S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 439–448 (2019) УДК 514.772

DOI 10.33048/semi.2019.16.026 MSC 53C

МНОГОЧЛЕНЫ ОБЪЕМА ДЛЯ МНОГОГРАННИКОВ КОМБИНАТОРНОГО ТИПА n-ГРАННЫХ ПРИЗМ В СЛУЧАЯХ $\mathbf{n = 5, 6, 7}$

Д.И. САБИТОВ, И.Х. САБИТОВ

Abstract. We present an algorithm for an explicit construction of the canonical volume polynomials for polyhedra combinatorially isomorphic to an n-prism in the cases $n = 5, 6$ and $n = 7$ and realize them in the case of some special values of edge lengths.

Keywords: n-prism-type polyhedra, volume, polynomial equation.

1. Введение и формулировка результата. В работах второго автора (см., например, [1], [2], [3]) было установлено, что для ориентируемых симплициальных многогранников в трехмерном евклидовом пространстве существует аналог формулы Герона, позволяющий вычислять объём многогранника как корень некоторого многочлена

$$Q(V) = V^{2N} + a_1(l)V^{2N-2} + ... + a_{N-1}(l)V^2 + a_N(l),$$

в котором коэффициенты $a_i(l)$ в свою очередь являются многочленами от совокупности (l) квадратов длин ребер с числовыми коэффициентами, определяемыми только комбинаторным строением многогранника. Формально доказательство существования такого многочлена было конструктивным, но вопрос о практическом нахождении его явного вида оставался трудным. Оказалось, что он имеет необыкновенно большое количество мономов; более того, предложенный в этих работах алгоритм его нахождения приводит к многочленам очень больших степеней, причем не все их корни соответствуют объемам разных конфигураций изометричных многогранников с одинаковым комбинаторным строением. Поэтому в работе [4] было введено понятие канонического многочлена объёма, который по определению должен иметь наименьшую степень среди

Sabitov, D.I., Sabitov, I.Kh., Volume polynomials for polyhedra combinatorially isometric to n-prisms in the cases $n = 5, 6, 7$).

Поступила 31 января 2019 г., опубликована 29 марта 2019 г.

всех многочленов объёма. В той же работе показано, что для гомеоморфных сфере многогранников такой многочлен существует, единственен, и, более того, он является делителем всех возможных многочленов объёма (а общее определение *многочлена объема* дано в статье [5], § 5). К настоящему времени канонические многочлены объёма известны лишь для нескольких комбинаторных типов многогранников с малым числом вершин. Все они имеют общее свойство, которое выражается в том, что существуют такие наборы длин, когда *все* корни соответствующего канонического многочлена являются объёмами реально существующих многогранников, так что степень их многочлена объёма действительно понизить нельзя. В работе [6] мы предложили алгоритм построения канонического многочлена объёма для многогранников, которые комбинаторно изоморфны кубу (т.е. 4-гранной призме). В данной работе мы продолжаем расширять класс многогранников, для которых для построения канонического многочлена объёма можно предложить сравнительно простой алгоритм, а именно, мы работаем с n-гранными призмами и показываем, что в случаях $n = 5, 6, 7$ при подходящем выборе триангуляции граней призмы нахождение канонического объёма призмы сводится к использованию канонического многочлена некоторого октаэдра с учетом добавления к нему объёмов нескольких тетраэдров. Но уже для 8-гранных призм никакая триангуляция граней не сводит вычисление их многочлена объёма к использованию многочлена объёма октаэдра, у которого длины ребер вычислялись бы на основе метрики поверхности данной комбинаторной призмы. Примерами комбинаторных n-призм являются как обычные n-гранные прямоугольные или косоугольные призмы, так и любые n-угольные усеченные пирамиды и усеченные клины с необязательно параллельными основаниями. При реализации таких комбинаторных моделей в пространстве могут получаться многогранники внешне весьма причудливого вида, в том числе невыпуклые и с самопересечениями разной природы, а с учетом возможного изменения комбинаторного строения после триангуляции граней число изометричных реализаций многогранной метрики поверхности призмы существенно увеличивается.

