алгебраическая семантика логики J строится с помощью *алгебр Йохансона* (J-*алгебр*) $\mathbf{A} =< A; \&, \vee, \to, \perp, \top >$, где

$< A; \&, \vee, \to, \perp, \top >$ – решетка относительно $\&, \vee$ с наибольшим элементом $\top$, $\perp$ – произвольный элемент в A,

$z \leq x \to y \iff z \& x \leq y$.

J-алгебра называется *гейтинговой*, если $\bot$ — наименьший элемент множества A, и *негативной алгеброй*, если $\bot$ — наибольший элемент множества A. Алгебра Йохансона $\mathbf{A}$ называется *гибридной*, если $\mathbf{A} \models \bot \vee (\bot \to p)$, *предгейтинговой*, если $\mathbf{A} \models \neg\neg(\bot \to p)$, и *стройной*, если $\mathbf{A} \models (\bot \to p) \vee (p \to \bot)$.

Пишем $\mathbf{A} \models B$, если тождество $B = \top$ выполнено в $\mathbf{A}$. Вместо $(\forall A \in L)(\mathbf{A} \models A)$ будем писать $\mathbf{A} \models L$.

Существует взаимно однозначное соответствие между решеткой J-логик и решеткой многообразий J-алгебр. Обозначаем

$$V(L) = \{\mathbf{A} | \ \mathbf{A} \models L\}.$$

В частности, $V(\mathrm{Int})$ – многообразие гейтинговых алгебр, $V(\mathrm{Neg})$ – многообразие негативных алгебр, $V(\mathrm{JX})$ – многообразие стройных алгебр.

Для правила вывода $(r): \ A_1, \ldots, A_k / \ B$ пишем $\mathbf{A} \models (r)$, если квазитождество $(A_1 = \top \wedge \ldots \wedge A_k = \top \Rightarrow B = \top)$ истинно в $\mathbf{A}$.

Каждому исчислению $L = \mathrm{J} + Rul$, где Rul – множество аксиом и правил вывода, соответствует квазимногообразие $Q(L) = \{\mathbf{A} | \ \mathbf{A} \models Rul\}$. При этом имеет место **теорема о полноте** [8]:

$$L \vdash A \iff Q(L) \models A.$$

2. Различимость и узнаваемость

Пусть L_0 — конечно аксиоматизируемая J-логика. Формула A *различима над* L_0, если существует алгоритм, определяющий по произвольной конечной системе аксиом Ax, верно ли соотношение $L_0 + Ax \vdash A$; формула A *сильно различима над* L_0, если существует алгоритм, определяющий по произвольной конечной системе Rul аксиом и правил вывода, верно ли соотношение $L_0 + Rul \vdash A$.

Пусть L, L_0 — конечно аксиоматизируемые J-логики, $L \supseteq L_0$.

Логика L *различима над* L_0, если разрешима проблема $L_0 + Ax \geq L$; логика L *сильно различима над* L_0, если разрешима проблема включения $L_0 + Rul \geq L$.

Логика L *узнаваема над* L_0, если существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax схем аксиом узнает, верно ли равенство $L_0 + Ax = L$; логика L *сильно узнаваема над* L_0, если существует алгоритм, который по любой конечной системе Rul схем аксиом и правил вывода узнает, верно ли соотношение $L_0 + Rul = L$.

Правило вывода *допустимо в* L, если оно сохраняет выводимость в L. Логика L *разрешима по допустимости*, если существует алгоритм для проверки допустимости правил в L.

Следующий критерий доказан в [2, 4] для $L_0 = \mathrm{J}$, в общем случае доказательство аналогично.

Лемма 2.1. *Пусть L,L_0 – конечно аксиоматизируемые* J*-логики, $L \supseteq L_0$.*

1. L узнаваема над L_0 $\iff$ L различима над L_0 и разрешима.

2. L сильно различима над L_0 и разрешима по допустимости $\Rightarrow$ L сильно узнаваема над L_0 $\Rightarrow$ L различима над L_0 и разрешима по допустимости.

