S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 481–492 (2019) УДК 517.965, 517.583
DOI 10.33048/semi.2019.16.030 MSC 39B32, 33E05

РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ. II

А.А. ИЛЛАРИОНОВ

Abstract. Let $s, m, d \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$. We solve the functional equation

$$f_1(\mathbf{u}_1+\mathbf{v})\dots f_{s-1}(\mathbf{u}_{s-1}+\mathbf{v})f_s(\mathbf{u}_1+\ldots+\mathbf{u}_{s-1}-\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{m}\varphi_j(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{s-1})\psi_j(\mathbf{v}),$$

for unknown entire functions $f_1,\dots,f_s : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$, $\varphi_j : (\mathbb{C}^d)^{s-1} \to \mathbb{C}$, $\psi_j : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ in the case of $m \leq s+1$. All non-elementary solutions are described by the Weierstrass sigma-function. Previously, such results were known only for $s = 2$, $m = 1, 2$, as well as for $d = 1$, $s = 2, 3$. The considered equation arises in the study of polylinear functional-differential operators and multidimensional vector addition theorems.

Keywords: addition theorem, functional equation, Weierstrass sigma-function, theta function, elliptic function.

1. Введение

Пусть $s, d, m \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$. Рассмотрим функциональное уравнение

$$f_1(\mathbf{u}_1+\mathbf{v})\dots f_{s-1}(\mathbf{u}_{s-1}+\mathbf{v})f_s(\mathbf{u}_1+\ldots+\mathbf{u}_{s-1}-\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{m}\varphi_j(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{s-1})\psi_j(\mathbf{v}), \tag{1}$$

Illarionov, A.A., Solution of functional equations related to elliptic functions. II.

Работа поддержана РФФИ (проект N 18-01-00638).

Поступила 30 января 2019 г., опубликована 5 апреля 2019 г.

относительно неизвестных функций $f_1, \ldots, f_s : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ и $\varphi_j : (\mathbb{C}^d)^{s-1} \to \mathbb{C}$, $\psi_j : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$. Оно играет важную роль при исследовании полилинейных функционально-дифференциальных операторов и многомерных (векторных) теорем сложения (см. [1, 2, 3]).

Аналогом соотношения (1) при $s = 1$ является уравнение вида

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{r} a_j(\mathbf{u}) b_j(\mathbf{v}). \tag{2}$$

Любая функция f, удовлетворяющая такому разложению, является квазимногочленом. При $s \geq 2$ ситуация значительно усложняется.

Если $s = 2$, то соотношение (1) можно записать в виде

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) g(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\mathbf{u}) \beta_j(\mathbf{v}). \tag{3}$$

Это уравнение изучалось многими авторами (см. [4]–[15]). Однако в одномерном случае ($d = 1$) оно решено только при $n = 1$ (тривиальный случай), $n = 2$ (см. [4, 5, 8, 10]) и $n = 3$ (см. [13]), а в многомерном ($d \geq 2$) — только при $n = 1, 2$ (см. [5, 8]).

Уравнение (1) также решено при $d = 1$, $s = 3$, $m \leq 4$ (см. [10, 13]).

В настоящей работе мы обобщаем результаты [13] на случай произвольных d и s и решаем уравнение (1) при $m \leq s + 1$. Доказательство основано на некоторых идеях и результатах из [12, 13, 5, 8].

Основным для нас будет случай, когда $s = 2$. Рассмотрим его более подробно.

Определение. Пару целых не равных тождественно нулю функций $(f, g) : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ будем называть *решением функционального уравнения* (3), если существуют $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha_j, \beta_j : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$, удовлетворяющие соотношению (3) для всех $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^d$, причем n является наименьшим среди всех возможных.

Пусть $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$, причем пара $(\tilde{f}, \tilde{g})$ получена из пары (f, g) путем применения композиции преобразований следующих четырех видов:

1) $(f, g) \to (g, f)$;
2) $(f, g) \to (f, \hat{g})$, где $\hat{g}(\mathbf{u}) = g(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0)$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{C}^d$;
3) $(f, g) \to (f, ge^L)$, где L — линейная форма $\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$;
4) $(f, g) \to (fe^Q, ge^Q)$, где Q — квадратичная форма $\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$.

Нетрудно проверить, что пары (f, g), $(\tilde{f}, \tilde{g})$ могут быть решениями уравнения (3) только одновременно.

Определение. Будем называть решения (f, g), $(\tilde{f}, \tilde{g})$ уравнения (3) *эквивалентными* и писать $(f, g) \sim (\tilde{f}, \tilde{g})$, если пара $(\tilde{f}, \tilde{g})$ получена из пары (f, g) путем применения композиции преобразований указанных выше четырех видов.

Несложно (см. [8, лемма 3]) получить следующий результат.

Лемма 1. *Пусть (f, g) — решение уравнения (3). Тогда*

1) *если $n = 1$, то $(f, g) \sim (1, 1)$, где 1 — функция тождественно равная единице;*
2) *если $n > 1$, то хотя бы одна из функций f, g имеет нули.*

Уравнение (3) легко решается, если только одна из функций f, g имеет нули.

Лемма 2. *Пусть (f, g) — решение уравнения (3). Если только одна из функций f, g имеет нули, то $(f, g) \sim (Q, 1)$, где Q — квазимногочлен $\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$.*

Доказательство будет приведено в § 2.

Пусть обе функции f и g имеют нули. Случай $n = 2$ рассмотрен в [8].

