S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 465–480 (2019) УДК 512.55
DOI 10.33048/semi.2019.16.029 MSC 16P10

О ГРАФАХ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ КОНЕЧНЫХ КОММУТАТИВНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ КОЛЕЦ

Е.В. ЖУРАВЛЕВ, А.С. МОНАСТЫРЕВА

Abstract. We describe the zero divisor graph of a commutative finite local rings R of characteristic 2 with Jacobson radical J such that $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$, $J^4 = (0)$ and $F = R/J \cong GF(2^r)$, the finite field of 2^r elements.

Keywords: finite ring, local ring, zero divisor graph.

1. Введение

Все кольца, рассматриваемые в данной работе, являются конечными, ассоциативными и содержат единицу. Обозначим через $J = J(R)$ и R^* радикал Джекобсона и группу обратимых элементов кольца R, $F = GF(p^r)$ – конечное поле из p^r элементов, $q = p^r$, и $\mathbb{Z}_n$ – кольцо классов вычетов по модулю n.

Графом делителей нуля $\Gamma(R)$ кольца R будем называть граф, вершинами которого являются делители нуля кольца (односторонние и двусторонние), причем две вершины x, y (не обязательно различные) соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$. Впервые такие графы были определены Д. Андерсоном, П. Ливингстоном и И. Беком в работах [1, 2]. Одним из направлений исследований в этой области стало описание колец, граф делителей нуля которых удовлетворяет определенному условию. Например, полностью описаны кольца с планарными графами делителей нуля [3, 4, 5, 6], кольца, имеющие эйлеровы графы делителей нуля [7], и конечные кольца с полными двудольными графами делителей нуля [8]. В работах [9, 10] получено описание многообразий колец, в которых конечные кольца, имеющие изоморфные графы делителей нуля, изоморфны друг другу.

Zhuravlev, E.V., Monastyreva, A.S., On zero divisor graphs of finite commutative local rings.

Поступила 26 марта 2018 г., опубликована 2 апреля 2019 г.

Естественно возникает вопрос о нахождении и изображении графа делителей нуля для конкретного конечного кольца. Но достаточно сложно изобразить все вершины графа даже для колец небольших порядков, а в ситуации, когда рассматриваются кольца порядка p^n (n – переменная величина), это вообще невозможно. Поэтому необходимо разбить множество вершин графа на классы эквивалентности, причем так, чтобы не нарушалось представление о строении графа в целом. В работах [11, 12] Н. Блумфилд предложил способ решения этой проблемы для коммутативных колец, и далее мы опишем его.

Пусть S – коммутативная полугруппа с нулем и $x \in S$. Аннулятором элемента x будем называть множество

$$\mathrm{Ann}(x) = \{y \in S \mid xy = 0\}.$$

Введем следующее отношение эквивалентности:

$$\text{для любых } x, y \in S \quad x \sim y \Leftrightarrow \mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(y).$$

Класс эквивалентности элемента $x \in S$ будем обозначать $[x]$, а соответствующее фактормножество $S/\!\sim$.

Отношение $\sim$ является конгруэнцией на S: для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ если $x_1 \sim x_2$ и $y_1 \sim y_2$, то $x_1x_2 \sim y_1y_2$. Следовательно, мы можем рассматривать фактормножество $S/\sim$ как полугруппу относительно операции $[x][y] = [xy]$. Причем, если S содержит ноль, то $S/\!\sim$ также содержит ноль.

В новом графе $\Gamma(S/\sim)$, две вершины $[x]$, $[y]$ (не обязательно различные) соединяются ребром (или петлей) тогда и только тогда, когда $xy = 0$ (равносильно $[x][y] = [0]$). Если $[x] \in \Gamma(S/\sim)$, то либо для любых $a, b \in [x]$ $ab = 0$, либо для любых $a, b \in [x]$ $ab \neq 0$. Таким образом, всякая вершина $[x]$ с петлей в $\Gamma(S/\sim)$ является полным подграфом в $\Gamma(S)$, все вершины которого имеют петли, а всякая вершина $[x]$ без петли в $\Gamma(S/\!\sim)$ это пустой подграф $\Gamma(S)$ (то есть множество изолированных вершин).

Если для некоторых коммутативных колец R_1 и R_2 графы $\Gamma(R_1/\sim)$ и $\Gamma(R_2/\sim)$ изоморфны и соответствующие $\sim$-классы имеют равные порядки, то графы $\Gamma(R_1)$ и $\Gamma(R_2)$ также изоморфны (см. [11]).

2. Локальные кольца

Кольцо R называется локальным, если $R/J = F$ – поле. Все делители нуля локального кольца образуют радикал J, и всякий элемент локального кольца является либо обратимым, либо нильпотентным (см. [13]). Одним из примеров локальных колец являются так называемые кольца Галуа $GR(p^{nr}, p^n)$, представимые в виде $\mathbb{Z}_{p^n}[x]/(f)$, где p – простое число, f – унитарный многочлен степени r, образ которого при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}_{p^n}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$ является неприводимым над $\mathbb{Z}_p$ многочленом. В частности, $GR(p^n, p^n) = \mathbb{Z}_{p^n}$ и $GR(p^r, p) = GF(p^r)$. Интерес к локальным кольцам обусловлен тем, что всякое конечное коммутативное кольцо с единицей является прямой суммой локальных колец (см. [13, 14]).