После изложения идеи алгоритма для каждого $n = 5$ и $n = 6$ мы реализуем его в случае соответствующей правильной призмы.

Так как теорема о многочлене объёма предполагает, что все грани многогранника треугольные, то для ее применения мы должны предварительно триангулировать грани. Выбор триангуляции не единственен, поэтому мы говорим о **существовании** триангуляции с утверждаемым в теореме свойством.

Теорема 1. *а) Существуют триангуляции* 5*-гранной призмы, для которых канонические многочлены объёма для многогранников комбинаторного типа* 5*-гранной призмы с соответствующей триангуляцией являются многочленами степени 256 с коэффициентами, зависящими от квадратов длин ребер многогранника и тех его диагоналей, которые участвуют в выбранной триангуляции граней.*

б) Существует выбор построения семейства изометричных данной 5-гранной призме многогранников, для которых объём данной призмы вычисляется как корень некоторого многочлена степени 16, с известными коэффициентами, не являющимися, однако, многочленами от квадратов длин ребер и выделенных диагоналей призмы. Объёмы всех построенных в части а) многогранников могут быть получены как корни 16 таких семейств.

Замечание 1. О виде уравнения для случая правильной 5-гранной призмы с данными длинами ее ребер см. ниже в доказательстве теоремы.

Теорема 2. *а) Существуют триангуляции 6-гранной призмы, для которых канонические многочлены объёма для многогранников комбинаторного типа 6-гранной призмы с соответствующей триангуляцией являются многочленами степени 1024 с коэффициентами, зависящими от квадратов длин ребер многогранника и тех его диагоналей, которые участвуют в выбранной триангуляции граней.*

б) Существует выбор построения семейства изометричных данной 6-гранной призме многогранников, для которых объём вычисляется как корень некоторого многочлена степени 16, с известными коэффициентами, не являющимися, однако, многочленами от квадратов длин ребер и выделенных диагоналей призмы. Объёмы всех построенных в части а) многогранников могут быть получены как корни 64 таких семейств. Для правильной 6-гранной призмы со стороной a и высоты h упоминаемый многочлен, при выборе всех ε_i равными 1, имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{V}}^{\mathbf{16}} - 96\sqrt{3}ha^2\tilde{\mathbf{V}}^{\mathbf{15}} + 12528h^2a^4\tilde{\mathbf{V}}^{\mathbf{14}} - 326592\sqrt{3}h^3a^6\tilde{\mathbf{V}}^{\mathbf{13}} + 16982784h^4a^8\tilde{\mathbf{V}}^{\mathbf{12}} - \\ 203793408\sqrt{3}h^5a^{10}\tilde{\mathbf{V}}^{\mathbf{11}} + 5043886848h^6a^{12}\tilde{\mathbf{V}}^{\mathbf{9}} + 116729952768h^8a^{16}\tilde{\mathbf{V}}^{\mathbf{8}} + \\ 1867679244288\sqrt{3}h^9a^{18}\tilde{\mathbf{V}}^{\mathbf{7}} - 58831896195072h^{10}a^{20}\tilde{\mathbf{V}}^{\mathbf{6}} + \\ 320901251973120\sqrt{3}h^{11}a^{22}\tilde{\mathbf{V}}^{\mathbf{5}} - 3465733521309696h^{12}a^{24}\tilde{\mathbf{V}}^{\mathbf{4}} + \\ 8531036360146944\sqrt{3}h^{13}a^{26}\tilde{\mathbf{V}}^{\mathbf{3}} - 41817312158220288h^{14}a^{28}\tilde{\mathbf{V}}^{\mathbf{2}} + \\ 41131782450708480\sqrt{3}h^{15}a^{30}\tilde{\mathbf{V}} - 55527906308456448h^{16}a^{32} = 0,\end{aligned}$$

где $\tilde{V} = 12v$, а v - объём призмы.