Теорема 1 ([8]). *Пусть (f, g) — решение уравнения (3) при $n = 2$, причем обе функции f и g имеют нули. Тогда $(f, g) \sim (W, W)$, где $W(\mathbf{u}) = \sigma_\Gamma(L\mathbf{u})$, σ_Γ — сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированная с (возможно вырожденной) решеткой Γ, а L — линейная форма $\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$.*

Основной результат настоящей заметки заключается в следующем.

Теорема 2. *Пусть (f, g) — решение уравнения (3) при $n = 3$, причем обе функции f и g имеют нули. Тогда $(f, g) \sim (S, S)$, где*

$$S(\mathbf{u}) = \sigma_\Gamma(L\mathbf{u})\sigma_\Gamma(L\mathbf{u} - z_0),$$

L — линейная форма $\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$, а $z_0 \in \mathbb{C}$, причем $z_0 \notin (\frac{1}{2}\Gamma) \setminus \Gamma$.

В следующем разделе мы приведем некоторые известные результаты и их следствия, в § 3 докажем теорему 2, а в § 4 используем ее для решения функционального уравнения (1) при любых $s \geq 3$ и $m \leq s + 1$.

Замечание 1. Из классической формулы сложения

$$\sigma_\Gamma(x + y)\sigma_\Gamma(x - y) = \sigma_\Gamma^2(x)\sigma_\Gamma^2(y)(\wp_\Gamma(y) - \wp_\Gamma(x)) \qquad (\wp_\Gamma = -(\ln \sigma_\Gamma)'')$$

вытекает, что пары (W, W) и (S, S) (где $z_0 \notin (\frac{1}{2}\Gamma) \setminus \Gamma$) являются решениями уравнения (3) при $n = 2$ и $n = 3$ соответственно. Если $z_0 \in (\frac{1}{2}\Gamma) \setminus \Gamma$, то множество $\Lambda = \Gamma \cup (\Gamma + z_0)$ является решеткой и $(S, S) \sim (\sigma_\Lambda \circ L, \sigma_\Lambda \circ L)$ в силу квазипериодичности сигма-функции Вейерштрасса. В этом случае (S, S) — решение уравнения (3) при $n = 2$

2. Известные результаты и их следствия

Напомним, что квазимногочленом $Q : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ называется функция вида

$$Q(\mathbf{u}) = P_1(\mathbf{u})e^{L_1\mathbf{u}} + \ldots + P_r(\mathbf{u})e^{L_r\mathbf{u}},$$

где $P_1, \ldots, P_r$ — многочлены, а $L_1, \ldots, L_r$ — линейные формы.

Под решеткой Γ будем понимать дискретную аддитивную подгруппу поля $\mathbb{C}$, т. е. множество одного из следующих трех видов

$$\Gamma = \{0\}, \quad \Gamma = \{m\omega : m \in \mathbb{Z}\}, \quad \Gamma = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\},$$

где $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а ω_1, ω_2 — линейно независимые над $\mathbb{R}$ комплексные числа. Решетки первых двух типов называют вырожденными.

Сигма-функция Вейерштрасса $\sigma_\Gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ассоциированная с решеткой Γ, определяется произведением

$$\sigma_\Gamma(z) = z \cdot \prod_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\gamma}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{\gamma} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2\right).$$

При этом (в вырожденных случаях) $\sigma_\Gamma(z) = z$, если $\Gamma = \{0\}$ и

$$\sigma_\Gamma(z) = \frac{a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cdot\exp\left(\frac{1}{6}\left(\frac{\pi z}{a}\right)^2\right), \text{ если } \Gamma = \{ma : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Функция σ_Γ нечетная и целая (голоморфная на всем $\mathbb{C}$). Все ее нули простые и расположены в точках решетки Γ.

Лемма 3 ([5, лемма 1.3])**.** *Для любого решения (f,g) уравнения (3) существуют такие $c_1, c_2 \in (0,+\infty)$, что для всех $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^d$*

$$|f(\mathbf{u})| + |g(\mathbf{u})| \le c_1 \exp(c_2|\mathbf{u}|^2).$$

Лемма 4. *Пусть целая функция $f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ удовлетворяет вместе с некоторыми $a_j, b_j : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ и $r \in \mathbb{N}$ функциональному уравнению (2). Тогда f — квазимногочлен.*

Доказательство см., например, в [17] при $d = 1$ и в [18] при $d \ge 1$.

Доказательство леммы 2. Пусть, например, функция g не имеет нулей. Тогда $g = e^P$, где P — многочлен степени ≤ 2 согласно оценке из леммы 3. Поэтому $(f,g) \sim (\tilde{f}, 1)$, где $\tilde{f} = fe^{-P}$. Функция $\tilde{f}$ удовлетворяет уравнению вида (2) и поэтому является квазимногочленом. □

Теорема 3 ([12])**.** *Пусть $d = 1$, а $n = 2$ или $n = 3$. Пусть (f,f) — решение уравнения (3). Тогда $(f,f) \sim (h,h)$, где*

$$\begin{aligned} h(z) &= \sigma_\Gamma(z) && \text{при } n = 2,\\ h(z) &= \sigma_\Gamma(z)\sigma_\Gamma(z+z_0) && \text{при } n = 3, \end{aligned}$$

причем $z_0 \notin (\frac{1}{2}\Gamma) \setminus \Gamma$.