Следующее предложение содержит хорошо известные результаты из теории конечных колец (см. [13, 14, 15])

Предложение 1. *Пусть R – локальное кольцо. Тогда существует простое число p и натуральные числа n, r, такие, что*

(1) $|R| = p^{nr}$;

(2) $J^n = 0$;
(3) $|J| = p^{(n-1)r}$;
(4) $\mathrm{char} R = p^k$, *где* $1 \leq k \leq n$;
(5) *если* $n = k$, *то* R *является кольцом Галуа* $GR(p^{kr}, p^k)$. *В частности,* $J = pR$ *и* $R = \mathbb{Z}_{p^k}[b]$, *где* b *– элемент* R *мультипликативного порядка* $p^r - 1$;
(6) *если* $\mathrm{char}(R) = p^k$, *то* R *содержит максимальное подкольцо Галуа* $R_0 = GR(p^{kr}, p^k) = \mathbb{Z}_{p^k}[b]$ *и если* R_0' *– другое максимальное подкольцо Галуа кольца* R, *то существует обратимый элемент* $x \in R$ *такой, что* $R_0' = xR_0x^{-1}$;
(7) *Существуют элементы* $m_1, \ldots, m_h \in J$ *и* $\sigma_1, \ldots, \sigma_h \in \mathrm{Aut}(R_0)$ *такие, что* R *раскладывается в прямую сумму левых* R_0*-модулей*

$$R = R_0 \oplus R_0 m_1 \oplus \ldots \oplus R_0 m_h,$$

где $m_i r_0 = r_0^{\sigma_i} m_i$, *для всех* $i = \overline{1, h}$ *и для любого элемента* $r_0 \in R_0$. *Отсюда, в частности, следует равенство*

$$J = pR_0 \oplus R_0 m_1 \oplus \ldots \oplus R_0 m_h.$$

В работах [11, 12, 16] были описаны графы делителей нуля коммутативных локальных колец R порядка p^n, при $n \leq 5$. Авторы воспользовались классификацией конечных колец, предложенной в работах [17, 18, 19, 20]. Зная правила умножения элементов колец, А. Тадэйенфа и А. Ашрафи использовали представление графа делителей нуля в виде объединения и суммы полных и пустых графов (см. [16]). Н. Блумфилд (см. [12]) привел в качестве основного результата геометрическое изображение графа $\Gamma(R/\sim)$ таких колец. На данный момент, классификация коммутативных локальных колец порядка p^n, $n > 5$, приведена лишь в некоторых частных случаях. Так, например, в работе [21] классифицированы с точностью до изоморфизма все конечные коммутативные локальные кольца R с условиями $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$, $J^4 = (0)$ и $F = R/J \cong GF(2^r)$. Это кольца порядка 2^{6r}. Наша цель – указать $\sim$-классы и геометрическое изображение графов $\Gamma(R/\sim)$ таких колец.

Пусть R – коммутативное локальное кольцо характеристики 2 и $J^4 = 0$, $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$. Тогда $R_0 = GF(2^r) = F$,

$$R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw$$

и

$$J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw,$$

где $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w\}$ – базис идеала J над полем F (см. предложение 1), причем $u_1, u_2 \in J \setminus J^2$, $v_1, v_2 \in J^2 \setminus J^3$, $w \in J^3$. Так как $u_i u_j \in J^2$ и $u_i v_j \in J^3$, то

$$u_i u_j = a_{ij}^{(1)} v_1 + a_{ij}^{(2)} v_2 + b_{ij} w \quad \text{и} \quad u_i v_j = c_{ij} w, \quad v_j u_i = d_{ij} w$$

для некоторых $a_{ij}^{(1)}$, $a_{ij}^{(2)}$, b_{ij}, c_{ij}, $d_{ij} \in F$, $i = \overline{1, 2}$. Пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

– матрицы умножения кольца R. Тогда

$$\begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 \\ u_2u_1 & u_2u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix} v_2 + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} w,$$

$$\begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 \\ u_2v_1 & u_2v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} w.$$

Причем, так как R – коммутативное кольцо, то $C = D$, а матрицы A_1, A_2, B являются симметрическими.

Далее, введем вспомогательные определения и укажем список всех попарно неизоморфных колец, рассматриваемых в данной ситуации (см. [21]).

Пусть δ такой элемент F, что для любого $x \in F$ $\delta \neq x + x^2$. Пусть

$$M = \{z \in F \,|\, \forall s \in \{0,1\}\ \forall a, c \in F,\ a \neq 0 \text{ или } c \neq 0,\ (\eta(1+s) + \mu\delta)z + \eta \neq 0\},$$

где $\mu = a^2c + ac^2 + c^3(1+\delta)$, $\eta = a^3 + ac^2\delta + c^3\delta$. Рассмотрим множество функций

$$\mathcal{K} = \{\varphi_{s,a,c} : M \to F\}, \quad \varphi_{s,a,c}(z) = \frac{(\eta + \mu s)z + \mu}{(\eta(1+s) + \mu\delta)z + \eta},$$

где $s \in \{0,1\}$, $a, c \in F$, $a \neq 0$ или $c \neq 0$. Относительно бинарной операции $(\phi_1 \circ \phi_2)(z) = \phi_1(\phi_2(z))$ $(\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{K})$ данное множество образует группу, которая действует на множестве M (см. [21]). Множество M разбивается на непересекающиеся орбиты, обозначим через $\mathcal{K} \setminus M$ множество их представителей.

Все попарно неизоморфные коммутативные кольца, рассматриваемые в данной работе, определяются следующими четверками матриц (см. теорема 1, [21, с. 636]):

1) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

2) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

3) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

4) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

5) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$,

где δ – такой элемент F, что для любого $x \in F$ $\delta \neq x^2 + x$;

6) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = D = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1 + \delta z & 1 \end{pmatrix}$,

где $z \in \mathcal{K} \setminus M$, δ – такой элемент F, что для любого $x \in F$ $\delta \neq x^2 + x$;

7) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

8) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C = D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

9) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = D = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

где z – такой элемент F, что $z+1 \notin (F^*)^3$, $z \neq 1$.

Заметим, что при нечетном r в поле $F = GF(2^r)$ из любого элемента однозначно извлекается кубический корень. Поэтому последняя пятерка матриц предполагается только для случая $F = GF(2^r)$, r – четное число.

3. Графы делителей нуля

Приведем несколько полезных свойств $\sim$-классов (см. [12]).

