S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 523–541 (2019) УДК 519.714.4
DOI 10.33048/semi.2019.16.034 MSC 06E30

СЛОЖНОСТЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В КЛАССАХ РАСШИРЕННЫХ ДВУПОРОЖДЕННЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ФОРМ

А.С. ФРАНЦЕВА

Abstract. In this paper, we study the problem of receiving the complexity's value of Boolean functions' representations in some classes of polynomial normal forms or exclusive-or sum-of-products expressions (ESOPs). These classes are extensions of known classes of polarized Zhegalkin polynomials or Reed-Muller forms and the Kronecker forms' class. An operator approach for the ESOPs classes' description is used in the work. A Boolean function is represented as a sum of operator images with respect to some basis function. If we consider the product's function as the basic function, then the classes of operator forms are becoming the ESOPs. In this paper, we received estimates of the complexity's value in various classes of extended pair-generated operator forms. The lower bound of the complexity's value to the class of all extended pair-generated operator forms (A. Baliuk and S. Vinokourov, 2001) was improved.

Keywords: Boolean functions, polynomial normal forms, exclusive-or sum-of-products expressions, extended pair-generated operator forms.

1. Введение

В работе получены оценки значения функции Шеннона для классов полиномиальных нормальных форм (ПНФ), являющихся расширениями ряда классов, среди которых класс поляризованных полиномов Жегалкина и класс кронекеровых форм.

Frantseva, A.S., Complexity of Boolean functions' representations in classes of extended pair-generated operator forms.

Поступила 26 июля 2019 г., опубликована 19 апреля 2019 г.

Под полиномиальной нормальной формой понимается каноническое представление булевой функции термами, построенными в базисе конъюнкции, сложения по модулю два и отрицания. Функция Шеннона характеризует сложность представлений булевых функций в классах ПНФ как числа слагаемых. В статье оценивается нижняя и верхняя граница значения функции Шеннона. Значения для верхней границы найдены из свойств введенных полиномиальных форм булевых функций. Для получения значения нижней границы найдены последовательности функций соответствующей сложности.

В работе используется операторный подход к описанию классов ПНФ. В данном случае булева функция представляется в виде суммы операторных образов по некоторой базисной функции. Классы операторных форм становятся классами ПНФ, если в качестве базисной функции рассматривать функцию произведения. В [1] в рамках операторного подхода были получены оценки сложности в классах кронекеровых и псевдо-кронекеровых форм. В [6] через операторный подход введены схожие с классом поляризованных полиномов Жегалкина еще два класса, один из которых содержит базис совершенной полиномиальной нормальной формы. В [3] введены 3^n классов, которые имеют строение подобное классу поляризованных полиномов Жегалкина с аналогичными свойствами, приводящими к тому, что сложность во всех этих классах совпадает со сложностью в классе поляризованных полиномов Жегалкина и в классе кронекеровых форм. В данной работе рассматриваются расширения этих классов.

Результаты исследований сложности представлений в классе всех ПНФ можно посмотреть в [2], [4].

Более подробные сведения об операторном подходе можно найти в [6]. В работе приведены основные определения и утверждения необходимые для изложения результатов.

В доказательстве теорем 1 и 3 строятся последовательности «сложных» булевых функций. Для $n = 3$ в теореме 1 и для $n = 4$ в теореме 3 эти функции построены с помощью вычислительной техники. Компьютерная реализация модифицированной версии алгоритма минимизации булевых функций в классе кронекеровых форм [3] позволила найти значения сложностей этих функций, которые используются в доказательствах и приведены в таблицах 2–7, 10. Для работы данного алгоритма осуществлялось компьютерное построение специальной операторной формы булевой функции [7].

Основные определения и обозначения. Обозначим через $\tilde{\sigma}$ двоичный набор $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ длины n, где $\sigma_i \in \{0,1\}$ – компоненты двоичного набора, $i \in \{1, ..., n\}$. В дальнейшем при необходимости набор $\tilde{\sigma}$ будет ассоциироваться с целым положительным числом $X = 2^{n-1}\sigma_1 + ... + 2^0\sigma_n$, а множество наборов $\{0,1\}^n = \{\tilde{\sigma}_0, ..., \tilde{\sigma}_{2^n-1}\}$ будет упорядочено согласно ассоциируемыми с ними числами.

Аргументы булевой функции f будем именовать переменными и обозначать символами: x, y, возможно, с индексами. Если набор переменных обозначить следующим образом: $\tilde{x} = (x_1, ..., x_n)$, то в тексте возможна сокращенная запись: $f(x_1, ..., x_n) = f(\tilde{x})$. Через $f'_{x_i}(\tilde{x})$ обозначается производная булевой функции $f(\tilde{x})$ по переменной x_i :

$$f'_{x_i}(\tilde{x}) = f(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_i, ..., x_n) \oplus f(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_i, ..., x_n)$$

x^σ означает x, если $\sigma = 1$ и $\bar{x}$, если $\sigma = 0$. Символами $\oplus$, $\bigoplus$ обозначается сложение по модулю 2, символ конъюнкции в виде «$\cdot$» может быть опущен.

Под *оператором* $\mathtt{t}$, будем понимать отображение линейного пространства всех булевых функций B_n в B_n :

$$\mathtt{t}: \ B_n \to B_n.$$

Оператор представляется в виде последовательности $\mathtt{t} = t_1 ... t_n$, компоненты которой t_i принадлежат множеству специальных символов e, d, p; n – длина оператора.