Лемма 5 ([13, замечание 3.3])**.** *Пусть (f,g) — решение уравнения (3) при $d = 1$ и $n \le 3$, причем обе функции f и g имеют нули. Тогда $g(z) = f(z+z_0)e^{bz+c}$, $z_0, b, c \in \mathbb{C}$.*

Определение. Пусть $f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ и $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^d$, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$. Тогда через $f_{\mathbf{u},\mathbf{w}}$ обозначаем функцию $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, действующую по формуле:

$$f_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(z) = f(\mathbf{u} + z\mathbf{w}).$$

Лемма 6. *Пусть (f,f) — решение уравнения (3) при некоторых $d > 1$ и $n = m_0$. Пусть $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^d$, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$, причем $f_{\mathbf{u},\mathbf{w}} \not\equiv 0$. Тогда $(f_{\mathbf{u},\mathbf{w}}, f_{\mathbf{u},\mathbf{w}})$ — решение уравнения (3) при $d = 1$ и некотором $n \le m_0$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$f_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(x+y)f_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(x-y) = f(\mathbf{u}+(x+y)\mathbf{w})f(\mathbf{u}+(x-y)\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{m_0} \alpha_j(\mathbf{u}+x\mathbf{w})\beta_j(y\mathbf{w}).$$

□

Для любой функции $f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ полагаем

$$Z_f = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^d : f(\mathbf{u}) = 0\} \qquad \text{(множество нулей функции } f).$$

Так как все нули сигма-функции σ_Γ простые и расположены в точках решетки Γ, то из теоремы 3 и леммы 6 вытекает следующий результат.

Лемма 7. *Пусть (f, f) — решение уравнения (3) при некоторых $d > 1$ и $n \in \{2, 3\}$. Пусть $\mathbf{u} \in Z_f$, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$, причем $f_{\mathbf{u},\mathbf{w}} \not\equiv 0$. Тогда все нули функции $f_{\mathbf{u},\mathbf{w}}$ имеют одинаковую кратность, равную 1 или 2. Если эта кратность равна 2 и $\mathbf{u} = 0$, то множество $Z_f \cap \{z\mathbf{w} : z \in \mathbb{C}\}$ есть аддитивная подгруппа группы $(\mathbb{C}^d, +)$.*

Определение. Будем говорить, что функции $f, \hat{f} : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ имеют *одинаковые множества нулей*, если $Z_f = Z_{\hat{f}}$ и для любых $\mathbf{u} \in Z_f$, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ функции $f_{\mathbf{u},\mathbf{w}}, \hat{f}_{\mathbf{u},\mathbf{w}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ имеют одинаковые множества нулей с учетом их кратности.

Лемма 8. *Пусть $d \geq 1$. Пусть (f, f) и $(\hat{f}, \hat{f})$ — решения уравнения (3) при некоторых $n = n_1$ и $n = n_2$ соответственно. Если f и $\hat{f}$ имеют одинаковые множества нулей, то $f = \hat{f}e^{P_2}$, где P_2 — многочлен степени ≤ 2 (и поэтому $(f, f) \sim (\tilde{f}, \tilde{f})$, $n_1 = n_2$).*

Доказательство. При $d = 1$ доказательство тривиально (см. [12, следствие 1.1]). Пусть $d > 1$. Возьмем любые $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^d$ и $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$. Из условий и рассмотренного выше случая $d = 1$ вытекает, что $f_{\mathbf{u},\mathbf{w}} = \hat{f}_{\mathbf{u},\mathbf{w}} e^{P_{\mathbf{u},\mathbf{v}}}$, где $P_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$ — многочлен степени ≤ 2. Положим $g = f/\hat{f}$. Тогда $g_{\mathbf{u},\mathbf{w}} = e^{P_{\mathbf{u},\mathbf{v}}}$. Поэтому g — целая функция (по теореме Харготса). Кроме того, g не имеет нулей и $g = e^{P_2}$, где P_2 — многочлен степени ≤ 2. $\square$

Лемма 9. *Пусть (f, f) — решение уравнения (3) при $n = 3$, причем $f(0) = 0$. Тогда справедливо хотя бы одно из следующих утверждений:*

a) *для любого $\mathbf{u}_0 \in Z_f$ существует такая постоянная $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, что*

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^d \quad f(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) f(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = C f^2(\mathbf{u}); \tag{4}$$

b) *для любого $\mathbf{u}_0 \in Z_f$ существует такая постоянная $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, что*

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^d \quad f(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}) f(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}) = C f(\mathbf{u}) f(-\mathbf{u}). \tag{5}$$

Лемма доказана в [12, лемма 8] при $d = 1$. Приведенное там доказательство остается в силе и при $d > 1$. Поэтому мы его опускаем.

3. Доказательство теоремы 2

Если $f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^d$ и $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$, то через $m_f(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ обозначаем кратность нуля $z = 0$ функции $f_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(z) = f(\mathbf{u} + z\mathbf{w})$. Отметим, что $f_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(0) \neq 0$ при $\mathbf{u} \notin Z_f$. В этом случае полагаем $m_f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0$.

Сначала исследуем уравнение (3) при дополнительном условии $f = g$.

Лемма 10. *Пусть (f, f) — решение уравнения (3) при $n = 3$, причем $f(0) = 0$. Тогда*

a) *существует подгруппа G группы $(\mathbb{C}^d, +)$ и точка $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{C}^d$, $\mathbf{v}_0 \notin \frac{1}{2}G \setminus G$ такие, что*

$$Z_f = G \cup (G + \mathbf{v}_0); \tag{6}$$

b) *для всех $\mathbf{u}_0 \in Z_f$ и $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$*

$$m_f(0, \mathbf{w}) = m_f(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}). \tag{7}$$

Доказательство. Согласно лемме 7 для всех $\mathbf{u}_0 \in Z_f$ и $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$

$$m_f(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) = m_f(\mathbf{u}_0, -\mathbf{w}) \in \{1, 2\}. \tag{8}$$

1. Пусть выполняется утверждение a) леммы 9. Возьмем любые $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \in Z_f$. Подставляя в (4) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \pm \mathbf{u}_0$, заключаем, что $Cf^2(\mathbf{u}_1 \pm \mathbf{u}_0) = 0$, то есть $\mathbf{u}_1 \pm \mathbf{u}_0 \in Z_f$. Поэтому Z_f — подгруппа группы $(\mathbb{C}^d, +)$. Значит, справедливо утверждение a), в котором $\mathbf{v}_0 = 0$.