Теорема 3. *а) Существуют триангуляции 7-угольной призмы, для которых канонические многочлены объёма для многогранников комбинаторного типа 7-гранной призмы с соответствующей триангуляцией являются многочленами степени 4048 с коэффициентами, зависящими от квадратов длин ребер многогранника и тех его диагоналей, которые участвуют в выбранной триангуляции граней.*

б) Существует выбор построения семейства изометричных данной 7-гранной призме многогранников, для которых объём вычисляется как корень некоторого многочлена степени 16, с известными коэффициентами, не являющимися, однако, многочленами от квадратов длин ребер и выделенных диагоналей призмы. Объёмы всех построенных в части а) многогранников могут быть получены как корни 256 таких семейств.

2. Алгоритм и доказательство теоремы 1. Так как многочлен объема строится для многогранников с треугольными гранями, мы должны сначала провести триангуляцию поверхности комбинаторно 5-гранной призмы. Для большей наглядности начальные этапы триангуляции проиллюстрированы рисунками 1-3 на примере прямоугольной призмы. Используя диагонали граней, отсечем некоторые вершины степени 3 (на рис. 2 призма показана после отсечения от нее вершины 1 плоскостью, проходящей через вершины $5, 1', 2$, с отсеченным тетраэдром $T_1 :< 151'2 >$, ребра которого заданы диагоналями $< 52 >, < 51' >, < 1'2 >$, а на рис.3 показано положение после отсечения еще вершины $2'$ плоскостью, проходящей через вершины $2, 1, 3'$, с образованием тетраэдра $T_2 :< 2'21'3' >$, стороны которого $< 1'2' >, < 2'3' >, < 2'2 >$ известны как ребра призмы, а стороны $< 21' >, < 23' >, < 1'3' >$ вычисляются как длины диагоналей известных многоугольников).

Замечание 2. Впрочем, здесь есть одна тонкость: если все многоугольные грани выпуклые, тогда после триангуляции с добавлением диагоналей метрика многогранника не изменится, но если есть невыпуклая грань, то при использовании для отсечения вершины диагонали, лежащей вне невыпуклой грани, метрика многогранника изменится (лучше сказать, усложнится ее понимание, так как придется добавить две пары одинаковых граней с противоположными ориентациями), но на значение объема это не повлияет. Примеры показывают, что иногда в случае наличия и невыпуклых граней удается построить триангуляцию без изменения метрики, но в общем случае использование диагоналей вне невыпуклой многоугольной грани неизбежно.

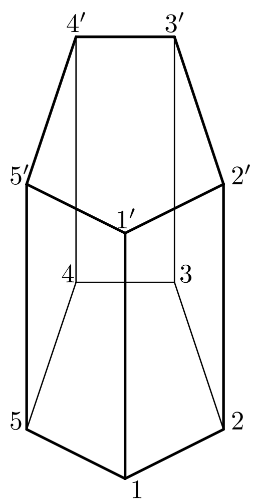

Рис. 1

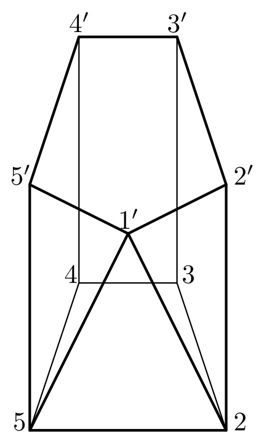

Рис. 2

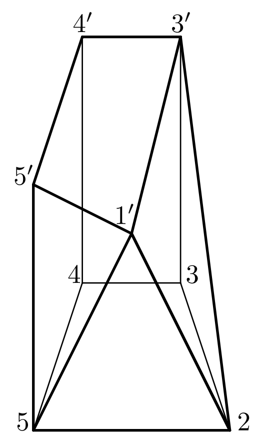

Рис. 3

На третьем этапе отсекаем вершину 3. Отсеченный тетраэдр T_3 имеет вершины $3', 2, 3, 4$. Затем отсекаем вершину 4’. Отсеченный тетраэдр T_4 имеет вершины $4', 3', 4, 5'$. В итоге от исходной призмы остается октаэдр O с вершинами $5, 5', 3', 2, 4, 1'$, см. рис.4.