Компонента t_i оператора $\mathtt{t}$ действует на функцию $f(\tilde{x})$ по переменной x_i следующим образом:

$$t_i f(\tilde{x}) = \begin{cases} f(\tilde{x}), \text{ если } t_i = e, \\ f(x_1, ..., \bar{x}_i, ..., x_n), \text{ если } t_i = p, \\ f'_{x_i}(\tilde{x}), \text{ если } t_i = d. \end{cases}$$

Действие оператора $\mathtt{t} = t_1 ... t_n$ на функцию $f(\tilde{x})$ по переменным $x_1, ..., x_n$ определяется так:

$$t(f(\tilde{x})) = t_1(t_2 ... t_n f(\tilde{x})).$$

Набор $\mathtt{T} = \{\mathtt{t}^{\tilde{0}}, ..., \mathtt{t}^{\tilde{\tau}}, ..., \mathtt{t}^{\tilde{1}}\}$ из 2^n операторов, где каждый оператор имеет длину n, называется *пучком операторов*.

Пучок операторов $\mathtt{B} = \{\mathtt{b}^{\tilde{0}}, ..., \mathtt{b}^{\tilde{\tau}}, ..., \mathtt{b}^{\tilde{1}}\}$ называется *базисным*, если существует функция $g(\tilde{x})$ такая, что операторные образы

$$\{\mathtt{b}^{\tilde{0}} g(\tilde{x}), ..., \mathtt{b}^{\tilde{\tau}} g(\tilde{x}), ..., \mathtt{b}^{\tilde{1}} g(\tilde{x})\}$$

образуют базис пространства B_n, как линейного векторного пространства; функция $g(\tilde{x})$ называется базисной.

В дальнейшем изложении, если не оговорено специально, в качестве функции $g(\tilde{x})$ будем подразумевать функцию произведения:

$$g(\tilde{x}) = x_1 \cdot ... \cdot x_n.$$

Операторный пучок $\mathtt{A} = (\mathtt{a}^{\tilde{0}}, \ldots, \mathtt{a}^{\tilde{\tau}}, \ldots, \mathtt{a}^{\tilde{1}})$ называется *двупорожденным*, если существуют такие операторы $\mathtt{b} = b_1 \ldots b_n$ и $\mathtt{c} = c_1 \ldots c_n$, $b_i \neq c_i$ для любого i, что оператор $\mathtt{a}^{\tilde{\tau}} = t_1 \ldots t_n$ пучка $\mathtt{A}$ определяется следующим образом:

$$t_i = \begin{cases} b_i, \text{ если } \tau_i = 0, \\ c_i, \text{ если } \tau_i = 1. \end{cases}$$

Любой двупорожденный операторный пучок является базисным [6].

Пусть $\mathtt{A} = (\mathtt{a}^{\tilde{0}}, ..., \mathtt{a}^{\tilde{\tau}}, ..., \mathtt{a}^{\tilde{1}})$ – двупорожденный операторный пучок. Тогда булева функция f имеет следующую операторную форму по пучку $\mathtt{A}$:

(1) $$OF(f) = \bigoplus_{\tilde{\tau} \in \{0,1\}^n} \alpha_{\tilde{\tau}} \mathtt{a}^{\tilde{\tau}} g(\tilde{x}),$$

где $\alpha_{\tilde{\tau}} \in \{0, 1\}$.

Оператор $\mathtt{c}$ будем называть суммой операторов $\mathtt{a}$, $\mathtt{b}$, если для любой булевой функции $f(\tilde{x})$ верно следующее равенство:

$$\mathtt{c} f(\tilde{x}) = \mathtt{a} f(\tilde{x}) \oplus \mathtt{b} f(\tilde{x}).$$

Далее удобно записывать так: $\mathtt{c} = \mathtt{a} \oplus \mathtt{b}$.

В [6] доказано, что для любого двупорожденного операторного пучка $\mathtt{A} = (\mathtt{a}^{\tilde{0}}, ..., \mathtt{a}^{\tilde{\tau}}, ..., \mathtt{a}^{\tilde{1}})$ существует оператор

$$\mathtt{c} = \bigoplus_{\tilde{\tau}\in\{0,1\}^n} \mathtt{a}^{\tilde{\tau}}.$$

В дальнейшем для удобства записи сумма вида $\bigoplus_{\tilde{\tau}\in\{0,1\}^n}$ обозначается через $\bigoplus_{\tilde{\tau}}$.

Классы расширенных двупорожденных операторных форм. Пусть класс $H_{\mathtt{b}}$ обозначает *класс двупорожденных операторных форм,* построенных по пучкам вида $\mathtt{A} = (\mathtt{a}^{\tilde{0}}, ..., \mathtt{a}^{\tilde{\tau}}, ..., \mathtt{a}^{\tilde{1}})$, в которых $\mathtt{a}^{\tilde{0}} = \mathtt{b}$.

Через H обозначается класс всех *двупорожденных операторных форм.* Класс H имеет второе название, класс однородных операторных форм, которое встречается в [6].