Наиболее важные J-логики узнаваемы над J, таковы логики Int, Neg, For, Od, JX [2] и многие другие. Сильно узнаваемые логики встречаются много реже, так как сильная узнаваемость влечет разрешимость по допустимости, а проблема допустимости очень сложна [9, 10].

Неизвестно, является ли логика Int сильно узнаваемой и сильно различимой над J. Ниже мы докажем, что Int сильно различима и сильно узнаваема над Od и JX.

3. Различимость F над JX

Большинство наиболее важных форму различимы над J и, следовательно, над любой J-логикой. В [2] оставлен открытым вопрос о различимости над J формулы F и об узнаваемости над J логики JF. Разрешимость этой логики доказана в [5]. В этом параграфе мы докажем различимость формулы F над логикой JX.

Для доказательства мы используем алгебраическую семантику. Любое многообразие порождается своими подпрямо неразложимыми алгебрами. Напомним [11], что J-алгебра подпрямо неразложима, если и только если она имеет *опремум*, т.е. наибольший среди элементов, отличных от $\top$. Опремум алгебры $\mathbf{A}$ обозначаем $\Omega_{\mathbf{A}}$.

Лемма 3.1. [11]

Если $a \not\leq b$ в алгебре $\mathbf{A}$, то существует гомоморфизм h из $\mathbf{A}$ на подпрямо неразложимую алгебру $\mathbf{B}$ такой, что $h(a) = \top$, $h(b) = \Omega_{\mathbf{B}}$.

Обозначим через G_2 пятиэлементную J-алгебру с носителем $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, где $0 \leq x \leq 4$, 3 — опремум, 1 и 2 несравнимы, $\perp = 3$.

Теорема 3.2. *Формула F различима над* JX. *Более точно, для любой конечной системы аксиом Ax*

$$(\mathrm{JX} + Ax) \vdash F \iff G_2 \not\models Ax.$$

Доказательство. Пусть $(\mathrm{JX} + Ax) \nvdash F$. Тогда существует J-алгебра $\mathbf{A}$, в которой общезначимы все формулы из $(\mathrm{JX} + Ax)$ и опровержима F. По лемме 3.1 существует подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{B}$, удовлетворяющая $(\mathrm{JX} + Ax)$, и в ней элементы a_1, b_1, такие что $\perp \leq a_1 \vee b_1$, $(\perp \to a_1) \vee (\perp \to b_1) = \Omega_{\mathbf{B}}$.

Положим $a = \perp \to a_1, b = \perp \to b_1$. Получаем $\perp \to a = a$, $\perp \to b = b$, $a \vee b = \Omega_{\mathbf{B}}$. В частности, $\perp \not\leq a$, $\perp \not\leq b$ и кроме того, верно $a \not\leq b$, $b \not\leq a$.

Далее используем тождество $x \to y = (x \vee y) \to y$. Отсюда $a \to b = (a \vee b) \to b = \Omega_{\mathbf{B}} \to b = b$.

Аналогично, $b \to a = a$. В частности, a и b несравнимы. Получаем, что элементы множества $S = \{a \& b, a, b, a \vee b, \top\}$ различны и упорядочены так же как в алгебре G_2.

Вспомним теперь, что $\mathbf{B}$ подпрямо неразложима и удовлетворяет формуле X. Получаем $a \leq \perp$, $b \leq \perp$, а значит,

$a \vee b = \perp$. Таким образом, множество S составляет подалгебру алгебры $\mathbf{B}$, изоморфную G_2. Следовательно, в G_2 общезначимы все формулы из JX$+Ax$.

Обратное очевидно, так как F опровержима в G_2.

□

4. Сильная узнаваемость

Проблема сильной узнаваемости над логикой J рассматривалась в [4, 3]. Например, логики Neg и For сильно узнаваемы над J. В то же время проблема сильной узнаваемости логики Int над J осталась нерешенной. Поскольку Int разрешима по допустимости [9], сильная узнаваемость вытекает из сильной различимость.