Возьмем любую точку $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$. Подставляя в (4) $\mathbf{u} = z\mathbf{w}$, получаем

$$f(\mathbf{u}_0 + z\mathbf{w})f(-\mathbf{u}_0 + z\mathbf{w}) = Cf^2(z\mathbf{w}).$$

Следовательно,

$$m_f(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) + m_f(-\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) = 2m_f(0, \mathbf{w}).$$

Поскольку $0, \pm\mathbf{u}_0 \in Z_f$, учитывая (8), приходим к (7).

2. Пусть выполняется утверждение b) леммы 9. Возьмем любую ненулевую точку $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^d$. Подставляя в (5) $\mathbf{u} = z\mathbf{w}$, получаем соотношение

$$f(\mathbf{u}_0 + z\mathbf{w})f(\mathbf{u}_0 - z\mathbf{w}) = Cf(z\mathbf{w})f(-z\mathbf{w}).$$

Следовательно,

$$m_f(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) + m_f(\mathbf{u}_0, -\mathbf{w}) = m_f(0, \mathbf{w}) + m_f(0, -\mathbf{w}).$$

Учитывая (8), приходим к (7). Осталось доказать утверждение a). Оно заведомо выполнено, если Z_f — подгруппа группы $(\mathbb{C}^d, +)$. Пусть Z_f не является подгруппой. Определим

$$G = \{\mathbf{u}_0 \in Z_f : 2\mathbf{u}_0 \in Z_f\}.$$

Докажем, что

$$-\mathbf{u}_0 \in Z_f \text{ при } \mathbf{u}_0 \in G. \tag{9}$$

Рассматривая соотношение (5) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + z\mathbf{w}$, $z \to 0$, получаем

$$m_f(2\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) + m_f(0, -\mathbf{w}) = m_f(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) + m_f(-\mathbf{u}_0, -\mathbf{w}).$$

Из (7) вытекает, что $m_f(2\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) = m_f(\mathbf{u}_0, \mathbf{w})$. Поэтому

$$m_f(-\mathbf{u}_0, -\mathbf{w}) = m_f(0, -\mathbf{w}) \geq 1.$$

Значит, $f(-\mathbf{u}_0) = 0$. Свойство (9) доказано.

Покажем теперь, что

$$\mathbf{u}_1 \pm \mathbf{u}_0 \in Z_f \text{ при } \mathbf{u}_1 \in Z_f,\ \mathbf{u}_0 \in G. \tag{10}$$

Для этого рассмотрим соотношение

$$f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u})f(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}) = Cf(\mathbf{u})f(-\mathbf{u}), \tag{11}$$

при $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + z\mathbf{w}$, $z \to 0$. В результате, приходим к выводу

$$m_f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0, \mathbf{w}) + m_f(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0, -\mathbf{w}) = m_f(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) + m_f(-\mathbf{u}_0, -\mathbf{w}).$$

Согласно (7), (9) $m_f(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) = m_f(-\mathbf{u}_0, -\mathbf{w})$. Поэтому

$$m_f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0, \mathbf{w}) + m_f(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0, -\mathbf{w}) = 2m_f(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) \geq 2.$$

Учитывая (7), приходим к (10).

Докажем еще одно свойство:

$$\begin{gathered}\text{если } \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in Z_f, \text{ то хотя бы две точки}\\ \text{из } \{\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1, \pm(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)\} \text{ лежат в } Z_f.\end{gathered} \tag{12}$$

Для этого достаточно показать, что

$$f(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)f(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)=0,\quad f(\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_1)f(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1)=0,\quad f(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)f(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1)=0. \tag{13}$$

Полагая в (11) $\mathbf{u}=\mathbf{u}_2$, получаем первое равенство из (13). Меняя местами $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$, получаем второе равенство. Полагая в (11) $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$, приходим к третьему равенству. Из (13) вытекает утверждение (12). Согласно [12, лемма 7] из свойств (10), (12) следует, что множество G есть подгруппа группы $(\mathbb{C}^d,+)$ и $Z_f=G\cup(G+\mathbf{v}_0)$ для любого $\mathbf{v}_0\in Z_f\setminus G$. Так как Z_f не является подгруппой, то $\mathbf{v}_0\notin\frac{1}{2}G$. Утверждение a) доказано. $\square$

Если $\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_d)$, $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_d)\in\mathbb{C}^d$, то полагаем

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}=\sum_{j=1}^{d}u_ja_j.$$

Лемма 11. *Пусть выполняются условия леммы 10. Тогда группу G (из леммы 10) можно представить в виде*

$$G=\{\mathbf{u}\in\mathbb{C}^d:\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}\in\Gamma\}, \tag{14}$$

где Γ — некоторая решетка из $\mathbb{C}$, а $\mathbf{a}\in\mathbb{C}^d\setminus\{0\}$.

Доказательство. Множество G содержит некоторую гиперплоскость L (d-мерного линейного пространства $\mathbb{C}^d$). Действительно, так как f — целая функция, то в некоторой окрестности точки 0 найдется гладкая $(d-1)$-мерная поверхность, которая проходит через точку 0 и содержится в Z_f. Если эта окрестность достаточно мала, то применяя лемму 10, приходим к выводу, что поверхность содержится в G и, значит, лежит в некоторой гиперплоскости L. Так как G — аддитивная группа, то $L\subset G$.