Рассмотрим двупорожденный операторный пучок $\mathtt{A} = (\mathtt{a}^{\tilde{0}}, ..., \mathtt{a}^{\tilde{\tau}}, ..., \mathtt{a}^{\tilde{1}})$ и пусть $\mathtt{c} = \bigoplus_{\tilde{\tau}} \mathtt{a}^{\tilde{\tau}}$. Класс

$$E_{\mathtt{A}} = \bigcup_{\tilde{\delta}\in\{0,1\}^n} \{\mathtt{T}_{\tilde{\delta}}\} \cup \{\mathtt{A}\}$$

называется *расширением двупорожденного операторного пучка* $\mathtt{A}$, если операторный пучок $\mathtt{T}_{\tilde{\delta}} = (\mathtt{t}^{\tilde{0}}, ..., \mathtt{t}^{\tilde{\tau}}, ..., \mathtt{t}^{\tilde{1}})$ строится следующим образом:

$$\mathtt{t}^{\tilde{\tau}} = \begin{cases} \mathtt{a}^{\tilde{\tau}}, \text{ если } \tilde{\tau} \neq \tilde{\delta}, \\ \mathtt{c}, \text{ если } \tilde{\tau} = \tilde{\delta}. \end{cases}$$

Базисность пучков вида $\mathtt{T}_{\tilde{\delta}} = (\mathtt{t}^{\tilde{0}}, ..., \mathtt{t}^{\tilde{\tau}}, ..., \mathtt{t}^{\tilde{1}})$ вытекает из следующих соображений.

Пусть существуют наборы $\tilde{\tau}^1, ..., \tilde{\tau}^k$ такие, что

$$\mathtt{t}^{\tilde{\tau}^1} g(\tilde{x}) \oplus ... \oplus \mathtt{t}^{\tilde{\tau}^k} g(\tilde{x}) = 0.$$

Если $\mathtt{t}^{\tilde{\tau}^i} \neq \mathtt{c}$ для любого i, то получим сумму базисных функций, равную нулю. Если $\mathtt{t}^{\tilde{\tau}^i} = \mathtt{c}$, для удобства записи пусть $i = 1$, то при подстановке в предыдущее равенство оператора $\mathtt{c} = \bigoplus_{\tilde{\tau}} \mathtt{a}^{\tilde{\tau}}$ и выполнении сокращений также получается сумма базисных функций, равная нулю:

$$\left(\bigoplus_{\tilde{\tau}\in\{0,1\}^n} \mathtt{a}^{\tilde{\tau}} g(\tilde{x})\right) \oplus \mathtt{a}^{\tilde{\tau}^2} g(\tilde{x}) \oplus ... \oplus \mathtt{a}^{\tilde{\tau}^k} g(\tilde{x}) = \bigoplus_{\tilde{\tau}\in E} \mathtt{a}^{\tilde{\tau}} g(\tilde{x}),$$

где $E = \{0,1\}^n \backslash \{\tilde{\tau}^1, ..., \tilde{\tau}^k\}$.

Подробно классы $E_{\mathtt{A}}$ рассмотрены в [6].

Класс

$$EH_{\mathtt{b}} = \bigcup_{\mathtt{A}\in H_{\mathtt{b}}} E_{\mathtt{A}}$$

обозначает *класс расширенных двупорожденных операторных форм, построенных по пучкам из класса* $H_{\mathtt{b}}$.

Через

$$EH = \bigcup_{\mathtt{A}\in H} E_{\mathtt{A}}$$

обозначается класс всех *расширенных двупорожденных операторных форм.*

Отметим, что

$$H = \bigcup_{\mathtt{b}} H_{\mathtt{b}};$$

$$EH = \bigcup_{\mathtt{b}} EH_{\mathtt{b}}$$

по всем операторам $\mathtt{b}$.

Сложность в классах операторных форм. Сложность представлений булевых функций в различных классах операторных форм определяется стандартным образом.

Сложностью $l(f)$ *операторной формы* $OF(f)$ вида (1) функции f называется число

$$l(f) = \sum_{\tilde{\tau} \in \{0,1\}^n} \alpha_{\tilde{\tau}}.$$

Пусть K – класс базисных операторных пучков. Тогда *сложность функции* f *в классе* K равна:

$$L_K(f) = \min_{OF(f)} (l(f))$$

по всем операторным формам $OF(f)$ функции f, построенным по пучкам класса K.

Функция Шеннона сложности представления всех булевых функций в классе K равна:

$$L_K(n) = \max_{f \in B_n} (L_K(f)).$$

Класс двупорожденных операторных форм $H_{d\ldots d}$ является в точности классом поляризованных полиномов Жегалкина. В [5] было получено точное значение функции Шеннона в этом классе:

$$L_{H_{d\ldots d}}(n) = \left\lfloor \frac{2}{3} 2^n \right\rfloor.$$

В [6] были введены классы, аналогичные классу $H_{d\ldots d}$, — классы $H_{e\ldots e}$, $H_{p\ldots p}$, — и было доказано, что значение функции Шеннона в этих классах и в классе H совпадает со значением $L_{H_{d\ldots d}}(n)$.

Все остальные классы вида $H_{\mathtt{b}}$ вводились в работах, например, [3], в которых для получения сложности применялась специальная операторная форма [7].

