S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 493–500 (2019) УДК 519.17
DOI 10.33048/semi.2019.16.031 MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$

А.А. МАХНЕВ, В.И. БЕЛОУСОВА

Abstract. Prime divisors of orders of automorphisms and the fixed point subgraphs of automorphisms of prime orders are studied for a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$. Let $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ is nonsolvable group, $\bar{G} = G/S(G)$ and $\bar{T}$ is the socle of $\bar{G}$. If Γ is vertex-symmetric then (G) is $\{2\}$-group, and $\bar{T} \cong L_2(11), M_{11}, U_5(2), M_{22}, A_{11}, HiS$.

Keywords: strongly regular graph, distance-regular graph, automorphism.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Если Γ — граф диаметра d, то через Γ_i, где $i \le d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$.

Makhnev, A.A., Belousova, V.I., Automorphisms of distance regular graph with intersection array $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061-П.

Поступила 18 февраля 2019 г., опубликована 12 апреля 2019 г.

Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечения графа Γ (см. [1]).

В работе [2] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин не большим 4096.

Предложение 1. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра, большего 2, на $v \leq 4096$ вершинах. Если $\lambda = 2$ и Γ — примитивный граф, то верно одно из утверждений:*

(1) $\mu = 1$ *и Γ имеет массив пересечений* $\{6, 3, 3; 1, 1, 2\}$, $\{12, 9, 9; 1, 1, 4\}$, $\{18, 15, 9; 1, 1, 10\}$, $\{33, 30, 8; 1, 1, 30\}$, $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$, $\{48, 45, 9; 1, 1, 40\}$;

(2) $\mu = 2$ *и Γ имеет массив пересечений* $\{9, 6, 3; 1, 2, 3\}$, $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$, $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$, $\{33, 30, 15; 1, 2, 15\}$, $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$, $\{39, 36, 20; 1, 2, 20\}$, $\{39, 36, 22; 1, 2, 18\}$, $\{42, 39, 24; 1, 2, 12\}$, $\{51, 48, 24; 1, 2, 24\}$, $\{55, 52, 34; 1, 2, 22\}$, $\{58, 55, 8; 1, 2, 44\}$, $\{63, 60, 10; 1, 2, 54\}$, $\{75, 72, 8; 1, 2, 60\}$,

(3) $\mu > 2$ *и Γ имеет массив пересечений* $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, $\{35, 32, 28; 1, 4, 8\}$, $\{39, 36, 27; 1, 4, 13\}$, $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$, $\{60, 57, 16; 1, 4, 30\}$, $\{60, 57, 32; 1, 4, 18\}$, $\{63, 60, 49; 1, 4, 15\}$, $\{68, 65, 32; 1, 4, 40\}$, $\{75, 72, 42; 1, 4, 50\}$, $\{75, 72, 31; 1, 8, 45\}$, $\{80, 77, 61; 1, 7, 20\}$, $\{90, 87, 60; 1, 15, 18\}$, $\{99, 96, 12; 1, 4, 88\}$, $\{99, 96, 20; 1, 4, 72\}$, $\{99, 96, 6; 1, 6, 88\}$, $\{120, 117, 5; 1, 5, 108\}$, $\{143, 140, 34; 1, 7, 10\}$, $\{147, 144, 39; 1, 12, 117\}$, $\{224, 221, 32; 1, 16, 208\}$.

Продолжается исследование вершинно симметричных графов с такими массивами пересечений. Окрестность вершины в таком графе является объединением изолированных многоугольников. Автоморфизмы графов с массивами $\{18, 15, 9; 1, 1, 10\}$, $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$ из пункта (1) найдены в [3,4]. Автоморфизмы графов с массивами $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{33, 30, 15; 1, 2, 15\}$ из пункта (2) найдены в [5,6]. Автоморфизмы графов с массивами $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$ из пункта (3)найдены в [7,8]. В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$. Тогда Γ имеет $v = 1+30+405+972 = 1408$ вершин и спектр $30^1, 8^{384}, -2^{891}, -10^{132}$. Порядок клики в Γ не превосходит 4, так как $\lambda = 2$ и $1 - k/\theta_3 = 4$, порядок коклики в Γ не превосходит $1408 \cdot 10/40 = 352$. В [9] изучается класс графов $G(s, t, \psi)$ с массивом пересечений $\{(t+1)s, ts, (t-1)(s+1-\psi); 1, 2, (t+1)\psi\}$ (наш массив получается при $t = 9, s = 3, \psi = 1$).