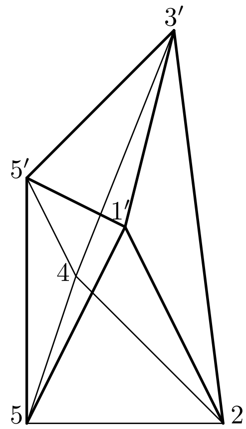

Рис. 4

В этом октаэдре 2 ребра 54 и $5'1'$ являются сторонами оснований, ребро $55'$ является боковым ребром призмы, 4 ребра $5'3', 3'1', 52, 24$ являются диагоналями соответствующих оснований, 5 ребер $43', 21', 51', 23', 45'$ являются диагоналями боковых граней, т.е. все ребра октаэдра известны из внутренней геометрии призмы (в случае правильной 5-угольной призмы все стороны оснований равны a, боковое ребро равняется h, все диагонали боковых граней равны $D = \sqrt{a^2 + h^2}$, а для диагоналей d оснований имеем равенство $d^2 = \dfrac{a^2(3+\sqrt{5})}{2}$, объёмы всех четырех отсекаемых тетраэдров одинаковы и их квадраты равны $\dfrac{a^4h^2(5+\sqrt{5})}{288}$). По проведенному построению для $V_0 = (12v_0)^2$, где v_0 - объём октаэдра, мы из [7] знаем уравнение с целочисленными полиномиальными коэффициентами от квадратов длин его ребер

$$V_0^8 + a_1V_0^7 + ... + a_7V_0 + a_8 = 0. \tag{1}$$

Из метрики призмы известны также и длины всех ребер тетраэдров T_1, T_2, T_3, T_4, и поэтому известны явные выражения для $V_i = (12v_i)^2$, где v_i - ориентированные объёмы соответствующих тетраэдров $T_i, 1 \le i \le 4$. Обозначим через v - ориентированный объём данного многогранника. Считая ориентации данной призмы и всех построенных тетраэдров и октаэдра согласованными, можем написать равенство

$$12v = 12v_0 + \varepsilon_1|12v_1| + \varepsilon_2|12v_2| + \varepsilon_3|12v_3| + \varepsilon_4|12v_4|, \tag{2}$$

где $\varepsilon_i, 1 \le i \le 4$, принимают все возможные значения комбинаций ±1, что соответствует возможным значениям объёмов всех многогранников, изометричных данной призме с выбранной нами триангуляцией при отсечении вершин (имеется в виду, что ориентация полученного октаэдра «унаследована» от ориентации самого многогранника).

Дальше возможны два пути нахождения многочлена для объёма многогранников с комбинаторным строением типа 5-угольной призмы. Первый путь —