В [6] было также доказано, что значение функции Шеннона $L_{E_{\mathtt{A}}}(n)$ в каждом из классов $E_{\mathtt{A}}$ равно:

$$L_{E_{\mathtt{A}}}(n) = \frac{1}{2} 2^n.$$

Доказательство данного утверждения вытекает из следующих рассуждений. Пусть произвольная булева функция $f(\tilde{x})$ по двупорожденному операторному пучку $\mathtt{A}$ имеет операторную форму $OF(f)$ вида (1). Тогда по пучку $\mathtt{T}_{\tilde{\delta}} \in E_{\mathtt{A}}$ операторная форма $OF_+(f)$ функции f совпадает с $OF(f)$ при $\alpha_{\tilde{\delta}} = 0$, а при $\alpha_{\tilde{\delta}} = 1$ имеет следующий вид:

$$OF_+(f) = \bigoplus_{\tilde{\tau}} \bar{\alpha}_{\tilde{\tau}} \mathtt{a}^{\tilde{\tau}} g(\tilde{x}) \oplus \mathtt{c} g(\tilde{x}). \tag{2}$$

Пусть сложность $l(f)$ операторной формы $OF(f)$ равна k. Тогда сложность $l(f)$ операторной формы $OF_{+}(f)$ функции f в соответствии с (2) будет равна:

$$l(f) = \begin{cases} k, \text{ если } \alpha_{\tilde{\delta}} = 0, \\ 2^n - k + 1, \text{ если } \alpha_{\tilde{\delta}} = 1, \end{cases}$$

а сложность функции f во всем классе $E_{\mathtt{A}}$ вычисляется так:

$$L_{E_{\mathtt{A}}}(f) = \min\{k;\ 2^n - k + 1\}. \tag{3}$$

Из равенства (3) следует, что

$$L_{E_{\mathtt{A}}}(n) = \max_{f \in B_n} L_{E_{\mathtt{A}}}(f) = \frac{1}{2}2^n.$$

В других классах расширенных двупорожденных операторных пучков известны следующие оценки сложности:

- в классе $EH_{d\ldots d}$ [8],

$$L_{EH_{d\ldots d}}(n) = \frac{1}{2}2^n;$$

- в классе EH [6],

$$\frac{1}{3}2^n < L_{EH}(n) \le \frac{1}{2}2^n. \tag{4}$$

Отметим, что последние неравенства доказываются на основе несложных выкладок с использованием оценок сложности в классах H и $E_{\mathtt{A}}$.

2. Основные результаты

Сложность в классах $EH_{\mathtt{b}}$. Для получения верхней и нижней оценок функции Шеннона $L_{EH_{\mathtt{b}}}(n)$ в любом из классов $EH_{\mathtt{b}}$ полезно следующее свойство функции $L_{EH_{\mathtt{b}}}(f)$.

Предложение 1. *Для любого класса $EH_{\mathtt{b}}$, где $\mathtt{b}$ оператор длины n, сложность $L_{EH_{\mathtt{b}}}(f)$ булевой функции $f(\tilde{x})$ равна:*

$$L_{EH_{\mathtt{b}}}(f) = \min\{\min_{OF(f)}\{l(f)\}; 2^n - \max_{OF(f)}\{l(f)\} + 1\},$$

по всем операторным формам $OF(f)$, построенным по пучкам класса $H_{\mathtt{b}}$.

Доказательство. Пусть для некоторого оператора $\mathtt{b}$ построен класс двупорожденных операторных пучков $H_{\mathtt{b}} = \{\mathtt{A}^1, \ldots, \mathtt{A}^N\}$, где $N = 2^n$ и $\mathtt{A}^i = (\mathtt{b}, \ldots, \mathtt{a}^{\tilde{\tau},i}, \ldots, \mathtt{a}^{\tilde{1},i})$.

Для произвольной булевой функции f по всем $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ обозначим через $OF_i(f)$ операторную форму функции f, построенную по пучку $\mathtt{A}^i$, а через k_i – сложность $l(f)$ операторной формы $OF_i(f)$.

По определению сложности функции и по соотношению (3) сложность функции f в классе $EH_{\mathtt{b}}$ равна:

$$L_{EH_{\mathtt{b}}}(f) = \min_{OF_i(f)}\{\min\{k_i,\ 2^n - k_i + 1\}\},\ 1 \le i \le N. \tag{5}$$

В равенстве (5) распишем компоненты k_i и $2^n - k_i + 1$ по всем i, сгруппируем и преобразуем получившееся равенство:

$$\begin{aligned} L_{EH_{\mathfrak{b}}}(f) &= \min\{\min\{k_1,\ 2^n - k_1 + 1\}, \dots, \min\{k_N,\ 2^n - k_N + 1\}\} = \\ &= \min\{\min\{k_1, \dots, k_N\},\ \min\{2^n - k_1 + 1, \dots, 2^n - k_N + 1\}\} = \\ &= \min\{\min_{OF_i(f)}\{k_i\},\ \min_{OF_i(f)}\{2^n - k_i + 1\}\} = \\ &= \min\{\min_{OF_i(f)}\{k_i\},\ 2^n - \max_{OF_i(f)}\{k_i\} + 1\}. \end{aligned}$$

Поскольку k_i обозначают сложности $l(f)$ операторных форм $OF_i(f)$ по всем $i \in \{1, 2, ..., N\}$ и приводимые преобразования справедливы для любого класса $EH_{\mathfrak{b}}$, то предложение 1 доказано.

$\square$

Следствие 1. *Значение функции Шеннона сложности представлений всех булевых функций в любом из классов $EH_{\mathfrak{b}}$ удовлетворяет неравенству:*

$$L_{EH_{\mathfrak{b}}}(n) \le \frac{1}{2}2^n.$$

Для получения значения нижней границы функции Шеннона $L_{EH_{\mathfrak{b}}}(n)$, достаточно построить последовательность таких функций, у которых, в соответствии с предложением 1, минимальное и максимальное значения сложности операторных форм в классе $H_{\mathfrak{b}}$ были бы близкими к значению $\frac{1}{2}2^n$, и разность между этими значениями была бы наименьшей.