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, *g — элемент простого порядка p из*

G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,11\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

(1) *Ω — пустой граф, либо $p = 11$, $\alpha_1(g) = 88s + 110t + 22$ и $\alpha_3(g) = 528s - 330t + 990$, либо $p = 2$, $\alpha_1(g) = 20t + 16(s-16)/3$ и $\alpha_3(g) = 32s - 60t + 256$;*

(2) *Ω является n-кликой, $p = 3$, $n = 1, 4$, $\alpha_3(g) = 216s - 3\alpha_1(g) + 6n - 24$ и $\alpha_1(g) = 30l - 2n + 24s - 88$.*

(3) *Ω является m-кокликой, $1 < m \leq 352$, либо Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3, $p = 5$, $m = 5l+3$, $\alpha_1(g) = 10(5t+4s-l)$ и $\alpha_3(g) = 30(8s - 5t + 2l + 31)$, либо Ω содержит вершины, находящиеся на расстоянии 2, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 20t+24s-2m+104$ и $\alpha_3(g) = 3(48s+4m-20t+248)$;*

(4) *Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leq 7$.*

Следствие. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{30,27,24;1,2,10\}$ и неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа. Тогда $S(G)$ является неединичной $\{2\}$-группой, цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ — простая неабелева группа, и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$\bar{T} \cong L_2(11)$ и $\bar{T}_a \cong A_5$ — подгруппа индекса 11 из $\bar{T}$;*

(2) *$\bar{T} \cong M_{11}$ и $\bar{T}_a \cong M_{10}$ — подгруппа индекса 11 из $\bar{T}$;*

(3) *$\bar{T} \cong M_{22}$ и либо $\bar{T}_a \cong L_3(4)$ — подгруппа индекса 22 из $\bar{T}$, либо $\bar{T}_a \cong A_7$ — подгруппа индекса 176 из $\bar{T}$;*

(4) *$\bar{T} \cong U_5(2)$ и $\bar{T}_a \cong Z_3 \times U_4(2)$ — подгруппа индекса 176 из $\bar{T}$;*

(5) *$\bar{T} \cong A_{11}$ и $\bar{T}_a \cong A_{10}$ — подгруппа индекса 11 из $\bar{T}$;*

(6) *$\bar{T} \cong HiS$ и $\bar{T}_a \cong U_3(5).Z_2$ — подгруппа индекса 176 из $\bar{T}$.*

В доказательстве теоремы применяется метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [10]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \leq 1$ класс R_i состоит из пар (u,w) таких, что $d(u,w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u,w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_iA_j = \sum p^l_{ij} A_l$ для чисел пересечений p^l_{ij}.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j,l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), ..., p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, ..., m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i,j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. § 3.7 [6]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1}\sum_{j=0}^{d} Q_{ij}\alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$. *Тогда ненулевые числа пересечений равны*

(1) $p^1_{11} = 2$, $p^1_{12} = 27$, $p^1_{22} = 54$, $p^1_{23} = 324$, $p^1_{33} = 648$;

(2) $p^2_{11} = 2$, $p^2_{12} = 4$, $p^2_{13} = 24$, $p^2_{22} = 136$, $p^2_{23} = 264$, $p^2_{33} = 684$;

(3) $p^3_{12} = 10$, $p^3_{13} = 20$, $p^3_{22} = 110$, $p^3_{23} = 285$, $p^3_{33} = 666$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Лемма 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Если* $g \in G$, χ_1 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 384, χ_3 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 132. *Тогда* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$, $\chi_1(g) = (24\alpha_0(g) + 6\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/90 + 128/15$, $\chi_3(g) = (6\alpha_0(g) - 3\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/72 + 44/3$. *Если* $|g| = p$ *— простое число, то* $384 - \chi_1(g)$ *и* $132 - \chi_3(g)$ *делятся на* p.