Предложение 2. *Пусть R – коммутативное локальное кольцо и $A \subseteq R$. Если $x \in \operatorname{Ann}(A)$, то $[x] \in \operatorname{Ann}(A)$. То есть, аннулятор всякого подмножества кольца R является объединением $\sim$-классов.*

Предложение 3. *Пусть R – коммутативное локальное кольцо, $J^n = 0$, $J^{n-1} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.*

(1) *Если $x \in J^{n-1} \setminus \{0\}$, то $[x] = \operatorname{Ann}(J) \setminus \{0\}$.*
(2) *Если $x \in J \setminus \{0\}$, $\alpha \in R^*$, $y \in \operatorname{Ann}(J)$, причем элемент $\alpha x + y \neq 0$, то $\operatorname{Ann}(x) = \operatorname{Ann}(\alpha x + y)$.*

Далее, пусть R – коммутативное локальное кольцо. Рассмотрим граф $\Gamma(R/\sim)$ и введем дополнительные обозначения, связанные с группировкой схожих вершин графа. Если в графе $\Gamma(R/\sim)$ содержится полный подграф, вершины которого имеют петли, то мы будем изображать этот подграф с петлями как одну вершину с петлей. Если в множестве вершин графа $\Gamma(R/\sim)$ содержится подмножество попарно не смежных вершин без петель, то мы будем изображать соответствующий подграф как одну вершину без петли. Если же речь идет о группировке вершин графа $\Gamma(R/\sim)$, отличных от двух описанных выше ситуаций, то мы будем изображать соответствующий подграф как одну вершину с пунктирной петлей. Причем, для каждой такой вершины-группы внизу рисунка мы укажем условие при котором ее элементы соединяются ребром, в частности, петлей. Если группа вершин, обозначенная описанным выше способом, соединяется сплошным ребром с какой-либо вершиной $[x]$ графа $\Gamma(R/\sim)$, то это означает, что каждая вершина из группы смежна этой вершине $[x]$. Аналогично, если группа вершин, обозначенная описанным выше способом, соединяется пунктирным ребром с какой-либо вершиной $[x]$ графа $\Gamma(R/\sim)$, то это означает, что вершина из группы смежна этой вершине $[x]$ при выполнении определенного условия, указанного внизу рисунка.

Для любого коммутативного локального кольца R очевидно $[0] = \{0\}$ и $[1] = R^*$. Для лаконичности изложения, в геометрическое изображение графа $\Gamma(R/\sim)$ не будем включать вершины $[0]$ и $[1]$. Очевидно, что $[0]$ смежна со всеми вершинами графа $\Gamma(R/\sim)$, а $[1]$ смежна только с $[0]$.

Теорема 1. *Пусть R – коммутативное локальное кольцо характеристики* 2 *и $J^4 = 0$, $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$, где $F = R/J = GF(2^r)$. Тогда, в дополнение к $[0] = \{0\}$ и $[1] = R^*$, $R/\sim$ определяется одним из нижеуказанных множеств:*

(1) $[u_1] = F^*u_1 + Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, $[u_2] = (Fu_2 + Fv_2)\setminus\{0\} + Fv_1 + Fw$, $[w] = (Fv_1 + Fw)\setminus\{0\}$.
(2) $[u_1] = F^*u_1 + Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, $[u_2] = F^*u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, $[v_2] = F^*v_2 + Fv_1 + Fw$, $[w] = (Fv_1 + Fw)\setminus\{0\}$;

(3) $[u_1 + n_i u_2] = F^*(u_1 + n_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, *для каждого* $n_i \in F$, $[u_2+k_i v_2] = F^*(u_2+k_i v_2)+Fv_1+Fw$, *для каждого* $k_i \in F$, $[m_i v_1+v_2] = F^*(m_i v_1+v_2)+Fw$, *для каждого* $m_i \in F$, $[v_1] = F^* v_1+Fw$, $[w] = F^* w$;
(4) $[u_1 + n_i u_2] = F^*(u_1 + n_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, *для каждого* $n_i \in F$, $[u_2+k_i v_2] = F^*(u_2+k_i v_2)+Fv_1+Fw$, *для каждого* $k_i \in F$, $[m_i v_1+v_2] = F^*(m_i v_1+v_2)+Fw$, *для каждого* $m_i \in F$, $[v_1] = F^* v_1+Fw$, $[w] = F^* w$;
(5) $[u_1 + n_i u_2] = F^*(u_1 + n_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, *для каждого* $n_i \in F$, $[u_2] = F^* u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, $[v_1 + m_i v_2] = F^*(v_1 + m_i v_2) + Fw$, *для каждого* $m_i \in F$, $[v_2] = F^* v_2 + Fw$, $[w] = F^* w$.
(6) $[n_i u_1 + u_2] = F^*(n_i u_1 + u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, *для каждого* $n_i \in F$, $[u_1] = F^* u_1 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, $[m_i v_1 + v_2] = F^*(m_i v_1 + v_2) + Fw$, *для каждого* $m_i \in F$, $[v_1] = F^* v_1 + Fw$, $[w] = F^* w$.
(7) $[n_i u_1 + u_2] = F^*(n_i u_1 + u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, *для каждого* $n_i \in F$, $n_i \neq 0, 1$, $[u_1] = F^* u_1 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, $[u_2 + k_i v_2] = F^*(u_2 + k_i v_2) + Fv_1 + Fw$, *для каждого* $k_i \in F$, $[u_1 + u_2 + l_i v_1] = F^*(u_1 + u_2 + l_i v_2) + F(v_1 + v_2) + Fw$, *для каждого* $l_i \in F$, $[v_1 + m_i v_2] = F^*(v_1 + m_i v_2) + Fw$, *для каждого* $m_i \in F$, $[v_2] = F^* v_2 + Fw$, $[w] = F^* w$.
(8) $[u_1] = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \gamma w \mid \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma \in F,\ \alpha_1 \neq 0, \alpha_1 \neq \alpha_2\}$, $[u_2] = F^* u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, $[u_1 + u_2 + v_1] = \{\alpha_1(u_1 + u_2) + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \gamma w \mid \alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma \in F, \alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq \beta_2\}$, $[u_1 + u_2] = F^*(u_1 + u_2) + F(v_1 + v_2) + Fw$, $[v_1] = \{\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \gamma w \mid \beta_1, \beta_2, \gamma \in F, \beta_1 \neq \beta_2\}$, $[w] = (F(v_1 + v_2) + Fw) \setminus \{0\}$.
(9) $[n_i u_1 + u_2] = F^*(n_i u_1 + u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, *для каждого* $n_i \in F$, $n_i \neq 0, 1$, $[u_1] = F^* u_1 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, $[u_2 + k_i v_2] = F^*(u_2 + k_i v_2) + Fv_1 + Fw$, *для каждого* $k_i \in F$, $[u_1 + u_2 + l_i v_1] = F^*(u_1 + u_2 + l_i v_2) + F(v_1 + v_2) + Fw$, *для каждого* $l_i \in F$, $[m_i v_1 + v_2] = F^*(m_i v_1 + v_2) + Fw$, *для каждого* $m_i \in F$, $[v_1] = F^* v_1 + Fw$, $[w] = F^* w$.

