S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 516–522 (2019) УДК 512.5

DOI 10.33048/semi.2019.16.033 MSC 20E10

ОБ ω-НЕЗАВИСИМОСТИ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

А.И. БУДКИН

Abstract. We prove that there exists a set $\mathcal{R}$ of quasivarieties of nilpotent groups of class two any quasivariety from $\mathcal{R}$ does not have an independent basis of quasi-identities to the class $\mathcal{N}_2$ of 2-nilpotent groups and has an ω-independent basis of quasi-identities to $\mathcal{N}_2$. The intersection of all quasivarieties in $\mathcal{R}$ has an independent basis of quasi-identities to $\mathcal{N}_2$. The set of such sets $\mathcal{R}$ is continual.

Keywords: nilpotent group, quasivariety, ω-independence.

1. Введение

В этой работе изучается вопрос о существовании независимых и ω-независимых базисов квазитождеств, интерес к которому возрос в последнее время. Приведём ряд результатов в данном направлении, полученных к настоящему моменту.

В [1] доказано, что если квазимногообразие групп содержит бесконечную циклическую группу и не содержит бесконечного множества групп простого порядка, то оно имеет независимый базис квазитождеств. Следствием этого явилось то, что для квазимногообразий групп без кручения задача о существовании независимого базиса квазитождеств всегда рассматривается в классе групп без кручения. Условия существования независимого базиса квазитождеств в классе групп без кручения найдены [2]. В частности, оказалось, что ряд широко изучаемых квазимногообразий (например, квазимногообразие, порождённое неабелевой свободной разрешимой группой, всех линейно упорядочиваемых групп) являются таковыми. В [3] исследован вопрос о существовании независимых базисов для всех квазимногообразий, являющихся покрытиями

Budkin, A.I., On the ω-independence of quasivarieties of nilpotence groups.

Поступила 8 апреля 2018 г., опубликована 16 апреля 2019 г.

абелевых групп в решётке квазимногообразий разрешимых групп. В [4] найдены условия независимой аксиоматизируемости квазимногообразий универсальных алгебр. В [5] показано, что множество квазимногообразий разрешимых групп, не имеющих независимого базиса квазитождеств в классе групп без кручения, имеет мощность континуума. В [6] построены континуальные серии квазимногообразий нильпотентных групп, не имеющих независимых базисов квазитождеств. В [1] построено квазимногообразие групп, не имеющее независимого базиса квазитождеств, которое можно задать независимой системой $\forall$-формул. В [7] доказано, что свободная 2-нильпотентная группа ранга $n \geq 2$ не имеет независимого базиса квазитождеств в классе групп без кручения. В [8] также показано, что аналогичным свойством обладает, квазимногообразие, порождённое неабелевой группой порядка p^3, где p — простое число, $p \neq 2$.

Вопрос о существовании независимых базисов квазитождеств подробно изучался в универсальной алгебре. В [9] показано, что любую конечную решетку можно вложить в конечную решетку, не имеющую независимого базиса квазитождеств. В [10] доказано существование континуума квазимногообразий унаров, не имеющих независимого базиса квазитождеств. Аналогичная теорема доказана в [11] для орграфов, в [12] для унарных алгебр специального вида, в [13] для дифференциальных группоидов и точечных абелевых групп, в [14] в случае (неориентированных) графов (без петель), в [15] для антимногообразий унаров.

Весьма активно изучаются квазимногообразия, не имеющие независимого базиса квазитождеств, но имеющие ω-независимый базис. Отметим, что наличие ω-независимого базиса у данного квазимногообразия влечёт следующее свойство решётки квазимногообразий: существует бесконечое множество квазимногообразий, все попарные пересечения которых совпадают с рассматриваемым квазимногообразием. Мощность множества таких квазимногообразий найдена в [16] для графов, ориентированных графов, унаров, точечных абелевых групп. В [17], построен пример квазимногообразия с двумя унарными операциями, не имещего независимого базиса, но имеющего ω-независимый базис квазитождеств. Там же найдена конечная унарная алгебра, которая не имеет ω-независимого и, следовательно, независимого базиса квазитождеств. В [18] доказано, что существует квазимногообразие унарных алгебр такое, что (а) в решетке его подквазимногообразий есть 2^ω элементов, не имеющих покрытий (и, следовательно, независимого базиса квазитождеств), (б) среди них есть 2^ω квазимногообразий, имеющих ω-независимый базис квазитождеств. В [14] установлено, что для любого квазимногообразия графов, содержащего хотя бы один недвудольный граф, существует 2^ω его подквазимногообразий, не имеющих независимого базиса квазитождеств.