В этом параграфе мы докажем сильную различимость и сильную узнаваемость логики Int над JX и Od. Также покажем некоторые другие соотношения.

Имеет место следующая теорема о полноте.

Теорема 4.1. [4] $L_0 + Rul \vdash B \iff \mathbf{A} \models B$ *для каждой алгебры* $\mathbf{A}$ *из* $Q(L_0 + Rul)$.

Формула A *различима (сильно различима) над логикой* L_0, если существует алгоритм, проверяющий для любой конечной системы Ax аксиом, выводимость A в $L_0 + Ax$ (соответственно, для любой конечной системы Rul аксиом и правил вывода, выводима ли A в $L_0 + Rul$).

Логика $L_0 + A$ *различима (сильно различима) над логикой* L_0, если формула A различима (сильно различима) над L_0.

Логика $L_0 + A$ *узнаваема (сильно узнаваема) над логикой* L_0, если существует алгоритм, проверяющий для любой конечной системы Ax аксиом (соответственно, для любой конечной системы Rul аксиом и правил вывода) совпадает ли с $L_0 + A$ множество теорем исчисления $L_0 + Ax$ (соответственно, $L_0 + Rul$).

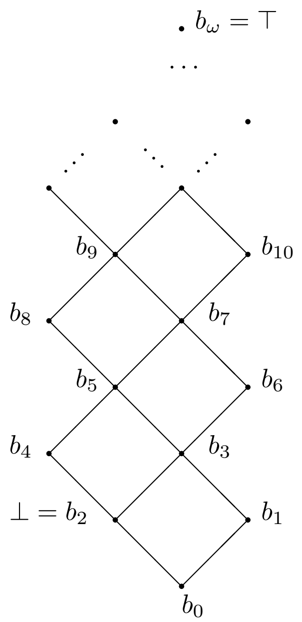
Мы установим соотношения сильной узнаваемости и сильной различимости между логиками Int, Hyb, Od и JX. Для доказательства используем найденную в [7] характеризацию указанных логик посредством невложимости.

Напомним определения алгебр из [7].

Пусть $\mathbf{A}$ — J-алгебра, $a \in \mathbf{A}$. *Интервал* $\mathbf{A}_a$ определяется как J-алгебра с носителем $\{x \in \mathbf{A} \mid x \leq a\}$, где $\bot_{\mathbf{A}_a} = a \& \bot_{\mathbf{A}}$.

Обозначим через $M_{0,\omega}$ алгебру с носителем $\{b_n \mid 0 \leq n \leq \omega\}$, где b_0 — наименьший элемент, $b_\omega = \top$, $\bot = b_2 < b_4$, b_{2n+1} и b_{2n+2} несравнимы, $b_{2n+1} \vee b_{2n+2} = b_{2n+3}$, $b_{2n+6} = b_{2n+5} \to b_{2n+3}$.

Нетрудно видеть, что $M_{0,\omega}$ — алгебра Йохансона. Диаграмма алгебры $M_{0,\omega}$ изображена на рисунке.



Для $n \geq 0$ обозначим через $M_{0,n}$ интервал алгебры $M_{0,\omega}$ с носителем $\{b_k|\ b_k \leq b_n\}$; при этом в $M_{0,0}$ и $M_{0,1}$ определяем $\bot = b_0$, в остальных алгебрах $\bot = b_2$.

Указанные интервалы составляют, с точностью до изоморфизма, множество всех гомоморфных образов алгебры $M_{0,\omega}$.

Имеет место

Теорема 4.2. [7] *Пусть* $\mathbf{A}$ *— J-алгебра. Тогда*

1. $\mathbf{A}$ *— гейтингова алгебра* $\iff$ *ни одна из алгебр* $M_{0,2} - M_{0,\omega}$ *не вложима в* $\mathbf{A}$.

2. $\mathbf{A}$ *— предгейтингова алгебра* $\iff$ *ни одна из алгебр* $M_{0,4}, M_{0,5}$, $M_{0,7} - M_{0,\omega}$ *не вложима в* $\mathbf{A}$.