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 384 & 512/5 & 128/15 & -64/9 \\ 891 & -297/5 & -121/5 & 11 \\ 132 & -44 & 44/3 & -44/9 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = (270\alpha_0(g) + 72\alpha_1(g) + 6\alpha_2(g) - 5\alpha_3(g))/990$. Подставляя $\alpha_2(g) = 1408 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (24\alpha_0(g) + 6\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/90 + 128/15$.

Аналогично, $\chi_3(g) = (27\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g) + 3\alpha_2(g) - \alpha_3(g))/288$. Подставляя $\alpha_2(g) = 1408 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_3(g) = (6\alpha_0(g) - 3\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/72 + 44/3$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 2 [8].

□

Лемма 3. *Пусть* G *— группа подстановок, действующая на конечном множестве* Ω *и* p *— простое число. Если для любого* $\alpha \in \Omega$ *подгруппа* G_α *содержит такую* p*-подгруппу* X_α, *что* $\mathrm{Fix}(X_\alpha) = \{\alpha\}$, *то* G *транзитивна на* Ω.

Доказательство. Пусть α, β — две точки из Ω. По условию длина каждой X_α-орбиты, отличной от $\{\alpha\}$, делится на p. Аналогично, длина каждой X_β-орбиты, отличной от $\{\beta\}$, делится на p.

Положим $H = \langle X_\alpha, X_\beta \rangle$. Тогда каждая H-орбита является объединением X_α-орбит, поэтому длина каждой H-орбиты, отличной от α^H, делится на p. Аналогично, длина каждой H-орбиты, отличной от β^H, делится на p, поэтому α и β лежат в одной H-орбите.

Таким образом, группа $H = \langle X_\alpha \mid \alpha \in \Omega \rangle$ транзитивна на Ω. □

3. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если $p > 29$, то вместе с вершиной a подграф Ω содержит $[a]$. Противоречие с тем, что тогда $\Omega = \Gamma$. Значит, $p \le 29$.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 11$, $\alpha_1(g) = 88s + 110t + 22$ и $\alpha_3(g) = 528s - 330t + 990$, либо $p = 2$, $\alpha_1(g) = 20t + 16(s-16)/3$ и $\alpha_3(g) = 32s - 60t + 256$;*

(2) *если Ω является n-кликой, то $p = 3$, $n = 1, 4$, $\alpha_3(g) = 216s - 3\alpha_1(g) + 6n - 24$ и $\alpha_1(g) = 30l - 2n + 24s - 88$.*

(3) *если Ω является m-кокликой, $1 < m$, то $m \le 352$, либо Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3, $p = 5$, $m = 5l + 3$, $\alpha_1(g) = 10(5t + 4s - l)$ и $\alpha_3(g) = 30(8s - 5t + 2l + 31)$, либо Ω содержит вершины, находящиеся на расстоянии 2, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 20t + 24s - 2m + 104$ и $\alpha_3(g) = 3(48s + 4m - 20t + 248)$.*

Доказательство. Если Ω — пустой граф то $p = 2$ или $p = 11$. Пусть $p = 11$. Тогда $\chi_3(g) = (-3\alpha_1(g) - \alpha_3(g) + 1056)/72$, число $\chi_1(g) = (6\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/90 + 128/15$ сравнимо с -1 по модулю 11. Отсюда $\alpha_3(g) = 792s - 3\alpha_1(g) + 1056$, $(\alpha_1(g) - 88s - 32)/10 = 11t - 1$, поэтому $\alpha_1(g) = 88s + 110t + 22$ и $\alpha_3(g) = 528s - 330t + 990$.

Пусть $p = 2$. Тогда число $\chi_3(g) = (-3\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/72 + 44/3$ четно, $\alpha_3(g) = 48s - 3\alpha_1(g)$ и число $\chi_1(g) = (3\alpha_1(g) - 16s + 256)/30$ четно. Отсюда $\alpha_1(g) = 20t + 16(s - 16)/3$ и $\alpha_3(g) = 32s - 60t + 256$.