Для каждого из случаев, геометрическое изображение графа $\Gamma(S/\sim)$*, за исключением вершин* $[0]$ *и* $[1]$*, имеет вид:*

(1)

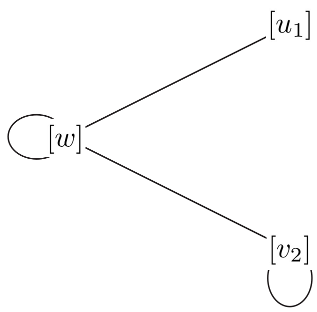


рис. 1

(2)

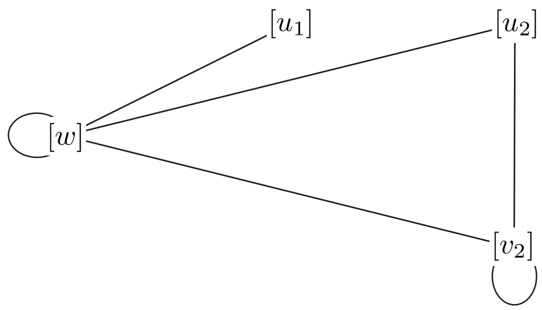
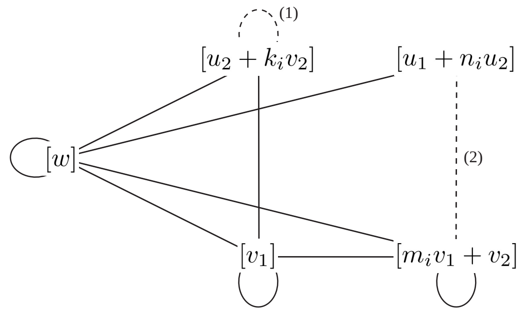


рис. 2

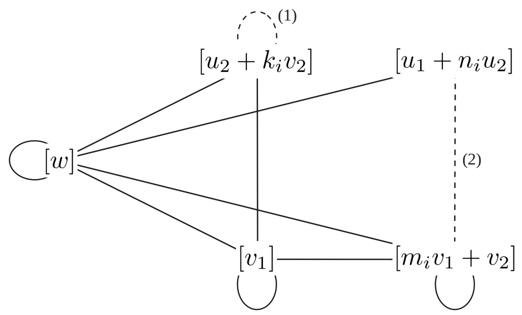
(3)



(1) *если* $k_i = k_j$;
(2) *если* $m_i = n_j$.

рис. 3

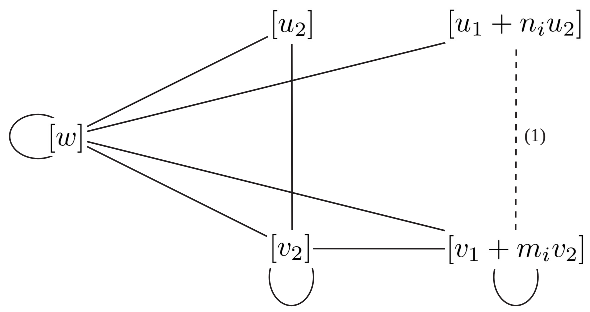
(4)



(1) *если* $k_i + k_j + 1 = 0$;
(2) *если* $m_i = n_j$.

рис. 4

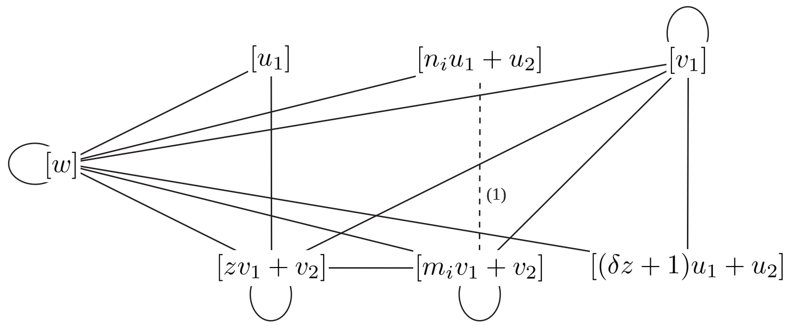
(5)



(1) *если* $m_i = \delta n_j$.

рис. 5

(6)

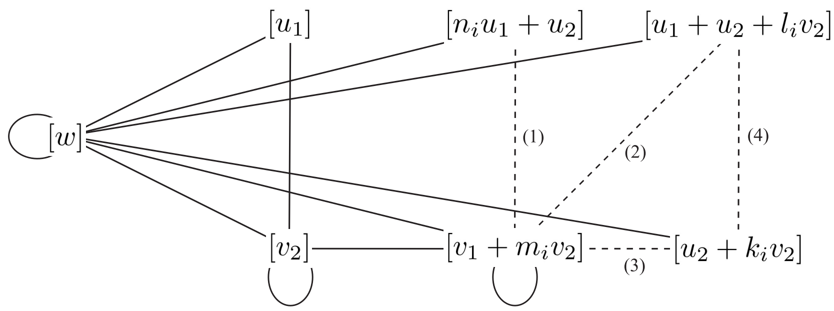


$m_i \neq z$, $n_i \neq \delta z + 1$.