3. $\mathbf{A}$ *— стройная алгебра* $\iff$ *ни одна из алгебр* $M_{0,6} - M_{0,\omega}$ *не вложима в* $\mathbf{A}$.

4. $\mathbf{A}$ *- гибридная алгебра* $\iff$ *ни одна из алгебр* $M_{0,4} - M_{0,\omega}$ *не вложима в* $\mathbf{A}$.

Заметим, что $\mathrm{Int} \supseteq \mathrm{Hyb} \supseteq \mathrm{Od} + \mathrm{JX}$, Od и JX несравнимы.

Теорема 4.3. *1. Формула Int сильно различима над логиками* Od, JX, Hyb.

2. Формула Hyb сильно различима над логиками Od, JX.

3. Формула JX сильно различима над логикой Od.

4. Формула Od сильно различима над логикой JX.

Доказательство. Сразу по леммам 4.4–4.6.

□

В следующих леммах выпишем алгоритмы для сильной различимости.

Лемма 4.4. *1. Формула Int сильно различима над логикой* Od*:*

$(\mathrm{Od} + Rul) \vdash Int \iff$ *Rul опровержимо в каждой из алгебр* $M_{0,2}, M_{0,3}, M_{0,6}$.

2. Формула Int сильно различима над логикой JX*:*

$(\mathrm{JX}{+}Rul) \vdash Int \iff$ *Rul опровержимо в каждой из алгебр* $M_{0,2}, M_{0,3}, M_{0,4}, M_{0,5}$.

3. Формула Int сильно различима над логикой Hyb*:*

$(\mathrm{Hyb} + Rul) \vdash Int \iff$ *Rul опровержимо в каждой из алгебр* $M_{0,2}, M_{0,3}$.

Доказательство. 1. Пусть $\mathrm{Od} + Rul \not\geq \mathrm{Int}$. Тогда по теореме 4.1 существует предгейтингова алгебра $\mathbf{A}$, в которой верно Rul, но опровергается Int.

По теореме 4.2 получаем, что одна из алгебр $M_{0,2}, M_{0,3}, M_{0,6}$ вложима в $\mathbf{A}$, а значит, в этой алгебре верно Rul.

Обратно. Пусть Rul верно в одной из трех алгебр. Поскольку во всех трех алгебрах верно Od и нарушается Int, получаем $\mathrm{Od} + Rul \not\geq \mathrm{Int}$.

2. Аналогично пункту 1.

3. Следует из 1.

□

Лемма 4.5. *Формула Hyb сильно различима над логиками* Od, JX*:*

$$(\mathrm{Od} + Rul) \vdash Hyb \iff Rul \text{ опровержимо в алгебре } M_{0,6}.$$

$$(\mathrm{JX} + Rul) \vdash Hyb \iff Rul \text{ опровержимо в каждой из из алгебр } M_{0,4}, M_{0,5}.$$

Доказательство. Аналогично лемме 4.4.

□

Лемма 4.6. *1. Формула JX сильно различима над логикой* Od *:*

$$(\mathrm{Od} + Rul) \vdash JX \iff Rul \text{ опровержимо в алгебре } M_{0,6}.$$

2. Формлула Od сильно различима над логикой JX*:*

$$(\mathrm{JX} + Rul) \vdash Od \iff Rul \text{ опровержимо в каждой из алгебр } M_{0,4}, M_{0,5}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 4.4.

1. Пусть $\mathrm{Od} + Rul \nvdash JX$. Тогда по теореме 4.1 существует предгейтингова алгебра $\mathbf{A}$, в которой верно Rul, но опровергается JX.

По теореме 4.2 получаем, что ни одна из алгебр $M_{0,4}, M_{0,5}$, $M_{0,7} - M_{0,\omega}$ не вложима в $\mathbf{A}$, но одна из алгебр $M_{0,6} - M_{0,\omega}$ вложима в $\mathbf{A}$. Таким образом, $M_{0,6}$ вложима в $\mathbf{A}$, а значит, в этой алгебре верно Rul.