Пусть Ω является n-кликой. В случае $n = 1$ число p делит 30 и 1407, поэтому $p = 3$. Если $n > 1$, то $n = 4$, с учетом равества $p^1_{12} = 27$ снова $p = 3$. Число $\chi_3(g) = (2n - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)/3 + 352)/24$ делится на 3 и $\alpha_3(g) = 3(72s - \alpha_1(g) + 2n - 8)$. Далее, число $\chi_1(g) = (4n + \alpha_1(g) - (36s - \alpha_1(g)/2 + n - 4) + 128)/15$ делится на 3 и $\alpha_1(g) = 30l - 2n + 24s - 88$.

Пусть Ω является m-кокликой, $m > 1$. Тогда p делит 30 и $1408 - m$. Если Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3, то p делит $p^3_{33} - (m-2) = 668 - m$ и $k_3 - (m-1) = 973 - m$, поэтому $p = 5$, $m = 5l + 3$. В этом случае число $\chi_3(g) = (10l - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)/3 + 358)/24$ сравнимо с 2 по модулю 5, $\alpha_3(g) = 3(120s - \alpha_1(g) + 10l + 310)$. Далее, число $\chi_1(g) = l + \alpha_1(g)/10 - 4s - 1$ сравнимо с 4 по модулю 5, $\alpha_1(g) = 10(5t + 4s - l)$ и $\alpha_3(g) = 30(8s - 5t + 2l + 31)$.

Если Ω содержит вершины a, b, находящиеся на расстоянии 2, то $p = 2$ число $\chi_3(g) = (2m - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)/3 + 352)/24$ четно и $\alpha_3(g) = 3(72s + 2m - \alpha_1(g) + 352))$. Далее, число $\chi_1(g) = (3m + 3\alpha_1(g)/2 - 36s - 176)/15$ четно, $\alpha_1(g) = 20t + 24s - 2m + 104$ и $\alpha_3(g) = 3(48s + 4m - 20t + 248)$ □

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω содержит ребро, то Ω не является объединением изолированных клик;*

(2) *если Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c, то $p \le 7$.*

Доказательство. Пусть Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик. Так как $p^1_{12} = 27$, то $p = 3$.

Теперь вершины из разных клик находятся на расстоянии 3 в Γ. Противоречие с тем, что $p^3_{12} = 10$.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c, Δ — связная компонента графа Ω содержащая a.

Если $p > 2$, то по теореме Боуза-Доулинга Δ — вполне регулярный граф с параметрами $(v', k', 2, 2)$. Если $p > 3$, то $\Gamma_3(a)$ содержит вершину z из Ω. Если $p > 5$, то $\Gamma_2(a) \cap [z]$ содержит вершину из Ω.

Если $p = 23$, то $k' = 7$ и $\Gamma_2(a) \cap [z]$ содержит 10 вершин из Ω, противоречие. Если $p = 19$, то $k' = 11$ и $\Gamma_2(a) \cap [z]$ содержит 10 вершин из Ω. Заметим, что сильно регулярный граф с параметрами (56,11,2,2) не существует, поэтому Δ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{11, 8, 5; 1, 2, 10\}$, противоречие.

Если $p = 17$, то $k' = 13$ и $\Gamma_2(a) \cap [z]$ содержит 10 вершин из Ω. Заметим, что сильно регулярный граф с параметрами (79,13,2,2) не существует, поэтому Δ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{13, 10, 7; 1, 2, 10\}$, противоречие.

Если $p = 13$, то $k' = 17$ и $\Gamma_2(a) \cap [z]$ содержит 10 вершин из Ω. Заметим, что сильно регулярный граф с параметрами (137,17,2,2) не существует, поэтому Δ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{13, 10, 11; 1, 2, 10\}$, противоречие.

Если $p = 11$, то $k' = 19$ и $\Gamma_2(a) \cap [z]$ содержит 10 вершин из Ω. Заметим, что сильно регулярный граф с параметрами (172,19,2,2) не существует, поэтому диаметр Δ больше 2. Если Ω — несвязный граф, то для $y \in \Omega - \Delta$ степень a в графе $\Gamma_3(y)$ равна 20, противоречие.