В данной работе доказано, что существует множество $\mathcal{R}$ квазимногообразий нильпотентных групп класса не выше двух, не имеющих независимого базиса квазитождеств в классе $\mathcal{N}_2$ нильпотентных групп ступени не выше двух, имеющих ω-независимый базис квазитождеств в $\mathcal{N}_2$, причём пересечение всех квазимногообразий из $\mathcal{R}$ имеет независимый базис квазитождеств в $\mathcal{N}_2$. Совокупность таких множеств $\mathcal{R}$ континуальна.

2. Предварительные сведения

Напомним некоторые понятия и определения.

При написании квазитождеств кванторы всеобщности будут опускаться.

Всюду в работе через $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ обозначено множество натуральных и простых чисел соответственно.

Через $\mathcal{N}_2$ обозначаем класс нильпотентных групп ступени ≤ 2.

У нас $gr(S)$ — группа, порожденная множеством S, (a) — циклическая группа, порожденная элементом a. Запись $H \leq G$ означает, что H — подгруппа группы G.

$Z(G)$ — центр G. Если x, y — элементы группы, то $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Вложением группы A в группу B будем называть любой гомоморфизм $\varphi : A \to B$, являющийся изоморфизмом A на $\varphi(A)$. Если существует вложение A в B, то говорим, что A вложима в B.

Через qG будем обозначать квазимногообразие, порожденное группой G.

Напомним, что элемент b является покрытием элемента a в решетке, если $a \leq b$, $a \neq b$ и из соотношения $a \leq c \leq b$ всегда следует, что $c = a$ либо $c = b$.

$\vee$ — соответствующая операция в решетке.

Для любого класса $\mathcal{N}$ и любого множества квазитождеств Σ через $Mod_{\mathcal{N}}(\Sigma)$ обозначим класс всех групп из $\mathcal{N}$, в каждой из которых истинны все формулы из Σ. Будем говорить, что класс $\mathcal{M}$ определяется в классе $\mathcal{N}$ системой квазитождеств Σ, если $\mathcal{M} = Mod_{\mathcal{N}}(\Sigma)$. В этом случае Σ называется базисом квазитождеств класса $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$.

Множество Σ квазитождеств называется независимым в $\mathcal{N}$, если для любого собственного подмножества $\Sigma' \subset \Sigma$ имеет место строгое включение $Mod_{\mathcal{N}}(\Sigma) \subset Mod_{\mathcal{N}}(\Sigma')$.

Базис квазитождеств Σ класса $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$ называется ω-независимым относительно $\mathcal{N}$ (или в $\mathcal{N}$), если $\Sigma = \cup_{n<\omega}\Sigma_n$, где $\Sigma_n \cap \Sigma_m = \emptyset$ для любых различных m, n и $\mathcal{M} \neq Mod_{\mathcal{N}}(\Sigma \setminus \Sigma_n)$ для каждого n.

Будем пользоваться следующей теоремой Дика [19].

Лемма 1. *Пусть группа G имеет в данном квазимногообразии $\mathcal{N}$ представление*

$$G = gr(\{x_i \mid i \in I\} \parallel \{r_j(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{l(j)}}) = 1 \mid j \in J\}).$$

Предположим, что $H \in \mathcal{N}$ и группа H содержит множество элементов $\{g_i \mid i \in I\}$ такое, что для всякого $j \in J$ равенство $r_j(g_{j_1}, \ldots, g_{j_{l(j)}}) = 1$ истинно в H. Тогда отображение $x_i \to g_i$ $(i \in I)$ продолжается до гомоморфизма G в H.

Введём следующие обозначения:

Z_p — циклическая группа порядка p, $F_n = gr(x_1, \ldots, x_{2n})$ — свободная 2-ступенно нильпотентная группа ранга $2n$.