Представим L в виде $L=\{\mathbf{u}\in\mathbb{C}^d:\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}=0\}$, где $\mathbf{a}\in\mathbb{C}^d$. Положим $\Gamma=\{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}:\mathbf{u}\in G\}$. Тогда Γ — подгруппа группы $(\mathbb{C},+)$. Докажем формулу (14). Для этого достаточно установить, что $\mathbf{u}\in G$ при $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}\in\Gamma$. Пусть $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}\in\Gamma$. Тогда найдется такая точка $\mathbf{u}_0\in G$, что $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{a}$. Так как $(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)\cdot\mathbf{a}=0$, то $\mathbf{u}-\mathbf{u}_0\in L\subset G$, следовательно, $\mathbf{u}\in G$. Формула (14) доказана. Поскольку функция f целая и $f\not\equiv0$, из (14) вытекает, что множество Γ дискретное. Значит, Γ — решетка. $\square$

Теорема 4. *Пусть (f,f) — решение уравнения (3) при $n=3$. Тогда $(f,f)\sim(S,S)$, функция S определена в теореме 2.*

Доказательство. Согласно лемме 1 функция f имеет нули. Не умаляя общности считаем, что $f(0)=0$. Согласно леммам 10, 11 выполняются свойства (6), (14). Положим $z_0=\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_0$. Тогда $z_0\notin(\frac{1}{2}\Gamma)\setminus\Gamma$. Определим

$$L=\{\mathbf{u}\in\mathbb{C}^d:\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}=0\}.$$

Пусть разложение функции f в степенной ряд в окрестности точки 0 имеет вид

$$f(\mathbf{u})=c_1P_1(\mathbf{u})+c_2P_2(\mathbf{u})+\dots,$$

где P_j — однородные многочлены степени j, а $c_j\in\mathbb{C}$.

1. Пусть $c_1 \neq 0$. Возьмем любой $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$. Тогда

$$f_{0,\mathbf{w}}(z) = f(z\mathbf{w}) = c_1 P_1(\mathbf{w})z + c_2 P_2(\mathbf{w})z^2 + \dots$$

Так как $f|_L = 0$, то $P_1(\mathbf{w}) = P_2(\mathbf{w}) = \dots = 0$ при $\mathbf{w} \in L$. Отсюда, в частности, следует, что $P_1(\mathbf{u}) = c\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}$, где $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому $f_{0,\mathbf{w}} \equiv 0$, если и только если $\mathbf{w} \in L$. Если $\mathbf{w} \notin L$, то $m_f(0, \mathbf{w}) = 1$. Используя лемму 10 b), приходим к выводу, что все нули функций вида $f_{\mathbf{u}_0,\mathbf{w}}$ (где $\mathbf{u}_0 \in Z_f$, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^d \setminus L$) простые. Положим

$$\hat{f}(\mathbf{u}) = \begin{cases} \sigma_\Gamma(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) & \text{при } z_0 \in \Gamma; \\ \sigma_\Gamma(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\sigma_\Gamma(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} - z_0) & \text{при } z_0 \notin \Gamma. \end{cases}$$

Тогда f и $\hat{f}$ имеют одинаковые множества нулей. Поэтому $(f, f) \sim (\hat{f}, \hat{f})$ согласно лемме 8. Так как функция $\hat{f}(\mathbf{u}) = \sigma_\Gamma(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})$ является решением уравнения (3) при $n = 2$, то утверждение теоремы выполнено.

2. Пусть $c_1 = 0$. Возьмем любой $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^d$ такой, что $f_{0,\mathbf{w}} \not\equiv 0$. Тогда $m_f(0, \mathbf{w}) \geq 2$. С другой стороны, $m_f(0, \mathbf{w}) \leq 2$ по лемме 7. Поэтому $m_f(0, \mathbf{w}) = 2$. Значит, все нули функций вида $f_{\mathbf{u}_0,\mathbf{w}}$ двукратные по лемме 10 b) (за исключением случая $f_{\mathbf{u}_0,\mathbf{w}} \equiv 0$). Отсюда согласно лемме 7 следует, что множества вида $Z_f \cap \{z\mathbf{w} \in \mathbb{C}^d : z \in \mathbb{C}\}$ есть подгруппы группы $(\mathbb{C}^d, +)$. Это возможно только при $\mathbf{v}_0 \in G$, то есть $Z_f = G$. Положим $\hat{f}(\mathbf{u}) = \sigma_\Gamma^2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})$. Тогда функции f и $\hat{f}$ имеют одинаковые множества нулей и поэтому $(f, f) \sim (\hat{f}, \hat{f})$ согласно лемме 8. $\square$

Лемма 12. *Пусть (f, g) — решение уравнения (3) при $n = 3$, причем $f(0) = g(0) = 0$. Тогда $Z_f = Z_g$ или $Z_f = -Z_g$.*

Лемма доказана в [13, лемма 3.4] при $d = 1$. Приведенное там доказательство остается в силе и для произвольной размерности $d > 1$. Поэтому мы его опускаем.

Доказательство теоремы 2. Не умаляя общности считаем, что $f(0) = g(0) = 0$. Тогда $Z_f = Z_g$ или $Z_f = -Z_g$ по лемме 12.