Положим $u^{\langle g \rangle} = [a] - \Omega$. Тогда для любой вершины $e \in \Omega(a)$ подграф $[u] \cap [e]$ содержит a и вершину из $\Gamma - \Omega$. Если вершина $w \in [u] - (u^{\langle g \rangle} \cup \{a\})$ не смежна с вершинами из $(u^{\langle g \rangle} \cup [a]$, то $[a] \cap [w]$ содержит единственную вершину, противоречие. Лемма доказана. $\square$

Из лемм 4–5 следует теорема 1.

4. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$, вершинно симметричный случай

Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$ и неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве его вершин. Ввиду теоремы 1 имеем $|G| = 2^\beta 3^\gamma 5^\delta 7^\epsilon 11$ и $|G : G^a| = 1408 = 2^7 11$.

Лемма 6. *Пусть f — элемент порядка 11 из G, g — элемент простого порядка $p \leq 7$ из $C_G(f)$, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, $p = 2$ и для $\alpha_1(g) = 20t + 16(s - 16)/3$, $\alpha_3(g) = 32s - 60t + 256$ числа $2t + 1$ и s делятся на 11;*

(2) *Ω состоит из 33 вершин, попарно находящихся на расстоянии 3, $p = 5$, для $\alpha_1(g) = 10(5t + 4s - 6)$ и $\alpha_3(g) = 30(8s - 5t + 43)$ числа t и $s + 4$ делятся на 11;*

(3) *Ω является m-кокликой, содержащей вершины, находящиеся на расстоянии 2, $p = 2$, для $\alpha_1(g) = 20t + 24s - 2m + 104$ и $\alpha_3(g) = 3(48s + 4m - 20t + 248)$ числа s и $3t - 2$ делятся на 11;*

(4) *Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leq 3$.*

Доказательство. По теореме $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф, $\alpha_3(f) = 528s - 330t + 990$ и $\alpha_1(f) = 88s + 110t + 22$.

Пусть g — элемент простого порядка $p \leq 7$ из $C_G(f)$, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если Ω — пустой граф, то $p = 2$ и числа $\alpha_1(g) = 20t + 16(s - 16)/3$, $\alpha_3(g) = 32s - 60t + 256$

делятся на 11. Отсюда 11 делит $-s+6t+3$ и $-2t-2s-1$, поэтому $2t+1$ и s делятся на 11.

Если Ω состоит из $m=5l+3$ вершин, попарно находящихся на расстоянии 3, то $p=5$, $l=6$, числа $\alpha_1(g)=10(5t+4s-6)$ и $\alpha_3(g)=30(8s-5t+43)$ делятся на 11. Отсюда t и $s+4$ делятся на 11. Так как $\alpha_1(g)+\alpha_3(g)=10(24s-15t+129)\le 1395$, то $24s-15t\le 10$. Теперь $s\le -7$ и $t\le 0$, противоречие.

Если Ω является m-кокликой, содержащей вершины, находящиеся на расстоянии 2, то $p=2$, числа $\alpha_1(g)=20t+24s-2m+104$ и $\alpha_3(g)=3(48s+4m-20t+248)$ делятся на 11. Отсюда 11 делит $5t+6s+26$ и $12s-5t+62$, поэтому s и $3t-2$ делятся на 11.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b,a,c, Δ — связная компонента графа Ω содержащая a. Тогда Δ — вролне регулярный граф с параметрами $(v',k',2,2)$.

Если $p=7$, то $k'=9,16,23$. В случае $k'>9$ некоторая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна по крайней мере с 2 вершинами из Ω, противоречие. Значит, $k'=9$ и $21|\Omega|\le(1408-|\Omega|)$. Так как число $|\Omega|$ делится на 11 и сравнимо с 1 по модулю 7, то имеем противоречие.

Если $p=5$, то, повторив рассуждения из предыдущего абзаца, получим $k'=10$ и $20|\Omega|\le(1408-|\Omega|)$. Так как число $|\Omega|$ делится на 11 и сравнимо с 3 по модулю 5, то $|\Omega|=33$, противоречие. Лемма доказана. □

Приступим к доказательству следствия. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{30,27,24;1,2,10\}$, неразрешимая группа $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин и a — вершина графа Γ. Через $\bar T$ обозначим цоколь группы $\bar G=G/S(G)$, через Q силовскую 2-подгруппу из $S(G)$ и через S силовскую 3-подгруппу из $S(G)$. По теореме 1 $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,11\}$. Пусть f — элемент порядка 11 из G.