$A_{n,p}, G_{n,p}$ — группы имеющие в $\mathcal{N}_2$ представления:

$$A_{n,p} = gr(x, x_1, \ldots, x_{2n}, \| x^p \prod_{i=1}^{n}[x_i, x_{n+i}] = 1, [x, x_i] = 1 (i = 1, \ldots, 2n)),$$

$$G_{n,p} = gr(x, x_1, \ldots, x_{2n}, y \| x^p \prod_{i=1}^{n}[x_i, x_{n+i}] = y, y^p = 1, [x, y] = 1,$$
$$[x, x_i] = 1, [y, x_i] = 1 (i = 1, \ldots, 2n)).$$

$$\Phi_{n,p} = (x^p \prod_{i=1}^{n}[x_i, x_{n+i}] = y \ \& \ y^p = 1 \ \& \ [x, y] = 1 \ \& \ (\&_{i=1}^{2n}([x, x_i] = 1 \ \&$$

$$\& \ [y, x_i] = 1)) \ \to \ y = 1),$$

$$\Psi_p = (x^p = 1 \to x = 1).$$

$A \times B(a = b)$ — это прямое произведение групп A и B с объединенными подгруппами (a), (b), т.е. $A \times B(a = b) = A \times B/(ab^{-1})$ (отметим, что всегда $a \in Z(A)$, $b \in Z(B)$ — элементы одинаковых порядков и существуют естественные вложения групп A, B в группу $A \times B(a = b)$; образы групп A и B при этих вложениях обозначаются через A, B соответственно).

Группа $G_{n,p}$ рассматривалась в [6]. В следующем замечании напомним ряд её легко проверяемых свойств из [6].

Замечание 1. *Если* $z = \prod\limits_{i=1}^{n} [x_i, x_{n+i}] \in F_n$, *то* $A_{n,p} = (x) \times F_n(x^{-p} = z)$, $G_{n,p} = (x) \times F_n(x^{-p^2} = z^p)$, *где* (x) *— бесконечная циклическая группа. Поскольку* $A_{n,p}/(x)$ *— группа без кручения, то* $A_{n,p}$ *— также группа без кручения. Так как* $G_{n,p}/(y) \cong A_{n,p}$, *то порядок элемента* y *равен* p *и все элементы конечного порядка группы* $G_{n,p}$ *содержатся в* (y).

С основными понятиями теории квазимногообразий можно познакомиться в [17, 19, 20].

3. Основной результат

Лемма 2. 1) *Квазитождество* Ψ_q *истинно в группе* $G_{n,p}$ *тогда и только тогда, когда* $p \neq q$ $(p, q \in \mathbb{P})$.

2) *При* $p \neq q$ $(p, q \in \mathbb{P})$ *квазитождество* $\Phi_{n,p}$ *истинно в группе* $G_{1,q}$.

Доказательство. Следует из того, что, ввиду замечания 1, элементы конечного порядка в группе $G_{n,p}$ содержатся в (y). □

Лемма 3. *При* $k \geq 4n$ *квазитождество* $\Phi_{n,p}$ *истинно в группе* $G_{k,p}$.

Доказательство. Предположим, что лемма не верна, т.е. найдутся элементы $a, b, a_1, \dots, a_{2n}$ группы $G_{k,p}$ такие, что левая часть квазитождества $\Phi_{n,p}$ истинна, а правая — ложна при подстановке

$$x \to a, y \to b, x_i \to a_i (i = 1, \dots, 2n).$$

В частности, b — неединичный элемент порядка p и, ввиду замечания 1, $b = y^m$ для некоторого m $(m \in \{1, \dots, p-1\})$. По теореме Дика (лемма 1) существует гомоморфизм $\psi : G_{k,p} \to G_{4n,p}$, при котором

$$\psi(x_i) = x_i (i = 1, \dots, 4n; i = k+1, \dots, k+4n),$$

$$\psi(x_i) = 1 (i = 4n+1, \dots, k; i = k+4n+1, \dots, 2k), \psi(x) = x, \psi(y) = y.$$

Видим, что левая часть квазитождества $\Phi_{n,p}$ истинна при подстановке

$$x \to \psi(a), y \to \psi(b), x_i \to \psi(a_i) (i = 1, \dots, 2n),$$

а правая — ложна (так как $\psi(b) = \psi(y^m) = y^m \neq 1$). Полученное означает, что квазитождество $\Phi_{n,p}$ ложно в группе $G_{4n,p}$. Это противоречит тому, что, как установлено в [6] при доказательстве теоремы 1, квазитождество $\Phi_{n,p}$ истинно в группе $G_{4n,p}$. □