Рассмотрим 6 последовательностей множеств функций

$$M_n^j = \{p_n^j(\tilde{x}), q_n^j(\tilde{x}), t_n^j(\tilde{x})\},\ n \ge 3,\ j \in \{1, 2, ..., 6\}.$$

Функции множеств M_i^j определяются индуктивно. При $n = 3$ функции $p_3^j(x_1, x_2, x_3)$, $q_3^j(x_1, x_2, x_3)$, $t_3^j(x_1, x_2, x_3)$ представлены в таблице 1.

Таблица 1. Функции $p_3^j(x_1, x_2, x_3)$, $q_3^j(x_1, x_2, x_3)$, $t_3^j(x_1, x_2, x_3)$

j	$p_3^j(x_1, x_2, x_3)$	$q_3^j(x_1, x_2, x_3)$	$t_3^j(x_1, x_2, x_3)$
1.	00011011	11010001	11001010
2.	10100001	11001101	01101100
3.	01010011	10001011	11011000
4.	01011101	01100101	00111000
5.	10111010	00011100	10100110
6.	01000110	10110100	11110010

При $n > 3$ функции $p_n^j(\tilde{x})$, $q_n^j(\tilde{x})$, $t_n^j(\tilde{x})$ определяются следующим образом:

$$p_n^j(\tilde{x}) = x_1 q_{n-1}^j(x_2, ..., x_n) \oplus \bar{x}_1 p_{n-1}^j(x_2, ..., x_n),$$

$$q_n^j(\tilde{x}) = x_1 t_{n-1}^j(x_2, ..., x_n) \oplus \bar{x}_1 q_{n-1}^j(x_2, ..., x_n),$$

$$t_n^j(\tilde{x}) = x_1 p_{n-1}^j(x_2, ..., x_n) \oplus \bar{x}_1 t_{n-1}^j(x_2, ..., x_n)$$

по всем $j \in \{1, 2, ..., 6\}$.

Для сокращения дальнейших записей для функций из множеств M_n^j, M_{n-1}^j введем обозначения: $f_n^j(\tilde{x}) = f_n^j$, $\quad f_{n-1}^j(x_2, ..., x_n) = f_{n-1}^j$.

Предложение 2. *Для функций* p_n^j, q_n^j, t_n^j *множеств* M_n^j, $j \in \{1, 2, ..., 6\}$, $n \geq 3$, *справедливы следующие равенства:*

$$p_n^j \oplus q_n^j \oplus t_n^j = 0, \tag{6}$$

$$p_n^j = x_1 t_{n-1}^j \oplus p_{n-1}^j \tag{7}$$

$$p_n^j = \bar{x}_1 t_{n-1}^j \oplus q_{n-1}^j, \tag{8}$$

$$q_n^j = x_1 p_{n-1}^j \oplus q_{n-1}^j \tag{9}$$

$$q_n^j = \bar{x}_1 p_{n-1}^j \oplus t_{n-1}^j, \tag{10}$$

$$t_n^j = x_1 q_{n-1}^j \oplus t_{n-1}^j, \tag{11}$$

$$t_n^j = \bar{x}_1 q_{n-1}^j \oplus p_{n-1}^j. \tag{12}$$

Доказательство. При $j = 1$ предложение доказано в [8]. Для остальных j доказательство является почти дословным воспроизведением доказательства этого случая.

Индукцией по числу переменных докажем свойство (6). При $n = 3$ равенство проверяется непосредственно по таблице 1. При $n > 3$ предположим, что свойство выполняется для функций p_{n-1}^j, q_{n-1}^j, t_{n-1}^j. Тогда по определению

$$\begin{aligned} &p_n^j \oplus q_n^j \oplus t_n^j = \\ &\quad = (x_1 q_{n-1}^j \oplus \bar{x}_1 p_{n-1}^j) \oplus (x_1 t_{n-1}^j \oplus \bar{x}_1 q_{n-1}^j) \oplus (x_1 p_{n-1}^j \oplus \bar{x}_1 t_{n-1}^j) = \\ &\qquad = x_1 (p_{n-1}^j \oplus q_{n-1}^j \oplus t_{n-1}^j) \oplus \bar{x}_1 (p_{n-1}^j \oplus q_{n-1}^j \oplus t_{n-1}^j) = 0 \end{aligned}$$

Свойства (7), (8) следуют из доказанного свойства (6).

$$\begin{aligned} &p_n^j = x_1 q_{n-1}^j \oplus \bar{x}_1 p_{n-1}^j = x_1 q_{n-1}^j \oplus x_1 p_{n-1}^j \oplus p_{n-1}^j = \\ &\qquad = x_1 (q_{n-1}^j \oplus p_{n-1}^j) \oplus p_{n-1}^j = x_1 t_{n-1}^j \oplus p_{n-1}^j; \\ &\quad p_n^j = x_1 q_{n-1}^j \oplus \bar{x}_1 p_{n-1}^j = x_1 q_{n-1}^j \oplus \bar{x}_1 p_{n-1}^j \oplus q_{n-1}^j \oplus q_{n-1}^j = \\ &\qquad\qquad = \bar{x}_1 (q_{n-1}^j \oplus p_{n-1}^j) \oplus q_{n-1}^j = \bar{x}_1 t_{n-1}^j \oplus q_{n-1}^j. \end{aligned}$$

Остальные равенства доказываются аналогично. □

Теорема 1. *Для любого класса* $H_{\mathtt{b}}$ *существует последовательность функций* p_n, q_n, t_n $(n \geq 3)$ *таких, что значения сложностей* $l(p_n)$, $l(q_n)$, $l(t_n)$ *операторных форм этих функций в классе* $H_{\mathtt{b}}$ *либо равны* $\frac{1}{2}2^n$, *либо попарно различны и принадлежат множеству* $\left\{\frac{1}{2}2^n - 1, \frac{1}{2}2^n, \frac{1}{2}2^n + 1\right\}$.