исключить из уравнения (2) коэффициенты ε_i, например, по примененному в [8] методу, тогда для V_0 получим полиномиальное уравнение 16-й степени со свободным членом вида $V^{16}+\ldots$ и совместный результант этого уравнения с уравнением (1) даст для $V=(12v)^2$ искомое уравнение степени 128 (и при этом для нахождения результанта надо будет вычислить определитель порялка 24x24). Этот путь даст нам объёмы всех многогранников, которые можно получить из «призмы», допуская изломы граней по их диагоналям. Видим, что таких многогранников очень много, но их комбинаторное строение сильно отличается от комбинаторного строения исходного многогранника (все грани становятся треугольными). К тому же вычисление определителя порядка 24 - задача не из простых, так как даже в случае правильной 5-гранной призмы уравнение для объёма октаэдра из рис. 4 оказывается вот таким длинным:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v^8}-1/2(16\sqrt{5}h^2a^4-3\sqrt{5}a^6-17a^6+36h^2a^4)\mathbf{v^7}-\\
&1/16(1008\sqrt{5}h^4a^8+75a^{12}+4810h^2a^{10}+2324h^4a^8+95\sqrt{5}a^{12}+2102\sqrt{5}h^2a^{10})\mathbf{v^6}+\\
&5/32(5659\sqrt{5}h^4a^{14}+1329\sqrt{5}h^2a^{16}+12537h^4a^{14}+\\
&224\sqrt{5}h^6a^{12}+30a^{18}+2825h^2a^{16}+484h^6a^{12})\mathbf{v^5}\\
&-5/512(159540h^6a^{18}-75a^{24}+5080\sqrt{5}h^2a^{22}+71308\sqrt{5}h^6a^{18}+\\
&144850\sqrt{5}h^4a^{20}-172604h^8a^{16}+13600h^2a^{22}-\\
&77152\sqrt{5}h^8a^{16}-25\sqrt{5}a^{24}+325610h^4a^{20})\mathbf{v^4}\\
&-25/512(725h^2a^{28}-8836h^{10}a^{20}-20960h^4a^{26}-\\
&3952\sqrt{5}h^{10}a^{20}-126190h^6a^{24}+275\sqrt{5}h^2a^{28}+\\
&81887\sqrt{5}h^8a^{22}-9380\sqrt{5}h^4a^{26}-56398\sqrt{5}h^6a^{24}+183077h^8a^{22})\mathbf{v^3}+\\
&25/4096(164175\sqrt{5}h^8a^{28}-555400h^6a^{30}-737044h^{12}a^{24}+\\
&367115h^8a^{28}-248480\sqrt{5}h^6a^{30}+41325h^4a^{32}-\\
&329616\sqrt{5}h^{12}a^{12}+561518\sqrt{5}h^{10}a^{26}+\\
&18375\sqrt{5}h^4a^{32}+1255570h^{10}a^{26})\mathbf{v^2}+125/8192(323730h^8a^{34}+377217\sqrt{5}h^{12}a^{30}-\\
&207364h^{14}a^{28}+144780\sqrt{5}h^8a^{34}+843483h^{12}a^{30}-\\
&44225h^6a^{36}-380191\sqrt{5}h^{10}a^{32}-92736\sqrt{5}h^{14}a^{28}-\\
&19775\sqrt{5}h^6a^{36}-850135h^{10}a^{32})\mathbf{v}+\\
&258630625/65536h^{12}a^{36}+905625\sqrt{5}/4096h^{16}a^{32}-\\
&77866875/32768h^{14}a^{34}-21478125/8192h^{10}a^{38}+\\
&32400625/65536h^{16}a^{32}-34823125\sqrt{5}/32768h^{14}a^{34}+\\
&115663125\sqrt{5}/65536h^{12}a^{36}+35278125\sqrt{5}/131072h^8a^{40}-\\
&19210625\sqrt{5}/16384h^{10}a^{38}+78884375/131072h^8a^{40} \qquad (A)
\end{aligned}
$$

(здесь $v=(6v_0)^2$, где v_0 - объём октаэдра; выбор переменной в виде $v=(12v_0)^2$ даст по теории целые коэффициенты относительно степеней a^2,h^2,d^2,D^2, но в формулу для длины диагонали $d^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}a^2$ в знаменателе есть 2, поэтому от дробей окончательно избавиться не удастся).

Поэтому можно предложить второй путь поиска формулы для объёма «призмы» — расставить в равенстве (2) все значения ε_i согласно их геометрическому смыслу (т.е принять во внимание, должен ли прибавляться объём отсекаемого тетраэдра к объёму получаемого после его отсечения многогранника или же он должен вычитаться. например, в случае положительно ориентированного выпуклого тела объёмы всех отсекаемых тетраэдров вычитаются, поэтому в правой части все $\varepsilon_i, 1 \leq i \leq 4$, нужно брать равными $+1$). Значения объёмов тетраэдров нам известны (но не в виде многочленов от длин ребер и диагоналей граней, а в виде квадратного корня от таких многочленов), обозначим их сумму с учетом выбранных величин $\varepsilon_i, 1 \leq i \leq 4$, как σ. Тогда для $V_0 = (12v_0)^2$ из (2) получим уравнение

$$V_0 = (12v - \sigma)^2 \tag{3}$$

и подставляя это значение V_0 в (1) (или, что то же самое, вычисляя результант многочленов (1) и (3)), находим многочлен 16-й степени для $12v$. При желании, выделяя отдельно в правую часть нечетные степени от v и возводя обе части в квадрат, получим полиномиальное уравнение 16-й степени для $V = (12v)^2$, но коэффициенты его, уже как было сказано, не будут многочленами от квадратов длин ребер и диагоналей граней. Для нахождения всех объёмов надо будет составить такого же вида 16 уравнений.