Обратно. Пусть Rul верно в $M_{0,6}$. Поскольку в $M_{0,6}$ верно Od и нарушается JX при $v(p) = b_1$, получаем $\mathrm{Od} + Rul \not\supseteq \mathrm{JX}$.

2. Пусть $\mathrm{JX} + Rul \nvdash Od$. Тогда по теореме 4.1 существует стройная алгебра $\mathbf{A}$, в которой верно Rul, но опровергается Od.

По теореме 4.2 получаем, что ни одна из алгебр $M_{0,6} - M_{0,\omega}$ не вложима в $\mathbf{A}$, но одна из алгебр $M_{0,4}, M_{0,5}, M_{0,7} - M_{0,\omega}$ вложима в $\mathbf{A}$. Таким образом, одна из алгебр $M_{0,4}, M_{0,5}$ вложима в $\mathbf{A}$, а значит, в этой алгебре верно Rul.

Обратно. Пусть Rul верно в одной из $M_{0,4}, M_{0,5}$. Так как в $M_{0,4}, M_{0,5}$ верно JX и опровергается Od, то $\mathrm{JX} + Rul \not\supseteq \mathrm{Od}$.

□

Отметим следующее равенство.

Следствие 4.7. Hyb= Od+ JX.

Доказательство. Легко видеть, что Hyb содержит Od и JX. Обратное включение сразу следует из леммы 4.5, так как JX опровержима в $M_{0,6}$, а значит, $\mathrm{Od} + JX \vdash Hyb$.

□

Теорема 4.8. *Логика* Int *сильно различима и сильно узнаваема над логиками* Od, JX, Hyb.

Доказательство. В [9] доказано, что логика Int разрешима по допустимости. Поэтому утверждение следует из теорем 2.1 и 4.3.

□

References

[1] I.Johansson, *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer F3ormalismus*, Compositio Mathematica, **4** (1937), 119–136.

[2] L.L.Maksimova, V.F. Yun, *Recognizable Logics*, Algebra and Logic, **54**: 2 (2015), 167–182. Zbl 1347.03055

[3] L.L.Maksimova, *Recognizable and Perceptible Logics and Varieties*, Algebra and Logic, **56**: 3 (2017), 245–250. MR3743577

[4] L.L.Maksimova, V.F.Yun, *Strong Decidability and Strong Recognizability*, Algebra and Logic, **56**: 5 (2017), 370–385. MR3760474

[5] M.V.Stukachyova, *The Disjunction Property in the Class of Paraconsistent Extensions of Minimal Logic*, Algebra and Logic, **43**: 2 (2004), 132–141. MR2072574

[6] S. Odintsov, *Constructive negations and paraconsistency*, Series: Trends in Logic, Volume 26. Dordrecht: Springer, 2008. MR2680932

[7] L.L. Maksimova, V.F. Yun, *Calculi over minimal logic and nonembeddability of algebras*, SEMR, **13** (2016), 704–715. MR3540769

[8] L. Maksimova, *Strongly Decidable Properties of Modal and Intuitionistic Calculi*, Logic Journal of IGPL, **8**: 6 (2000), 797–819. MR1830528

[9] V.V. Rybakov, *Admissibility of Logical Inference Rules*, Amsterdam, New York: Elsevier, 1997. MR1454360

[10] S.P. Odintsov, V.V. Rybakov, *Unification and admissible rules for paraconsistent minimal Johannson's logic* **J** *and positive intuitionistic logic* $\mathbf{IPC}^+$, Ann. Pure Appl. Logic, **164** (2013), 771–784. MR3037551

[11] L.L. Maksimova, *Implicit Definability and Positive Logics*, Algebra and Logic, **42**: 1 (2003), 37–53. MR1988024

Larisa L'vovna Maksimova
Sobolev Institute of Mathematics,
4, pr. Koptyuga ave.,
Novosibirsk State University,
2, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: lmaksi@math.nsc.ru

Veta Fedorovna Yun
Sobolev Institute of Mathematics,
4, pr. Koptyuga ave.,
Novosibirsk State University,
2, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: yun@math.nsc.ru