Доказательство. Разобьем множество всех классов вида $H_{\mathtt{b}}$, где $\mathtt{b} = b_1...b_n$, на подмножества:

$\mathrm{H}^1 = \{H_{b_1...b_{n-3}pep},\ H_{b_1...b_{n-3}pde},\ H_{b_1...b_{n-3}epe},\ H_{b_1...,b_{n-3}eed}, H_{b_1...,b_{n-3}dpp},$
$H_{b_1...,b_{n-3}ddd}\};$

$\mathrm{H}^2 = \{H_{b_1...b_{n-3}ppe},\ H_{b_1...b_{n-3}ped},\ H_{b_1...b_{n-3}epp},\ H_{b_1...,b_{n-3}edd}, H_{b_1...,b_{n-3}dep},$
$H_{b_1...,b_{n-3}dde}\};$

$\mathrm{H}^3 = \{H_{b_1...b_{n-3}ppd},\ H_{b_1...b_{n-3}edp},\ H_{b_1...b_{n-3}dee}\};$

$\mathrm{H}^4 = \{H_{b_1...b_{n-3}pdp},\ H_{b_1...b_{n-3}eee},\ H_{b_1...b_{n-3}dpd}\};$

$\mathrm{H}^5 = \{H_{b_1...b_{n-3}ppp},\ H_{b_1...b_{n-3}pdd},\ H_{b_1...b_{n-3}eep},\ H_{b_1...,b_{n-3}ede}, H_{b_1...,b_{n-3}dpe},$
$H_{b_1...,b_{n-3}ded}\};$

$\mathrm{H}^6 = \{H_{b_1...b_{n-3}pee},\ H_{b_1...b_{n-3}epd},\ H_{b_1...b_{n-3}ddp}\}.$

При $n = 3$ подмножества H^j содержат следующие классы операторных форм, построенных по пучкам, операторы в которых имеют длину 3:

$\mathrm{H}^1 = \{H_{pep},\ H_{pde},\ H_{epe},\ H_{eed}, H_{dpp},\ H_{ddd}\}$;

$\mathrm{H}^2 = \{H_{ppe},\ H_{ped},\ H_{epp},\ H_{edd}, H_{dep},\ H_{dde}\}$;

$\mathrm{H}^3 = \{H_{ppd},\ H_{edp},\ H_{dee}\}$;

$\mathrm{H}^4 = \{H_{pdp},\ H_{eee},\ H_{dpd}\}$;

$\mathrm{H}^5 = \{H_{ppp},\ H_{pdd},\ H_{eep},\ H_{ede}, H_{dpe},\ H_{ded}\}$;

$\mathrm{H}^6 = \{H_{pee},\ H_{epd},\ H_{ddp}\}$.

При $n = 3$ в таблицах 2 – 7 приведены значения сложностей $l(f_3^j)$ операторных форм функций $f_3^j \in M_3^j$ в соответствии с подмножествами H^j, $j \in \{1, 2, ..., 6\}$.

Каждая таблица состоит из 3 или 6 меньших таблиц, содержащих значения сложностей операторных форм функций в классах $H_{\mathtt{b}} \in \mathrm{H}^j$. Например, таблица 2 состоит из 6 таблиц, соответствующих классам H_{pep}, H_{pde}, H_{epe}, H_{eed}, H_{dpp}, H_{ddd} подмножества H^1. В каждой из этих таблиц в столбце $\mathtt{a}^{\tilde{1}}$ перечислены последние операторы пучков, составляющих соответствующий класс. Например, класс H_{pep} состоит из пучков: $(pep, ..., ddd)$, $(pep, ..., dde)$ и т.д. $(pep, ..., epe)$. Следующие 3 столбца содержат значения сложности операторных форм $l(p_3^1)$, $l(q_3^1)$, $l(t_3^1)$ функций p_3^1, q_3^1, t_3^1 по этим пучкам.

Данные таблиц показывают, что по предложению 1 утверждение теоремы выполняется при $n = 3$.

Таблица 2. Значения сложности $l(p_3^1)$, $l(q_3^1)$, $l(t_3^1)$ операторных форм функций p_3^1, q_3^1, t_3^1 в классах подмножества H^1