Лемма 7. *$S(G)$ является неединичной $\{2\}$-группой, цоколь $\bar T$ группы $\bar G=G/S(G)$ — простая неабелева группа, и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $\bar T\cong L_2(11)$ *и* $\bar T_a\cong A_5$ *— подгруппа индекса* 11 *из* $\bar T$*;*

(2) $\bar T\cong M_{11}$ *и* $\bar T_a\cong M_{10}$ *— подгруппа индекса* 11 *из* $\bar T$*;*

(3) $\bar T\cong M_{22}$ *и либо* $\bar T_a\cong L_3(4)$ *— подгруппа индекса* 22 *из* $\bar T$*, либо* $\bar T_a\cong A_7$ *— подгруппа индекса* 176 *из* $\bar T$*;*

(4) $\bar T\cong U_5(2)$ *и* $\bar T_a\cong Z_3\times U_4(2)$ *— подгруппа индекса* 176 *из* $\bar T$*;*

(5) $\bar T\cong A_{11}$ *и* $\bar T_a\cong A_{10}$ *— подгруппа индекса* 11 *из* $\bar T$*;*

(6) $\bar T\cong HiS$ *и* $\bar T_a\cong Z_3\times U_3(5).Z_2$ *— подгруппа индекса* 176 *из* $\bar T$*.*

Доказательство. Ввиду леммы 6 число 11 не делит $|S(G)|$. По [13, таблица 1] группа $\bar T$ изоморфна $L_2(11)$, M_{11}, M_{12}, $U_5(2)$, M_{22}, A_{11}, A_{12}, McL, HiS или $U_6(2)$.

Напомним, что $\bar T$ содержит подгруппу $\bar T_a$ индекса, делящего $2^7\cdot 11$. Отсюда выполняется одно из утверждений (1–6).

Так как $|S(G):S(G)_a|$ является степенью 2, то $S(G)$ является 2-группой. Лемма доказана. □

Из леммы 7 получаем следствие.

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1989. MR1002568

[2] A.A. Makhnev, M.S. Nirova, *On distance-regular graphs with* $\lambda = 2$, Jornal of Siberian Federal Univ., **7**:2 (2014), 188–194.

[3] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, *Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{18, 15, 9; 1, 1, 10\}$, Commun. Math. Stat., **3**:4 (2015), 527–534. MR3432219

[4] K.S. Efimov, A.A. Makhnev, *Automorphisms of a distance-regular graph with itersectijn array* $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$, Ural Mathematical Journal, **4**:2 (2018), 69–78. MR3901586

[5] A.A. Makhnev, N.D. Zyulyarkina, *On automorphisms of distance-regular graph with intersection array* $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, Doklady Akademii nauk, **439**:4 (2011), 443–447. MR2893565

[6] A.A. Makhnev, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{33, 30, 15; 1, 2, 15\}$, Doklady Mathematics, **90**:3 (2014), 743–747. MR3410020

[7] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, Algebra i Logika, **51**:4 (2012), 476–495. MR3051818

[8] A.A. Makhnev, M.S. Nirova, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$, Doklady Mathematics, **87**:3 (2013), 269–273. Zbl 1297.05165

[9] S. Bang, J.H. Koolen, *On geometric distance-regular graphs with diameter three*, Europ J. Comb., **36** (2014), 331–341. MR3131899

[10] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math Soc. Student Texts **45**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. MR1721031

[11] A.L. Gavrilyuk, A.A. Makhnev, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Doklady Akademii nauk, **432**:5 (2010), 512–515. MR2766516

[12] A. Brouwer, W. Haemers, *The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra*, Europ. J. Comb., **14** (1993), 397–407. MR1241907

[13] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Siberian Electronic Mathematical Reports , **6** (2009), 1–12. MR2586673

Alexandr Alekseevich Makhnev
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Meckhanics,
16, S. Kovalevskoy str.,
Ekaterinburg, 620990, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

Veronika Igorevna Belousova
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin,
19, Mira str.,
Ekaterinburg, 620002, Russia
E-mail address: vkazarina@mail.ru