(1) *если* $m_i n_j + z n_j + (\delta z + 1) m_i + 1 = 0$.

рис. 6

(7)



$n_i \neq 0, 1$.

(1) *если* $m_i = n_j + 1$;

(2) *если* $m_i = 0$;

(3) *если* $m_i = 1$;

(4) *если* $l_i = k_j$.

рис. 7

(8)

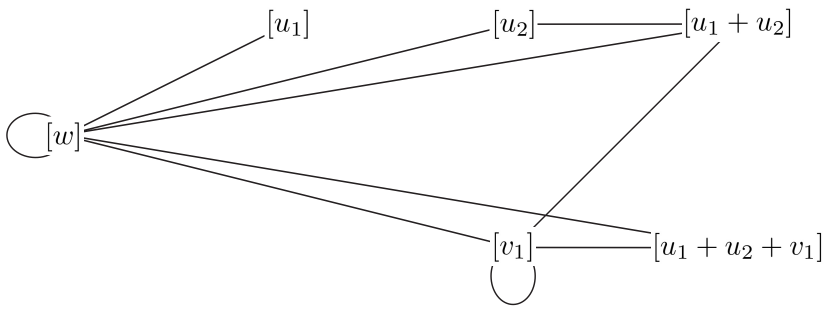
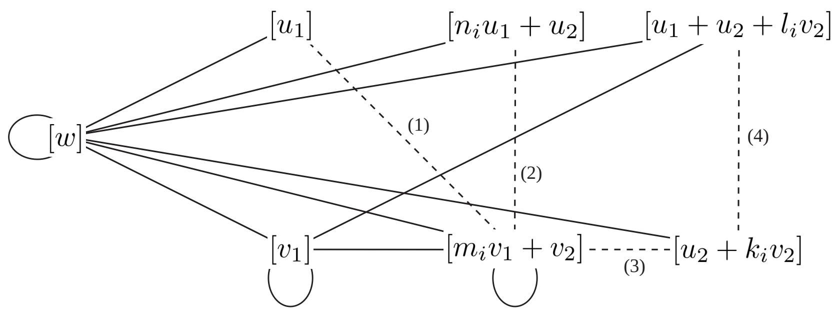


рис. 8

(9)



$n_i \neq 0, 1.$
(1) *если* $m_i = z$;
(2) *если* $1 + m_i + m_in_j + n_jz = 0$, $m_i \neq 1, z$;
(3) *если* $m_i = 1$;
(4) *если* $l_i = (1 + z)k_j$.

рис. 9

Доказательство. При нахождении графа $\Gamma(R/\sim)$ кольца R будем действовать по следующему алгоритму.

(1) Указываем цель доказательства – множества, являющиеся $\sim$-классами.
(2) Находим аннулятор каждого из множеств, при этом замечая, что все элементы одного множества имеют равные аннуляторы и элементы из разных множеств имеют разные аннуляторы. В силу предложения 3, например, вместо множества $F^*(u_1 + u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw$ мы можем рассматривать множество $u_1 + u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$.
(3) Замечаем, что порядок объединения рассматриваемых множеств равен порядку кольца, то есть q^6 (где $q = 2^r$).
(4) Находим разбиение аннуляторов $\sim$-классов на классы эквивалентности (которое существует в силу предложения 2) и приводим геометрическое изображение графа.

Аннулятором класса $[x] \in R/\sim$ назовем аннулятор элемента x и используем для него обозначение $\mathrm{Ann}[x]$. Символами α_1, α_2, β_1, β_2, γ, α_1', α_2', β_1', β_2', γ' обозначим произвольные элементы поля F, а символами x и x' – элементы радикала J вида $x = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \beta_1v_1 + \beta_2v_2 + \gamma w$ и $x' = \alpha_1'u_1 + \alpha_2'u_2 + \beta_1'v_1 + \beta_2'v_2 + \gamma'w$.

Так как доказательства в каждом из случаев однотипны, то мы приведем их только для колец, соответствующих пунктам 1, 5 и 9 из рассмотренной выше классификации.

Случай 1. Пусть
$$\begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 \\ u_2u_1 & u_2u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w, \ \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 \\ u_2v_1 & u_2v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w.$$

Докажем, что
$$R = [1] \cup [u_1] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0],$$
$$[u_1] = F^*u_1 + Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw,$$
$$[u_2] = (Fu_2 + Fv_2)\backslash\{0\} + Fv_1 + Fw,$$
$$[w] = (Fv_1 + Fw)\backslash\{0\}.$$

В этом случае
$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_2' + \alpha_2\alpha_1' = 0, \ \alpha_1\alpha_1' = 0, \ \alpha_1\beta_2' + \beta_2\alpha_1' = 0.$$
Если $x \in u_1 + Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, то $\alpha_1 = 1$ и
$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_2' = 0, \ \alpha_1' = 0, \ \beta_2' = 0.$$
Следовательно,
$$\mathrm{Ann}(x) = Fv_1 + Fw.$$
Если $x \in (Fu_2 + Fv_2)\backslash\{0\} + Fv_1 + Fw$, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$ или $\beta_2 \neq 0$, и
$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_2\alpha_1' = 0, \ \beta_2\alpha_1' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' = 0.$$
Следовательно,
$$\mathrm{Ann}(x) = Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw.$$
Если $x \in (Fv_1 + Fw)\backslash\{0\}$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$, $\beta_1 \neq 0$ или $\gamma \neq 0$, и $xx' = 0$ для любого $x' \in J$. Следовательно,
$$\mathrm{Ann}(x) = J.$$

Далее,
$$|R^*| + |F^*u_1 + Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw| +$$
$$+ |(Fu_2 + Fv_2)\backslash\{0\} + Fv_1 + Fw| + |(Fv_1 + Fw)\backslash\{0\}| + |\{0\}| =$$
$$= q^6 - q^5 + (q-1)q^4 + (q^2-1)q^2 + q^2 - 1 + 1 = q^6 = |R|.$$
Итак,
$$R = [1] \cup [u_1] \cup [u_2] \cup [w] \cup [0]$$
и
$$\mathrm{Ann}[u_1] = [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[u_2] = [u_2] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[w] = J.$$
Геометрическое изображение графа представлено на рисунке 1.