H_{pep}				H_{pde}				H_{epe}			
$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^1)$	$l(q_3^1)$	$l(t_3^1)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^1)$	$l(q_3^1)$	$l(t_3^1)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^1)$	$l(q_3^1)$	$l(t_3^1)$
ddd	4	4	4	ded	5	3	4	ddd	4	4	4
dde	3	5	4	dep	3	5	4	ddp	3	4	5
dpd	4	3	5	dpd	4	3	5	ded	5	3	4
dpe	5	3	4	dpp	4	4	4	dep	3	5	4
edd	5	4	3	eed	4	4	4	pdd	4	5	3
ede	3	4	5	eep	3	4	5	pdp	5	4	3
epd	4	5	3	epd	4	5	3	ped	4	3	5
epe	4	4	4	epp	5	4	3	pep	4	4	4
H_{eed}				H_{dpp}				H_{ddd}			
$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^1)$	$l(q_3^1)$	$l(t_3^1)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^1)$	$l(q_3^1)$	$l(t_3^1)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^1)$	$l(q_3^1)$	$l(t_3^1)$
dde	3	5	4	edd	5	4	4	eee	3	5	4
ddp	3	4	5	ede	3	4	5	eep	3	4	5
dpe	5	3	4	eed	4	4	4	epe	4	4	4
dpp	4	4	4	eee	3	5	4	epp	5	4	3
pde	4	4	4	pdd	4	5	3	pee	5	3	4
pdp	5	4	3	pde	4	4	4	pep	4	4	4
ppe	4	3	5	ped	4	3	5	ppe	4	3	5
ppp	4	5	3	pee	5	3	4	ppp	4	5	3

Таблица 3. Значения сложности $l(p_3^2)$, $l(q_3^2)$, $l(t_3^2)$ операторных форм функций p_3^2, q_3^2, t_3^2 в классах подмножества H^2

H_{ppe}				H_{ped}				H_{epp}			
$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^2)$	$l(q_3^2)$	$l(t_3^2)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^2)$	$l(q_3^2)$	$l(t_3^2)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^2)$	$l(q_3^2)$	$l(t_3^2)$
ddd	4	5	3	*dde*	4	4	4	*ddd*	4	5	3
ddp	5	4	3	*ddp*	5	4	3	*dde*	4	4	4
ded	4	3	5	*dpe*	4	3	5	*ded*	4	3	5
dep	4	4	4	*dpp*	4	5	3	*dee*	5	3	4
edd	4	4	4	*ede*	3	5	4	*pdd*	5	4	3
edp	3	4	5	*edp*	3	4	5	*pde*	3	4	5
eed	5	3	4	*epe*	5	3	4	*ped*	4	4	4
eep	3	5	4	*epp*	4	4	4	*pee*	3	5	4
H_{edd}				H_{dep}				H_{dde}			
$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^2)$	$l(q_3^2)$	$l(t_3^2)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^2)$	$l(q_3^2)$	$l(t_3^2)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^2)$	$l(q_3^2)$	$l(t_3^2)$
dee	5	3	4	*edd*	4	4	4	*eed*	5	3	4
dep	4	4	4	*ede*	3	5	4	*eep*	3	5	4
dpe	4	3	5	*epd*	4	3	5	*epd*	4	3	5
dpp	4	5	3	*epe*	5	3	4	*epp*	4	4	4
pee	3	5	4	*pdd*	5	4	3	*ped*	4	4	4
pep	3	4	5	*pde*	3	4	5	*pep*	3	4	5
ppe	4	4	4	*ppd*	4	5	3	*ppd*	4	5	3
ppp	5	4	3	*ppe*	4	4	4	*ppp*	5	4	3

Таблица 4. Значения сложности $l(p_3^3)$, $l(q_3^3)$, $l(t_3^3)$ операторных форм функций p_3^3, q_3^3, t_3^3 в классах подмножества H^3

H_{ppd}				H_{edp}				H_{dee}			
$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^3)$	$l(q_3^3)$	$l(t_3^3)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^3)$	$l(q_3^3)$	$l(t_3^3)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^3)$	$l(q_3^3)$	$l(t_3^3)$
dde	5	4	3	*ded*	5	3	4	*edd*	3	5	4
ddp	4	5	3	*dee*	4	4	4	*edp*	4	4	4
dee	4	4	4	*dpd*	4	3	5	*epd*	5	3	4
dep	4	3	5	*dpe*	4	5	3	*epp*	4	3	5
ede	3	4	5	*ped*	3	5	4	*pdd*	3	4	5
edp	4	4	4	*pee*	3	4	5	*pdp*	5	4	3
eee	3	5	4	*ppd*	4	4	4	*ppd*	4	4	4
eep	5	3	4	*ppe*	5	4	3	*ppp*	4	5	3

Таблица 5. Значения сложности $l(p_3^4)$, $l(q_3^4)$, $l(t_3^4)$ операторных форм функций p_3^4, q_3^4, t_3^4 в классах подмножества H^4

H_{pdp}				H_{eee}				H_{dpd}			
$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^4)$	$l(q_3^4)$	$l(t_3^4)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^4)$	$l(q_3^4)$	$l(t_3^4)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^4)$	$l(q_3^4)$	$l(t_3^4)$
ded	4	3	5	*ddd*	5	3	4	*ede*	3	5	4
dee	5	3	4	*ddp*	3	5	4	*edp*	3	4	5
dpd	4	4	4	*dpd*	4	4	4	*eee*	4	4	4
dpe	3	5	4	*dpp*	3	4	5	*eep*	5	4	3
eed	4	5	3	*pdd*	4	3	5	*pde*	5	3	4
eee	4	4	4	*pdp*	4	4	4	*pdp*	4	4	4
epd	5	4	3	*ppd*	4	5	3	*pee*	4	3	5
epe	3	4	5	*ppp*	5	4	3	*pep*	4	5	3

Таблица 6. Значения сложности $l(p_3^5)$, $l(q_3^5)$, $l(t_3^5)$ операторных форм функций p_3^5, q_3^5, t_3^5 в классах подмножества H^5