Лемма 4. *Пусть M ($M \subseteq \mathbb{P}$) — произвольное бесконечное подмножество, $p \in M$, $I = M \setminus \{p\}$, $\mathcal{M}$ — квазимногообразие, определённое множеством $\{\Phi_{n,q} \mid n \in \mathbb{N}, q \in I\} \cup \{\Psi_p\}$ квазитождеств. Тогда если $\mathcal{N}$ — покрытие квазимногообразия $\mathcal{M}$ в решётке квазимногообразий нильпотентных групп ступени ≤ 2, то всякое квазитождество $\Phi_{n,q}$ ($n \in \mathbb{N}, q \in I$) истинно в каждой группе из $\mathcal{N}$.*

Доказательство. Предположим, что лемма не верна, т.е. найдется группа $G \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$, в которой ложно некоторое квазитождество $\Phi_{n,q}$ ($n \in \mathbb{N}, q \in I$). Пусть $a, b, a_1, \ldots, a_{2n}$ — элементы группы G такие, что левая часть квазитождества $\Phi_{n,q}$ истинна, а правая — ложна при подстановке

$$x \to a, y \to b, x_i \to a_i (i = 1, \ldots, 2n).$$

По теореме Дика (лемма 1) существует гомоморфизм $\varphi : G_{n,q} \to G$, при котором $\varphi(y) \neq 1$. Группа $G_{n,q}/(y)$ не имеет кручения, поэтому $G_{n,q}/(y) \in \mathcal{M}$. Так как $\ker \varphi \cap (y) = (1)$, то группа $G_{n,q}$ вложима в группу $G \times G_{n,q}/(y)$, откуда $G_{n,q} \in \mathcal{N}$. Итак, $\mathcal{N} = \mathcal{M} \vee qG_{n,q}$. Ясно, что при $k \geq n$ существует гомоморфизм $\psi : G_{k,q} \to G_{n,q}$, при котором $\psi(y) \neq 1$. По только что доказанному получаем, что $\mathcal{N} = \mathcal{M} \vee qG_{k,q}$ при каждом $k \geq n$.

Покажем, что в действительности $G_{n,q} \notin \mathcal{M} \vee qG_{k,q}$ при любом $k \geq 4n$. Предположим, что $G_{n,q} \in \mathcal{M} \vee qG_{k,q}$ для некоторого $k \geq 4n$. Квазитождество $\Phi_{n,q}$ истинно в каждой группе из $\mathcal{M}$, а по лемме 3 оно истинно в группе $G_{k,p}$. Значит, $\Phi_{n,q}$ истинно во всякой из $\mathcal{N}$, в частности, в группе $G_{n,q}$, что неверно. □

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{M}$ — квазимногообразие из леммы 4. Тогда $\mathcal{M}$ не имеет независимого базиса квазитождеств в классе $\mathcal{N}_2$.*

Доказательство. Предположим сначала, что класс $\mathcal{M}$ является конечно аксиоматизируемым в $\mathcal{N}_2$. Тогда в силу теоремы компактности [19] $\mathcal{M}$ задаётся в $\mathcal{N}_2$ некоторым конечным подмножеством квазитождеств из списка, приведённого в формулировке леммы 4. Из лемм 2, 3 все формулы из этого конечного подмножества истинны в некоторой группе $G_{n,q}, q \in I$. Это противоречит тому, что $G_{n,q} \notin \mathcal{M}$. Итак, $\mathcal{M}$ не конечно аксиоматизируемо в $\mathcal{N}_2$.

Допустим, что квазимногообразие $\mathcal{M}$ имеет независимый базис квазитождеств в классе $\mathcal{N}_2$. Поскольку $\mathcal{M}$ не конечно аксиоматизируемо в $\mathcal{N}_2$, то из теоремы компактности (см. также [18], теорема 1) легко следует, что $\mathcal{M}$ имеет бесконечное множество покрытий в решетке L квазимногобразий нильпотентных групп ступени не выше двух. Пусть $\mathcal{N}$ — покрытие $\mathcal{M}$ в решетке L. По лемме 4 всякое квазитождество $\Phi_{n,q}$ ($n \in \mathbb{N}, q \in I$) истинно в каждой группе из $\mathcal{N}$. Следовательно, найдется группа $G \in \mathcal{N}$, в которой ложно квазитождество Ψ_p. Это означает, что группа G содержит элемент порядка p, т.е. $Z_p \leq G$. Но $Z_p \notin \mathcal{M}$, следовательно, $\mathcal{N} = \mathcal{M} \vee qZ_p$. Отсюда, $\mathcal{M}$ имеет в L не более одного покрытия. □

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{M}$ — квазимногообразие из леммы 4. Тогда $\mathcal{M}$ имеет ω-независимй базис квазитождеств в классе $\mathcal{N}_2$.*

Доказательство. Пусть при $q \in I$ $\Sigma_q = \{\Phi_{n,q} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\Sigma_p = \{\Psi_p\}$, $\Sigma = \cup_{r \in M} \Sigma_r$. Из определения квазимногообразия $\mathcal{M}$ следует, что Σ задаёт $\mathcal{M}$ в классе $\mathcal{N}_2$.