Случай 5. Пусть
$$\begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 \\ u_2u_1 & u_2u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} v_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w, \ \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 \\ u_2v_1 & u_2v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta & 0 \end{pmatrix} w,$$
где δ – такой элемент F, что для любого $x \in F$ $\delta \neq x^2 + x$.

Докажем, что

$$R = [1] \bigcup_{n_i \in F} [u_1 + n_i u_2] \cup [u_2] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0],$$

$$[u_1 + n_i u_2] = F^*(u_1 + n_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw,$$

$$[u_2] = F^* u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw,$$

$$[v_1 + m_i v_2] = F^*(v_1 + m_i v_2) + Fw,$$

$$[v_2] = F^* v_2 + Fw,\ [w] = F^* w.$$

В этом случае

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_2' + \alpha_2\alpha_1' + \alpha_2\alpha_2' = 0,\ \alpha_1\alpha_1' + \delta\alpha_2\alpha_2' = 0,$$
$$\alpha_1\beta_2' + \delta\alpha_2\beta_1' + \delta\beta_1\alpha_2' + \beta_2\alpha_1' = 0.$$

Если $x \in u_1 + n_i u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, для некоторого $n_i \in F$, $i \in \{1, \dots, q\}$, то $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = n_i$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_2' + n_i\alpha_1' + n_i\alpha_2' = 0,\ \alpha_1' + \delta n_i\alpha_2' = 0,\ \beta_2' + \delta n_i\beta_1' + \delta\beta_1\alpha_2' + \beta_2\alpha_1' = 0.$$

Из первых двух равенств получаем

$$\alpha_1' = \delta n_i\alpha_2',\ \alpha_2' + n_i\alpha_1' + n_i\alpha_2' = \alpha_2' + \delta n_i^2\alpha_2' + n_i\alpha_2' = \alpha_2'(1 + \delta n_i^2 + n_i) = 0.$$

Если $1 + \delta n_i^2 + n_i = 0$, $n_i \neq 0$, то $\delta = \left(\frac{1}{n_i}\right)^2 + \frac{1}{n_i}$, противоречие. Следовательно, $\alpha_2' = 0$ и $\alpha_1' = 0$, $\beta_2' = \delta n_i\beta_1'$. Если $n_i = 0$, то также $\alpha_2' = 0$ и $\alpha_1' = 0$, $\beta_2' = \delta n_i\beta_1'$. Таким образом,

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' = \alpha_2' = 0, \beta_2' = \delta n_i\beta_1'.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = F(v_1 + \delta n_i v_2) + Fw.$$

Если $x \in u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' + \alpha_2' = 0,\ \delta\alpha_2' = 0,\ \delta\beta_1' + \delta\beta_1\alpha_2' + \beta_2\alpha_1' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' = 0, \alpha_2' = 0, \beta_1' = 0.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = Fv_2 + Fw.$$

Если $x \in v_1 + m_i v_2 + Fw$, для некоторого $m_i \in F$, $i \in \{1, \dots, q\}$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = m_i$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \delta\alpha_2' + m_i\alpha_1' = 0 \Leftrightarrow \alpha_2' = \frac{m_i}{\delta}\alpha_1'.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = F\left(u_1 + \frac{m_i}{\delta}u_2\right) + Fv_1 + Fv_2 + Fw.$$

Если $x \in v_2 + Fw$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' = 0.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw.$$

Если $x = w$, то $xx' = 0$ для любого $x' \in J$ и, следовательно, $\mathrm{Ann}(w) = J$.

Далее,

$$|R^*| + \left| \bigcup_{n_i \in F} F^*(u_1 + n_i u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw \right| + |F^* u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw| +$$
$$+ \left| \bigcup_{m_i \in F} F^*(v_1 + m_i v_2) + Fw \right| + |F^* v_2 + Fw| + |F^* w| + |\{0\}| =$$
$$= (q^6 - q^5) + (q-1)q^4 + (q-1)q^3 + (q-1)q^2 + (q-1)q + (q-1) + 1 = q^6.$$

Итак,

$$R = [1] \bigcup_{n_i \in F} [u_1 + n_i u_2] \cup [u_2] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0]$$

и для любых $n_i, m_j \in F$, $i, j \in \{1, \ldots, q\}$,

$$\mathrm{Ann}[u_1 + n_i u_2] = [v_1 + \delta n_i v_2] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[u_2] = [v_2] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[v_1 + m_j v_2] = \left[u_1 + \frac{m_j}{\delta} u_2\right] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[v_2] = [u_2] \bigcup_{m_i \in F} [v_1 + m_i v_2] \cup [v_2] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[w] = J.$$

Геометрическое изображение графа представлено на рисунке 5.

Для пояснения используемых обозначений, приведем также геометрическое изображение графа для ситуации $F = GF(4)$, $GF(4) \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1) = \{1, 0, \bar{x}, \bar{x}^2 = \bar{x} + 1\}$, $\delta = x$ (без вершин [0] и [1]):

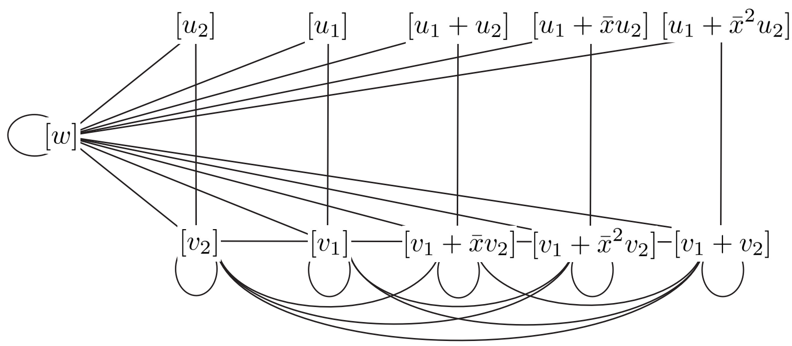


рис. 10

Случай 9. Пусть $F = GF(2^r)$, r – четное число, и

$$\begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 \\ u_2u_1 & u_2u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w, \quad \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 \\ u_2v_1 & u_2v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1 & 1 \end{pmatrix} w,$$

где z – такой элемент F, что $z + 1 \notin (F^*)^3$, $z \neq 1$.