В случае правильной 5-гранной призмы для объёма октаэдра имеем вышеприведенное уравнение (A), поэтому при выборе всех четырех $\varepsilon_i = 1$ достаточно подставить в уравнение (A) вместо $v = 6v_0$ выражение $V - 2ha^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ и получится уравнение для V, где среди корней будет и объём призмы $v_p = V/6$. К сожалению, запись полученного уравнения так велика, что она займет несколько страниц текста, поэтому явный вид уравнения мы опускаем.

3. Алгоритм и доказательство теоремы 2. Пусть на рис. 5 представлена комбинаторная схема 6-гранной призмы.

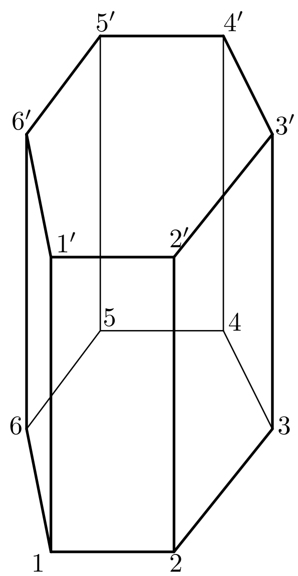

Рис. 5

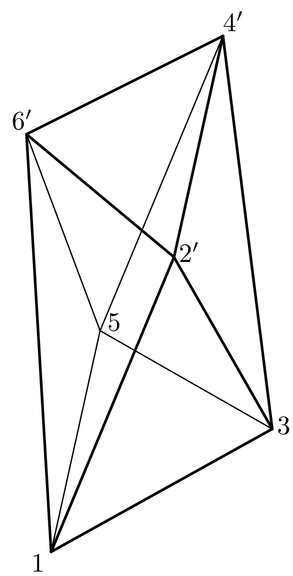

Рис. 6

Отсекая поочередно 6 вершин $2, 3', 4, 5', 6, 1'$ тетраэдрами $T_1 :< 2132' >, T_2 :< 3'32'4' >, T_3 :< 434'5 >, T_4 :< 5'4'56' >, T_5 :< 6156' >, T_6 :< 1'6'2'1 >$, приходим к октаэдру на рис. 6 вершинами $1, 6', 5, 3, 2', 4'$ и с 6 ребрами $13, 35, 51, 2'4', 2'6', 4'6'$, являющимися малыми диагоналями оснований, с 6 ребрами $16', 12', 34', 32'$, $54'$, $56'$, являющимися диагоналями боковых граней (в случае правильной 6-гранной призмы все малые диагонали оснований имеют одну и ту же длину $d = a\sqrt{3}$, а длины диагоналей боковых граней тоже одинаковы и равны $D = \sqrt{a^2 + h^2}$, где a - длина стороны основания, h — высота призмы, а квадраты объёмов v_i всех отсеченных тетраэдров задаются одной изящной формулой $(12v_i)^2 = 3a^4h^2$). Пусть объёмы отсеченных тетраэдров T_i обозначены как $v_i, 1 \le i \le 6$; тогда для объёма v многогранника имеем равенство

$$12v = 12v_0 + \varepsilon_1|12v_1| + ... + \varepsilon_6|12v_6|, \tag{4}$$

где $\varepsilon_i, 1 \le i \le 6$, принимают все возможные значения комбинаций ± 1, что соответствует возможным значениям объёмов всех многогранников, изометричных данной призме с выбранной нами триангуляцией (снова имеется в виду, что ориентация полученного октаэдра «унаследована» от ориентации самого многогранника).

Рассуждая как и в случае 5-гранной призмы, можем получить для квадрата объёма триангулированной 6-гранной призмы полиномиальное уравнение 512-й степени. Но опять можно предложить другой способ - не искать одно уравнение для объёмов **всех** многогранников, изометричных призме с данной триангуляцией, а рассмотреть 64 уравнений вида (4) для каждой комбинации единичных $\pm\varepsilon$ и с их помощью исключить v_0 из уравнения (1). Получатся 64 уравнения 16-й степени, но зависимость их коэффициентов от длин ребер призмы уже не будет полиномиальной. В то же время число всех корней у этой совокупности уравнений будет 1024, что в точности равно, с учетом двух возможных ориентаций, числу корней общего уравнения.