Зафиксируем $q \in I$. По лемме 2 квазитождество Ψ_p истинно в группе $G_{1,q}$ при $p \neq q$ и каждое квазитождество $\Phi_{n,r}$ также истинно в группе $G_{1,q}$ при $r \neq q$. Значит, $G_{1,q} \in Mod_{\mathcal{N}_2}(\Sigma \setminus \Sigma_q)$. Но $\Phi_{1,q}$ ложно в группе $G_{1,q}$, откуда $G_{1,q} \notin \mathcal{M}$. Получили, что $Mod_{\mathcal{N}_2}(\Sigma \setminus \Sigma_q) \neq \mathcal{M}$.

Так как $\Phi_{n,r}$ истинно в Z_p при $r \neq p$, то $Z_p \in Mod_{\mathcal{N}_2}(\Sigma \setminus \Sigma_p)$. Но $Z_p \notin \mathcal{M}$, следовательно $Mod_{\mathcal{N}_2}(\Sigma \setminus \Sigma_p) \neq \mathcal{M}$. Таким образом, $Mod_{\mathcal{N}_2}(\Sigma \setminus \Sigma_r) \neq \mathcal{M}$ при каждом $r \in M$. Значит, Σ — ω-независимый базис квазитождеств в $\mathcal{N}_2$. □

Лемма 7. *Пусть M ($M \subseteq \mathbb{P}$) — произвольное бесконечное подмножество, $p \in M$, $I(M,p) = M \setminus \{p\}$, $\mathcal{M}(M_p)$ — квазимногообразие, определённое множеством квазитождеств $\{\Phi_{n,q} \mid n \in \mathbb{N}, q \in I(M,p)\} \cup \{\Psi_p\}$. Тогда квазимногообразие $\mathcal{M}_M = \cap_{p\in M}\mathcal{M}(M_p)$ имеет независимый базис квазитождеств в классе $\mathcal{N}_2$.*

Доказательство. В [1] доказано (теорема 1), что если $\mathcal{R}$ — любое квазимногообразие групп, содержащее бесконечную циклическую группу, $J = \{p \in \mathbb{P} \mid Z_p \notin \mathcal{R}\}$ — бесконечное множество, то квазимногообразие $\mathcal{R}$ имеет независимый базис $\{\sigma_p \mid p \in J\}$ квазитождеств в классе всех групп. Причём в [1] показано (лемма 2), что при каждом $p \in J$ квазитождество σ_p ложно в группе Z_p и истинно в любой группе Z_q, $q \neq p, q \in J$. Сказанное означает, что множество $\{\sigma_p \mid p \in J\}$ квазитождеств является независимым базисом квазимногообразия $\mathcal{R}$ в классе $\mathcal{N}_2$ в случае, когда $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{N}_2$. Осталось применить сказанное к квазимногообразию $\mathcal{M}_M$. □

Теорема 1. *Существует множество $\mathcal{R}$ квазимногообразий нильпотентных групп класса не выше двух, не имеющих независимого базиса квазитождеств в классе $\mathcal{N}_2$, имеющих ω-независимый базис квазитождеств в $\mathcal{N}_2$, причём пересечение всех квазимногообразий из $\mathcal{R}$ имеет независимый базис квазитождеств в $\mathcal{N}_2$. Совокупность таких множеств $\mathcal{R}$ континуальна.*

Доказательство. Пусть M — произвольное бесконечное подмножество множества $\mathbb{P}$ простых чисел, $p \in M$, $I = M \setminus \{p\}$, $\mathcal{M}_p$ — квазимногообразие, определённое в $\mathcal{N}_2$ множеством квазитождеств $\{\Phi_{n,q} \mid n \in \mathbb{N}, q \in I\} \cup \{\Psi_p\}$. В качестве $\mathcal{R}$ берём

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(M) = \{\mathcal{M}_p \mid p \in M\}.$$

По лемме 5 всякое квазимногообразие из $\mathcal{R}$ не имеет независимого базиса квазитождеств, а ввиду леммы 6 имеет ω-независимй базис квазитождеств в классе $\mathcal{N}_2$. В силу леммы 7 пересечение всех квазимногообразий из $\mathcal{R}$ имеет независимый базис квазитождеств в $\mathcal{N}_2$.