1. Пусть $Z_f = Z_g$. Возьмем любые $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^d$, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$. Тогда функции $f_{\mathbf{u},\mathbf{w}}$, $g_{\mathbf{u},\mathbf{w}}$ могут быть тождественно равными нулю только одновременно. Используя леммы 5, 6, получаем, что $f_{\mathbf{u},\mathbf{w}} = g_{\mathbf{u},\mathbf{w}} e^{L_{\mathbf{u},\mathbf{v}}}$, где $L_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$ — линейная форма. В силу произвольности $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ отсюда вытекает, что $f = g^L$, где L — линейная форма $\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$. Поэтому $(f, g) \sim (f, f)$ и для завершения доказательства осталось применить теорему 4.

2. Пусть $Z_f = -Z_g$. Нетрудно заметить, что пара $(f, \tilde{g})$, где $\tilde{g}(\mathbf{u}) = g(-\mathbf{u})$ также является решением уравнения (3) при $n = 3$. Согласно п. 1 доказательства $(f, \tilde{g}) \sim (S, S)$. Поэтому $(f(\mathbf{u}), g(\mathbf{u})) \sim (S(\mathbf{u}), S(-\mathbf{u}))$. Из нечетности сигма-функции Вейерштрасса вытекает, что $(S(\mathbf{u}), S(-\mathbf{u})) \sim (S(\mathbf{u}), S(\mathbf{u}))$. Поэтому $(f, g) \sim (S, S)$ $\square$

Замечание 2. Пусть (f, g) — решение уравнения (3) при некотором $n \leq 3$, причем f и g имеют нули. Применяя лемму 1 и теоремы 1, 2, получаем, что тогда $n = 2$ или $n = 3$, причем $f(\mathbf{u}) = g(\mathbf{u}+\mathbf{u}_1)e^{L\mathbf{u}}$, где $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{C}^d$, а L — линейная форма.

4. Приложение к функциональному уравнению (1)

Определение. Пусть $f_1, \dots, f_s$ — целые не равные тождественно нулю функции $\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$. Набор $(f_1, \dots, f_s)$ будем называть *решением функционального уравнения (1)*, если существуют $m \in \mathbb{N}$ и $\varphi_j : (\mathbb{C}^d)^{s-1} \to \mathbb{C}, \psi_j : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$, удовлетворяющие для любых $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{s-1}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^d$ разложению (1), причем m — наименьшее среди всех возможных.

Пусть $f_1, \dots, f_s, \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$, причем набор $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s)$ получен из набора $(f_1, \dots, f_s)$ путем применения композиции преобразований следующих четырех видов:

1) $(f_1, \dots, f_{s-1}, f_s) \to (f_{k_1}, \dots, f_{k_{s-1}}, f_s)$, где $(k_1, \dots, k_{s-1})$ — перестановка из $\{1, \dots, s-1\}$;
2) $(f_1, \dots, f_s) \to (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_s)$, где $\hat{f}_j(\mathbf{u}) = f_j(\mathbf{u} + \mathbf{w}_j)$, $\mathbf{w}_j \in \mathbb{C}^d$, $j = \overline{1, s}$;
3) $(f_1, \dots, f_s) \to (f_1 e^{L_1}, \dots, f_s e^{L_s})$, где $L_1, \dots, L_s$ — линейные формы $\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$;
4) $(f_1, \dots, f_s) \to (f_1 e^{Q}, \dots, f_s e^{Q})$, где Q — квадратичная форма $\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$.

Нетрудно проверить, что наборы $(f_1, \dots, f_s)$, $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s)$ могут быть решениями уравнения (1) только одновременно.

Определение. Будем называть решения $(f_1, \dots, f_s)$, $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s)$ уравнения (1) *эквивалентными* и писать $(f_1, \dots, f_s) \sim (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s)$, если одно из них получено из другого путем применения композиции преобразований указанных выше четырех видов.

Определение. Пишем $R_s(f_1, \dots, f_s) = m_0$, если $(f_1, \dots, f_s)$ — решение уравнения (1) при $m = m_0$. Пишем $R_s(f_1, \dots, f_s) < \infty$, если существует такой $m \in \mathbb{N}$, что $R_s(f_1, \dots, f_s) = m$.

Полагая в (1) $\mathbf{u}_1 = 0$, имеем

$$f_1(\mathbf{v}) f_2(\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}) \dots f_{s-1}(\mathbf{u}_{s-1} + \mathbf{v}) f_s(\mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_{s-1} - \mathbf{v}) = \\ = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(0, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{s-1}) \psi_j(\mathbf{v}). \tag{15}$$

Отсюда вытекает, что

$$R_{s-1}(f_2, \dots, f_s) \le \operatorname{rank} \{\varphi_j(0, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{s-1})\}_{j=1}^{m}, \tag{16}$$

где rank — ранг соответствующей системы функций.

Лемма 13. *Пусть $R_s(f_1, \dots, f_s) < \infty$. Тогда существуют такие $c_1, c_2 \in (0, +\infty)$, что для любого $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^d$*

$$|f_j(\mathbf{u})| \le c_1 e^{c_2 |\mathbf{u}|}, \quad j = \overline{1, s}. \tag{17}$$

Доказательство. Достаточно доказать оценку (17) при $j = s - 1$ и $j = s$. Из (16) вытекает, что $R_2(f_{s-1}, f_s) < \infty$. Используя лемму 3, приходим к требуемым неравенствам. □

Нетрудно заметить, что любой набор $(Q_1, \dots, Q_s)$, состоящий из квазимногочленов является решением уравнения (1) при некотором m.

Определение. Решение уравнения (1) будем называть *элементарным,* если оно эквивалентно набору из квазимногочленов.

Уравнение (1) легко решить, если хотя бы одна из функций $f_1, \dots, f_{s-1}$ не имеет нулей.