Так как у полученного октаэдра длины ребер имеют всего два значения, то многочлен для его объёма v_0 весьма прост:

$$V_0^8 + 16(d^6 - 3d^4D^2)V_0^7 = 0,$$

где $d^2 = 3a^2, D^2 = a^2 + h^2$, а $V_0 = (12v_0)^2$. Подстановка в это уравнение значения $12v_0 = 12v - 6(12v_T), 12v_T = ha^2\sqrt{s}$ приводит к объявленному в формулировке теоремы 2 многочлену.

4. О теореме 3 и о случае 8-гранной призме. Для доказательства теоремы 3 не нужно никаких новых идей, все делается в полной аналогии с предыдущими рассуждениями. Но проблема при явном выписывании многочлена объёма для правильной 7-гранной призмы будет в нахождении длины диагонали правильного 7-угольника через длину a его стороны, так как ее надо будет искать через решение некоторого уравнения 3-й степени.

А для случая 8-гранной призмы покажем, что отсечением нескольких вершин степени 3 невозможно свести тело 8-гранной призмы к какому-нибудь многограннику (октаэдру, кубу или пирамиде), для которого многочлен объёма было бы легко вычислить.

Итак, пусть рис. 7 соответствует комбинаторной модели 8-гранной призмы.

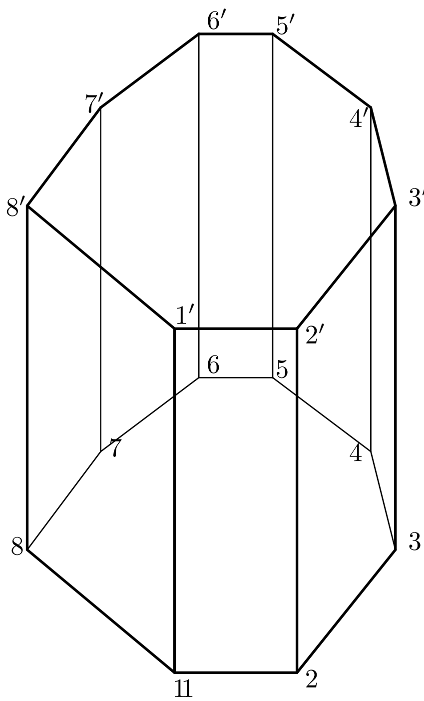

Рис. 7

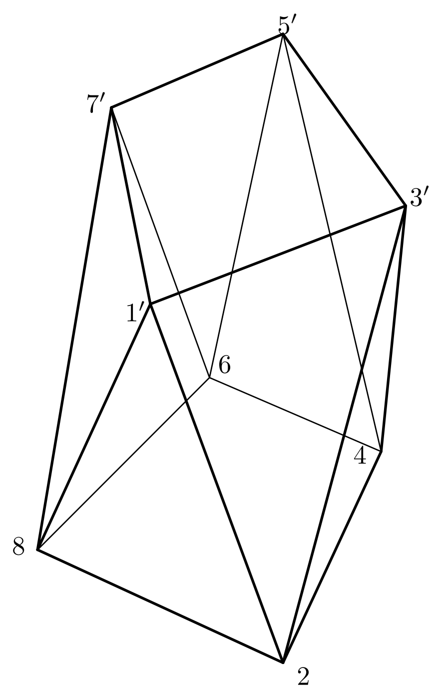

Рис. 8

Как видим, после применения стандартной операции отсечения вершин и достижения при каждой оставшейся вершине индекса 4 получается 8-вершинник, который можно трактовать как куб с триангулированными боковыми гранями. Но эта триангуляция не та, которая позволила выписать в [**?**] для объема куба соответствующий многочлен объёма. В принципе для многогранника на рис.8 тоже можно предложить алгоритм нахождения его многочлена объёма, но такой подход даст для исходной призмы многочлен объёма очень большой степени, так как он будет охватывать объёмы всех изометрических реализаций внутренней геометрии призмы с триангуляцией. Поэтому более интересным и более перспективным был бы поиск многочлена объёма только для тех многогранников, которые имеют **те же грани**, что и исходная призма (т.е. для изометричных многогранников с одинаковым комбинаторным строением и с жесткими гранями). Есть основания считать, что для данного многогранника с нетреугольными гранями изометричных ему многогранников с сохранением граней существенно меньше, чем в случае симплициальных многограников, так как должны сохраняться не только длины ребер, но и длины всех диагоналей на гранях. Во всяком случае, при условии сохранения нетреугольных граней есть очень обширные классы неизгибаемых многогранников, см. работы [9], [10], [11]), а такие изгибаемые многогранники пока известны лишь в редких примерах, см., например, [12], [13]. Поэтому, если изометричных несимплициальных многогранников с данным комбинаторным строением мало, то естественно ожидать, что их многочлен объема должен иметь не очень большую степень. Как показывает предложенный выше подход, в этом случае можно искать многочлены, коэфициенты которых вовсе не обязаны иметь полиномиальную зависимость от метрики многогранника (но, по-видимому, должна оставаться их алгебраическая зависимость от метрики многогранника).