Покажем, что при $M \neq K$ множества $\mathcal{R}(M)$ и $\mathcal{R}(K)$ различные. В самом деле, пусть $q \in M \setminus K$. Тогда, ввиду леммы 2, квазитождество $\Phi_{n,p}$ при каждом $p \in K$ истинно в группе $G_{1,q}$ (и, следовательно, в её подгруппе Z_q). Ясно, что квазитождество Ψ_p при каждом $p \in K$ истинно в группе Z_q. Сказанное означает, что группа Z_q содержится в каждом квазимногообразии из $\mathcal{R}(K)$.

Несложно заметить, что поскольку квазитождество Ψ_q ложно в группе Z_q и $q \in M$, то Z_q не содержится в некотором квазимногообразии из $\mathcal{R}(M)$, откуда $\mathcal{R}(M) \neq \mathcal{R}(K)$. □

References

[1] A. I. Budkin, it Independent axiomatizability of quasivarieties of groups, Mathematical Notes, **31**:6 (1982), 413–417. MR665045

[2] A. I. Budkin, *Independent axiomatizability of quasivarieties of generalized solvable groups*, Algebra and Logic, **25**:3 (1986), 155–166. MR903116

[3] A. I. Budkin, *Independent axiomatizability of quasi-varieties of soluble groups*, Algebra and Logic, **30**:2 (1991), 81–100. MR1159145

[4] A. I. Budkin, *On the independent axiomatizability of quasimanifolds of universal algebras*, Mathematical Notes, **56**:4 (1994), 1008–1014. MR1330373

[5] N. Ya. Medvedev, *Quasivarieties ofZ-groups and groups*, Siberian Mathematical Journal, **26**:5 (1985), 717–723. MR808707

[6] A. I. Budkin, *Quasivarieties of groups having no coverings*, Mathemanical Notes, **37**:5 (1985), 333–337. MR797700

[7] A. N. Fedorov, *Quasi-identities of a free 2-nilpotent group*, Mathematical Notes, **40**:5 (1986), 837–841. Zbl 0622.20021

[8] A. N. Fedorov, *Subquasivarieties of nilpotent minimal non-Abelian group varieties*, Siberian Mathematical Journal, **21**:6 (1980), 840–850. MR601196

[9] V. I. Tumanov, *Finite lattices having no independent basis of quasiidentities*, Mathematical Notes, **36**:5 (1984), 811–815. MR773799

[10] V. K. Kartashov, *Quasivarieties of unars*, Math. Notes, **27**:1 (1980), 5–12. MR562473

[11] S. V. Sizyi, *Quasivarieties of graphs*, Siberian Mathematical Journal, **35**:4 (1994), 783–794.

[12] A. V. Kravchenko, *Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras. II*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 388-394. MR3506875

[13] A. Basheyeva, A.M.Nurakunov, M.V.Schwidefsky, and A. Zamojska-Dzienio, *Lattices of subclasses. III*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 252–263. MR3633260

[14] A. V. Kravchenko, A. V. Yakovlev, *Quasivarieties of graphs and independent axiomatizability*, Siberian Advances in Mathematics, **20**:2 (2017), 80-–89. MR3728552

[15] A. V. Kartashova, *Antivarieties of unars*, Algebra and Logic, **50**:4 (2011), 357–364. MR2893586

[16] A. O. Basheyeva, A. V. Yakovlev, *On ω-independent bases for quasi-identities*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 838–847. MR3693748

[17] V. A. Gorbunov, *Algebraic Theory of Quasivarieties*, Siberian School of Algebra and Logic, Consultants Bureau, 1998.

[18] V. A. Gorbunov, *Covers in lattices of quasivarieties and independent axiomatizability*, Algebra and Logic, **16**:5 (1977), 340–369. MR0538179

[19] A.I. Malcev, *Algebraic Systems*, Springer-Verlag, 1973.

[20] A. I. Budkin, V. A. Gorbunov, *Quasivarieties of algebraic systems*, Algebra and Logic, **14**:2 (1975), 73–84. MR0396373

Alexandr Ivanovich Budkin
Altai State University,
61, Lenina ave.,
Barnaul, 656049, Russia
E-mail address: budkin@math.asu.ru