Докажем, что

$$R = [1] \bigcup_{n_i \in F \setminus \{0,1\}} [n_i u_1 + u_2] \cup [u_1] \bigcup_{k_i \in F} [u_2 + k_i v_2] \bigcup_{l_i \in F} [u_1 + u_2 + l_i v_2] \bigcup_{m_i \in F} [m_i v_1 + v_2] \cup [v_1] \cup [w] \cup [0],$$

$$[n_i u_1 + u_2] = F^*(n_i u_1 + u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw,\ n_i \neq 0, 1,$$
$$[u_1] = F^* u_1 + Fv_1 + Fv_2 + Fw,$$
$$[u_2 + k_i v_2] = F^*(u_2 + k_i v_2) + Fv_1 + Fw,$$
$$[u_1 + u_2 + l_i v_1] = F^*(u_1 + u_2 + l_i v_2) + F(v_1 + v_2) + Fw,$$
$$[m_i v_1 + v_2] = F^*(m_i v_1 + v_2) + Fw,$$
$$[v_1] = F^* v_1 + Fw,$$
$$[w] = F^* w.$$

В этом случае

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_2' + \alpha_2\alpha_1' + \alpha_2\alpha_2' = 0,\ \alpha_1\alpha_1' = 0,$$
$$\alpha_1\beta_1' + z\alpha_1\beta_2' + \alpha_2\beta_1' + \alpha_2\beta_2' + \beta_1\alpha_1' + \beta_1\alpha_2' + z\beta_2\alpha_1' + \beta_2\alpha_2' = 0.$$

Если $x \in n_i u_1 + u_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, для некоторого $n_i \in F$, $n_i \neq 0, 1$, $i \in \{1, \ldots, q\}$, то $\alpha_1 = n_i$, $\alpha_2 = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' = 0,\ \alpha_2' = 0,\ \beta_1' = \frac{1 + n_i z}{1 + n_i}\beta_2'.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = F\left(\frac{1 + n_i z}{1 + n_i} v_1 + v_2\right) + Fw.$$

Если $x \in u_1 + Fv_1 + Fv_2 + Fw$, то $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' = 0,\ \alpha_2' = 0,\ \beta_1' = z\beta_2'.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = F(zv_1 + v_2) + Fw.$$

Если $x \in u_2 + k_i v_2 + Fv_1 + Fw$, для некоторого $k_i \in F$, $i \in \{1, \ldots, q\}$, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = k_i$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_2' = \alpha_1',\ \beta_1' + \beta_2' = (1 + z)k_i\alpha_1'.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = F(u_1 + u_2 + (1 + z)k_i v_2) + F(v_1 + v_2) + Fw.$$

Если $x \in u_1 + u_2 + l_i v_2 + F(v_1 + v_2) + Fw$, для некоторого $l_i \in F$, $i \in \{1, \ldots, q\}$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 + \beta_2 = l_i$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' = 0,\ \beta_2' + z\beta_2' + l_i\alpha_2' = 0 \Leftrightarrow \alpha_1' = 0,\ \beta_2' = \frac{l_i\alpha_2'}{1 + z},\ (z \neq 1).$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = F\left(u_2 + \frac{l_i}{1 + z} v_2\right) + Fv_1 + Fw.$$

Если $x \in m_iv_1 + v_2 + Fw$, для некоторого $m_i \in F$, $i \in \{1, \dots, q\}$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = m_i$, $\beta_2 = 1$ и

$$xx' = 0 \Leftrightarrow (z + m_i)\alpha'_1 + (1 + m_i)\alpha'_2 = 0.$$

При $m_i = z$, так как $z \neq 1$, получаем $\alpha'_2 = 0$ и

$$\mathrm{Ann}(x) = Fu_1 + Fv_1 + Fv_2 + Fw.$$

При $m_i = 1$, так как $z \neq 1$, получаем $\alpha'_1 = 0$ и

$$\mathrm{Ann}(x) = Fu_2 + Fv_1 + Fv_2 + Fw.$$

При $m_i \neq z$, $m_i \neq 1$ получаем $\alpha'_1 = \frac{1+m_i}{z+m_i}\alpha'_2$ и

$$\mathrm{Ann}(x) = F\left(\frac{1 + m_i}{z + m_i}u_1 + u_2\right) + Fv_1 + Fv_2 + Fw.$$

Если $x \in v_1 + Fw$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$, $\beta_1 = 1$ и $xx' = 0 \Leftrightarrow \alpha'_1 = \alpha'_2$. Следовательно,

$$\mathrm{Ann}(x) = F(u_1 + u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw.$$

Если $x = w$, то $xx' = 0$ для любого $x' \in J$ и, следовательно, $\mathrm{Ann}(w) = J$.

Далее,

$$|R^*| + \left|\bigcup_{n_i \in F\setminus\{0,1\}} (F^*(n_iu_1 + u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw)\right| +$$
$$+ |F^*u_1 + Fv_1 + Fv_2 + Fw| + \left|\bigcup_{k_i \in F} (F^*(u_2 + k_iv_2) + Fv_1 + Fw)\right| +$$
$$+ \left|\bigcup_{l_i \in F} (F^*(u_1 + u_2 + l_iv_2) + F(v_1 + v_2) + Fw)\right| + \left|\bigcup_{m_i \in F} (F^*(m_iv_1 + v_2) + Fw)\right| +$$
$$+ |F^*v_1 + Fw| + |F^*w| + |\{0\}| = (q^6 - q^5) + (q - 1)(q - 2)q^3 + (q - 1)q^3 +$$
$$+ (q - 1)q^3 + (q - 1)q^3 + (q - 1)q^2 + (q - 1)q + q - 1 + 1 = q^6.$$