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

Выражаем благодарность анонимному рецензенту за ценные замечания по изложению и содержанию статьи.

References

[1] I.Kh. Sabitov, *The volume of a polyhedron as a function of its metric*, Fundam. i prikladnaya matematica, **2**:4 (1996), 1235–1246. MR1785783

[2] I.Kh. Sabitov, *A generalized Heron–Tataglia formula and some its consequences*, Mathem. sbornik, **189**:10 (1998), 105–134. MR1691297

[3] I.Kh. Sabitov, *The volume as a metric invariant of polyhedra*, Discrete and Computatioal Geometry, **20**:4 (1998), 405–425. MR1651896

[4] A.V. Astrelin, I.Kh. Sabitov, *A canonical polynomial for the volume of a polyheron*, Uspekhi math. nauk, **54**:2 (1999), 165–166. MR1711247

[5] I.Kh. Sabitov, *Algebraic methodes for solution of polyhedra*, Uspekhi math. nauk, **66**:3 (2011), 3–66. MR2859189

[6] D.I. Sabitov, I.Kh. Sabitov, *Volume polynomials for polyhedra of hexagonal type*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 1078–1087. MR3744039

[7] A.V. Astrelin, I.Kh. Sabitov, *A minimal-degree polynomial for detemining the volume of an octahedron from its metrice*, Uspekhi math. nauk, **50**:5 (1995), 245–246. MR1365059

[8] D.I. Sabitov, I.Kh. Sabitov, *Volume polynomials for some polyhedra in spaces of constant curvature*, Modelirovanie i analys informatsionnykh system, **19**:6 (2012), 159–167.

[9] N.P. Dolbilin, M.A. Shtan'ko, M.I. Shtogrin, *On rigidity of polyhedral spheres with even-angle faces*, Uspekhi math. nauk, **51**:3 (1996), 197–198. MR1406063

[10] N.P. Dolbilin, M.A. Shtan'ko, M.I. Shtogrin, *Rigidity of a quadrillage of the torus*, Uspekhi math. nauk, **54**:4 (1999), 167–168. MR1741291

[11] M.I. Shtogrin, *Rigidity of a quadrillage of the pretzel*,Uspekhi math. nauk, **54**:5 (1999), 183–184. MR1741682

[12] V.A. Alexandrov, *A new example of a flexing polyhedron*, Sibirskii matem. jurnal, **36**:6 (1995), 1215–1224. MR1371623

[13] M.I. Shtogrin, *On flexible polyhedral surfaces*, Trudy MIAN imeni Steklova, **288** (2015), 171–183. MR3485708

Denis Sabitov
Skolkovo Institute of Science and Technology,
Skolkovo Innovation Center,
3, Nobel str.,
Moscow, 143026, Russia
E-mail address: sabitovdi@yandex.ru

Idzhad Kh. Sabitov
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory
Moscow, 119991, Russia
E-mail address: isabitov@mail.ru