Лемма 14. *Пусть $R_s(f_1, \dots, f_s) < \infty$. Если хотя бы одна из функций $f_1, \dots, f_{s-1}$ не имеет нулей, то $(f_1, \dots, f_s)$ — элементарное решение.*

Доказательство. Пусть, например, f_1 не имеет нулей. Учитывая оценку (17), приходим к выводу, что $f_1 = e^P$, где P — многочлен степени ≤ 2. Поэтому $(f_1, f_2 \dots, f_s) \sim (1, \tilde f_2 \dots, \tilde f_s)$, где $\tilde f_j = f_j e^{-P}$. Полагая в соотношении

$$\tilde f_2(\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}) \dots \tilde f_{s-1}(\mathbf{u}_{s-1} + \mathbf{v}) \tilde f_s(\mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_{s-1} - \mathbf{v}) = = \sum_{j=1}^{m} \tilde\varphi_j(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{s-1}) \tilde\psi_j(\mathbf{v}), \tag{18}$$

$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 = \dots \mathbf{u}_{s-1} = 0$, получаем для $\tilde f_s$ функциональное уравнение вида (2). Поэтому $\tilde f_s$ — квазимногочлен. Пусть $l \in \{2, \dots, s-1\}$. Выбирая в (18) $\mathbf{u}_j = 0$ при $j \ne l$, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$, получаем для $\tilde f_l$ функциональное уравнение вида (2). Поэтому $\tilde f_l$ — квазимногочлен. □

Лемма 15. *Пусть $s > 2$, $R_s(f_1, \dots, f_s) < \infty$ и $j \in \{1, \dots, s-1\}$. Если функция f_j имеет нули, то*

$$R_{s-1}(f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_s) \le R_s(f_1, \dots, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, \dots, f_s) - 1.$$

Доказательство. Пусть, например, $j = 1$ и $f_1(\mathbf{w}_0) = 0$. Выбирая в (15) $\mathbf{v} = \mathbf{w}_0$, получаем

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(0, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{s-1}) \psi_j(\mathbf{w}_0) = 0.$$

Если $(\psi_1(\mathbf{w}_0), \dots, \psi_{s-1}(\mathbf{w}_0)) = 0$, то из (1) вытекает, что хотя бы одна из функций $f_1, \dots, f_s$ есть тождественный нуль. Значит, $(\psi_1(\mathbf{w}_0), \dots, \psi_{s-1}(\mathbf{w}_0)) \ne 0$. Тогда система функций $\{\varphi_j(0, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{s-1})\}_{j=1}^m$ линейно зависима. Требуемая оценка вытекает из неравенства (16). □

Лемма 16. *Если $s > 2$, $R_s(f_1, \dots, f_s) \le s - 1$, то хотя бы две функции из $f_1, \dots, f_s$ не имеют нулей.*

Доказательство. Пусть, например, $f_2, \dots, f_{s-1}$ имеют нули. Применяя лемму 15, получаем, что

$$R_2(f_1, f_s) \le R_s(f_1, \dots, f_s) - (s-2) \le 1.$$

Тогда $(f_1, f_s) \sim (1, 1)$ по лемме 1. □

Замечание 3. Из лемм 14, 16 вытекает, что уравнение (1) имеет только элементарные решения при $m \le s - 1$.

Справедлива формула (см. [19, § 20.7, пример 21])

$$\begin{aligned}
(19)\quad & \sigma(z_0+\ldots+z_{s-1})\cdot 1!\cdot 2!\cdot\ldots\cdot(s-1)!\times\\
&\times\prod_{0\le k<j\le s-1}\sigma(z_k-z_j)(-1)^{(s-2)(s-1)/2}=\\
&=\sigma^s(z_0)\ldots\sigma^s(z_{s-1})\cdot\begin{vmatrix}1 & \wp(z_0) & \wp'(z_0) & \ldots & \wp^{(s-2)}(z_0)\\ 1 & \wp(z_1) & \wp'(z_1) & \ldots & \wp^{(s-2)}(z_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \wp(z_{s-1}) & \wp'(z_{s-1}) & \ldots & \wp^{(s-2)}(z_{s-1})\end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Полагая в этом соотношении $z_0=-u$, $z_1=v_1$, …, $z_{s-1}=v_{s-1}$ и раскладывая определитель из правой части (19) по первой строке, получаем, что набор

$$(\underbrace{\sigma_\Gamma,\ldots,\sigma_\Gamma}_{s})$$

является решением уравнения (1) при $d=1$, $m\le s$. Учитывая лемму 16, приходим к выводу, что $m=s$. Поэтому набор $(W,\ldots,W)$, где $W:\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}$, $W(\mathbf{u})=\sigma_\Gamma(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})$ ($\mathbf{a}\in\mathbb{C}^d\setminus\{0\}$) есть решение уравнения (1) при $m=s$.

Теорема 5. *Пусть $s\ge 3$ и $m\le s+1$. Пусть $(f_1,\ldots,f_s)$ — решение уравнения (1), причем каждая из функций $f_1,\ldots,f_s$ имеет нули. Тогда*

$$m=s,\quad (f_1,\ldots,f_s)\sim(W,\ldots,W),$$

функция W определена в теореме 1.

Доказательство. Согласно лемме 15 для любого $j\in\{1,\ldots,s-1\}$

$$R_2(f_j,f_s)\le m-(s-2)\le 3.$$

Значит, $f_j(\mathbf{u})=f_s(\mathbf{u}+\mathbf{w}_j)e^{L_j\mathbf{u}}$ ($\mathbf{w}_j\in\mathbb{C}^d$, а L_j — линейная форма) по замечанию 2. Поэтому $(f_1,\ldots,f_s)\sim(f,\ldots,f)$, причем $R_2(f,f)=2$ или $R_2(f,f)=3$.