Итак,

$$R = [1] \bigcup_{n_i \in F\setminus\{0,1\}} [n_iu_1 + u_2] \cup [u_1] \bigcup_{k_i \in F} [u_2 + k_iv_2]$$
$$\bigcup_{l_i \in F} [u_1 + u_2 + l_iv_2] \bigcup_{m_i \in F} [m_iv_1 + v_2] \cup [v_1] \cup [w] \cup [0]$$

и для любых $l_i, m_i, m_j, n_i, k_i \in F$, $i, j \in \{1, \dots, q\}$,

$$\mathrm{Ann}[n_iu_1 + u_2] = \left[\frac{1 + n_iz}{1 + n_i}v_1 + v_2\right] \cup [w] \cup [0],\ \ n_i \neq 0, 1,$$
$$\mathrm{Ann}[u_1] = [zv_1 + v_2] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[u_2 + k_iv_2] = [u_1 + u_2 + (1 + z)k_iv_1] \cup [v_1 + v_2] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[u_1 + u_2 + l_iv_1] = \left[u_2 + \frac{l_i}{1 + z}v_2\right] \cup [v_1] \cup [w] \cup [0],$$
$$\mathrm{Ann}[zv_1 + v_2] = [u_1] \bigcup_{m_i \in F} [m_iv_1 + v_2] \cup [v_1] \cup [w] \cup [0],$$

$$\mathrm{Ann}[v_1+v_2] = \bigcup_{k_i\in F}[u_2+k_iv_2]\bigcup_{m_i\in F}[m_iv_1+v_2]\cup[v_1]\cup[w]\cup[0],$$

$$\mathrm{Ann}[m_jv_1+v_2] = \left[\frac{1+m_i}{z+m_i}u_1+u_2\right]\bigcup_{m_i\in F}[m_iv_1+v_2]\cup[v_1]\cup[w]\cup[0],\ m_i\neq z,1,$$

$$\mathrm{Ann}[v_1] = \bigcup_{l_i\in F}[u_1+u_2+l_iv_1]\bigcup_{m_i\in F}[m_iv_1+v_2]\cup[v_1]\cup[w]\cup[0],$$

$$\mathrm{Ann}[w] = J.$$

Геометрическое изображение графа представлено на рисунке 9. □

References

[1] I. Beck, *Coloring of commutative rings*, J. Algebra, **116** (1988), 208–226. MR944156

[2] D.F. Anderson, P.S. Livingston, *The zero-divizor graph of a commutative ring*, J. Algebra, **217** (1999), 434–447. MR1700509

[3] S. Akbari, H.R. Maimani, S. Yassemi, *When zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph*, J.Algebra, **270** (2003), 169–180. Zbl 1032.13014

[4] R. Belshoff, J. Chapman, *Planar zero-divisor graphs*, J. Algebra, **316** (2007), 471–480. Zbl 1129.13028

[5] A.S. Kuz'mina, Yu.N. Maltsev, *Nilpotent Finite Rings with Planar Zero-Divisor Graphs*, Asian-European J. Math., **1**:4 (2008), 565–574. MR2474188

[6] A.S. Kuzmina, *On finite non-nilpotent rings with planar zero-divisor graphs*, Discretnaya Matematika, **4** (2009), 60–75. Zbl 1238.16021

[7] A.S. Kuzmina, *Finite rings with Eulerian zero-divisor graphs*, J. of Algebra and Its Appl., **11**:3 (2012), 551–559. Zbl 1260.16020

[8] S. Akbari, A. Mohammadian, *Zero-divisor graphs of non-commutative rings*, J. Algebra, **296**:2 (2006), 462–479. Zbl 1113.16038

[9] A.S. Kuzmina, *On some properties of ring varieties, where isomorphic zero-divisor graphs of finite rings give isomorphic rings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **8** (2011), 179–190.

[10] E.V. Zhuravlev, A.S. Kuz'mina, Yu.N. Mal'tsev, *The description of varieties of rings whose finite rings are uniquely determined by their zero-divisor graphs*, Russian Mathematics, **57** (2013), 10–20. MR3231548

[11] N. Bloomfield, C. Wickham, *Local rings with genus two zero divisor graph*, Communication in Algebra, **38** (2010), 2965–2980. MR2730289

[12] N. Bloomfield, *The zero divisor graphs of commutative local rings of order p^4 and p^5*, Communication in Algebra, **41**:2 (2013), 765–775. MR3011794

[13] B.R. McDonald, *Finite rings with identity*, New York: Decker, Inc., 1974. MR0354768

[14] R. Raghavendran, *Finite associative rings*, Compositio Math., **21** (1969), 195–229. MR0246905

[15] C.J. Chikunji, *Unit groups of cube radical zero commutative completely primary finite rings*, Int. J. Math. Sci., **4** (2005), 572–579. MR2172397

[16] A. Tadayyonfar, A.R. Ashrafi, *The zero divisor graphs of finite rings of cubefree order*, FILOMAT, **29:8** (2010), 1715–1720.

[17] B. Corbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5. Part 1. Nonlocal rings*, J. Algebra, **231**:2 (2000), 677–690. MR1778165

[18] B. Corbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5. Part 2. Local rings*, J. Algebra, **231**:2 (2000), 691–704. MR1778166

[19] V.G. Antipkin, V.P. Elizarov, *Rings of order p^3*, Siberian Mathematical Journal, **23** (1982), 457–464. MR668331

[20] B. Fine, *Classification of finite rings of order p^2*, Mathematics Magazine, **66** (1993), 248–252. MR1240670

[21] E.V. Zhuravlev, *On the classification of finite commutative local rings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 625–638. Zbl 1383.13002

Evgeniy Vladimirovich Zhuravlev
Altai State University,
61, Lenina ave.,
Barnaul, 656049, Russia
E-mail address: evzhuravlev@mail.ru

Anna Sergeevna Monastyreva
Altai State University,
61, Lenina ave.,
Barnaul, 656049, Russia
E-mail address: akuzmina1@yandex.ru