1. Пусть $R_2(f,f)=2$. Тогда $f(\mathbf{u})=\sigma(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}+z_0)e^{P(\mathbf{u})}$ ($\mathbf{a}\in\mathbb{C}^d$, $z_0\in\mathbb{C}$, P — многочлен степени ≤ 2) по теореме 1. Утверждение теоремы выполнено.

2. Пусть $R_2(f,f)=3$. Тогда $(f,\ldots,f)=(S,\ldots,S)$, где функция S определена в теореме 2. Выберем такой $\mathbf{w}\in\mathbb{C}^d$, что $L\mathbf{w}=1$. Тогда

$$S_{0,\mathbf{w}}(z)=\sigma_\Gamma(z)\sigma_\Gamma(z-z_0).$$

Из леммы 15 следует, что $R_3(S,S,S)\le m-(s-3)\le 4$. Поэтому

$$R_3(S_{0,\mathbf{w}},S_{0,\mathbf{w}},S_{0,\mathbf{w}})\le 4.$$

Однако $R_3(S_{0,\mathbf{w}},S_{0,\mathbf{w}},S_{0,\mathbf{w}})=6$ (см. [16, лемма 3]). Значит, этот случай невозможен. □

Следствие 1. *Пусть $(f,\ldots,f)$ — решение уравнения (1), причем $s\ge 3$ и $2\le m\le s+1$. Тогда $m=s$,*

$$f(\mathbf{u})=\sigma_\Gamma(P_1(\mathbf{u}))e^{P_2(\mathbf{u})},$$

где P_1 — многочлен степени 1, P_2 — многочлен степени ≤ 2, а σ_Γ — сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированная с (возможно вырожденной) решеткой Γ.

Таким образом, функциональное соотношение (1) при $m=s$ можно рассматривать как «характеристическое» уравнение для сигма-функции.

References

[1] V.M. Buchstaber, D.V. Leikin, *Trilinear functional equations*, Russian Math. Surveys, **60**:2 (2005), 341–343. MR2152949

[2] V.M. Buchstaber, D.V. Leikin, *Addition Laws on Jacobian Varieties of Plane Algebraic Curves*, Proc. Steklov Inst. Math., **251** (2005), 49–120.

[3] V.M. Buchstaber, I.M. Krichever, *Integrable equations, addition theorems, and the Riemann–Schottky problem*, Russian Math. Surveys, **61**:1 (2006), 19–78. Zbl 1134.14306

[4] R. Rochberg, L. Rubel, *A Functional Equation*, Indiana Univ. Math. J., **41**:2 (1992), 363–376. MR1183348

[5] M. Bonk, *The addition theorem of Weierstrass's sigma function*, Math. Ann., **298**:1 (1994), 591–610. MR1268596

[6] P. Sinopoulos, *Generalized sine equation. I*, Aequationes Math., **48**:2–3 (1994), 171–193. MR1295090

[7] M. Bonk, *The Characterization of Theta Functions by Functional Equations*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **65** (1995), 29–55. MR1359114

[8] M. Bonk, *The addition formula for theta function*, Aequationes Math., **53**:1–2 (1997), 54–72. MR1436265

[9] A. Jarai, W. Sander, *On the characterization of Weierstrass's sigma function*, Functional equations—results and advances, Adv. Math. (Dordrecht), **3** (20020, 29–79. MR1912704

[10] V. A. Bykovskii, *Hyperquasipolynomials and their applications*, Funct. Anal. Appl., **50**:3 (2016), 193–203. MR3646715

[11] V. A. Bykovskii, *On the rank of odd hyper-quasi-polynomials*, Dokl. Math., **94**:2 (2016), 527–528. MR3586673

[12] A. A. Illarionov, *Functional Equations and Weierstrass Sigma-Functions*, Funct. Anal. Appl., **50**:4 (2016), 281–290. MR3646709

[13] A. A. Illarionov, *Solution of functional equations related to elliptic functions*, Proc. Steklov Inst. Math., **299** (2017), 96–108. MR3761447

[14] A. A. Illarionov, M. A. Romanov, *Hyperquasipolynomials for the Theta-Function*, Funct. Anal. Appl., **52**:3 (2018), 228–231. MR3841802

[15] A. A. Illarionov, *On products of Weierstrass sigma functions*, Investigations on linear operators and function theory. Part 46, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **467**, POMI, St. Petersburg, 2018, 73–84. MR3865804

[16] A. A. Illarionov, *Solutions of a functional equation concerning with trilinear differential operators*, Dal'nevost. Mat. Zh., **16**:2 (2016), 169–180. MR3621441

[17] T. Levi-Civita, *Sulle funzioni che ammettono una formula d'addizione del tipo* $f(x+y) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x)Y_i(y)$, Rom. Acc. L. Rend., **22**:2 (2013), 181–183.

[18] J.M. Almira, E.V. Shulman, *On certain generalizations of the Levi-Civita and Wilson functional equations*, Aequat. Math., **91**:5 (2017), 921–931. Zbl 1382.43006

[19] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis: An Introduction to the General Theory of Infinite Processes and of Analytic Functions; with an Account of the Principal Transcendental Functions*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. JFM 53.0180.04

Andrei Illarionov
Khabarovsk Division of the Institute of Applied Mathematics,
Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,
54, Dzerzhinsky str.,
Khabarovsk, 680000, Russia
Pacific National University,
136, Tihookeanskaya str.,
Khabarovsk, 680035, Russia
E-mail address: illar_a@list.ru