H_{ppp}				H_{pdd}				H_{eep}			
$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^5)$	$l(q_3^5)$	$l(t_3^5)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^5)$	$l(q_3^5)$	$l(t_3^5)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^5)$	$l(q_3^5)$	$l(t_3^5)$
ddd	5	4	3	*dee*	3	5	4	*ddd*	5	4	3
dde	3	4	5	*dep*	3	4	5	*dde*	3	4	5
ded	4	4	4	*dpe*	4	4	4	*dpd*	4	5	3
dpe	3	5	4	*dpp*	5	4	3	*dpe*	4	4	4
dee	4	5	3	*eee*	5	3	4	*pdd*	4	4	4
ded	4	4	4	*eep*	4	4	4	*pde*	3	5	4
eed	4	3	5	*epe*	4	3	5	*ppd*	4	3	5
eee	5	3	4	*epp*	4	5	3	*ppe*	5	3	4
H_{ede}				H_{dpe}				H_{ded}			
$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^5)$	$l(q_3^5)$	$l(t_3^5)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^5)$	$l(q_3^5)$	$l(t_3^5)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^5)$	$l(q_3^5)$	$l(t_3^5)$
ded	4	4	4	*edd*	4	5	3	*ede*	4	4	4
dep	3	4	5	*edp*	5	4	3	*edp*	5	4	3
dpd	4	5	3	*eed*	4	3	5	*epe*	4	3	5
dpp	5	4	3	*eep*	4	4	4	*epp*	4	5	3
ped	5	3	4	*pdd*	4	4	4	*pde*	3	5	4
pep	3	5	4	*pdp*	3	4	5	*pdp*	3	4	5
ppd	4	3	5	*ped*	5	3	4	*ppe*	5	3	4
ppp	4	4	4	*pep*	3	5	4	*ppp*	4	4	4

Таблица 7. Значения сложности $l(p_3^6)$, $l(q_3^6)$, $l(t_3^6)$ операторных форм функций p_3^6, q_3^6, t_3^6 в классах подмножества H^6

H_{pee}				H_{epd}				H_{ddp}			
$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^6)$	$l(q_3^6)$	$l(t_3^6)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^6)$	$l(q_3^6)$	$l(t_3^6)$	$\mathtt{a}^{\tilde{1}}$	$l(p_3^6)$	$l(q_3^6)$	$l(t_3^6)$
ddd	4	3	5	*dde*	5	3	4	*eed*	5	4	3
ddp	4	4	4	*ddp*	4	4	4	*eee*	3	4	5
dpd	5	3	4	*dee*	3	5	4	*epd*	4	4	4
dpp	3	5	4	*dep*	3	4	5	*epe*	3	5	4
edd	4	5	3	*pde*	4	3	5	*ped*	4	5	3
edp	5	4	3	*pdp*	4	5	3	*pee*	4	4	4
epd	4	4	4	*pee*	4	4	4	*ppd*	4	3	5
epp	3	4	5	*pep*	5	4	3	*ppe*	5	3	4

Поскольку при любом $j \in \{1, 2, ..., 6\}$ функции p_n^j, q_n^j, $t_n^j \in M_n^j$ определяются схожим образом, то индуктивный переход продемонстрируем на случае $j = 3$. Для остальных j рассуждения аналогичны. Для удобства обозначим соответствующие функции f_n^3 через f_n, а множество M_n^3 через M_n.

Пусть функции $f_{n-1} \in M_{n-1}$ имеют операторные формы

$$OF(p_{n-1}),\ OF(q_{n-1}),\ OF(t_{n-1})$$

по некоторому двупорожденному операторному пучку

$$\mathtt{A} = (\mathtt{a}^{\tilde{0}}, ..., \mathtt{a}^{\tilde{\tau}}, ..., \mathtt{a}^{\tilde{1}})$$

с операторами длины $n-1$. Для того чтобы получить операторные формы функций $f_n \in M_n$, по пучку $\mathtt{A}$ построим двупорожденный операторный пучок

$$\mathtt{T} = (\mathtt{t}^{\tilde{0}}, ..., \mathtt{t}^{\tilde{\tau}}, ..., \mathtt{t}^{\tilde{1}})$$

с операторами длины n.

Для упрощения изложения пусть $\mathtt{a}^{\tilde{0}} = a_2...a_n$ и $\mathtt{a}^{\tilde{1}} = b_2...b_n$. По определению двупорожденного операторного пучка для построения операторов $\mathtt{t}^{\tilde{0}} =$

$a_1a_2...a_n$ и $\mathtt{t}^{\tilde{1}} = b_1b_2...b_n$ пучка $\mathtt{T}$, возможны следующие случаи для a_1, b_1 : 1) p, e; 2) d, p; 3) e, d и симметричных к ним. Тогда пучок $\mathtt{T}$ примет вид, как показано в таблице 8.

Таблица 8. Построение пучка $\mathtt{T} = (\mathtt{t}^{\tilde{0}}, ..., \mathtt{t}^{\tilde{\tau}}, ..., \mathtt{t}^{\tilde{1}})$ с операторами длины n

	a_1	b_1	$\mathtt{T}$
1)	p	e	$(pa_2...a_n, \ldots, eb_2...b_n)$
2)	d	p	$(da_2...a_n, \ldots, pb_2...b_n)$
3)	e	d	$(ea_2...a_n, \ldots, db_2...b_n)$

В соответствии с выделенными в таблице 8 случаями операторная форма $OF(p_n)$ для функции $p_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет следующий вид:

- $a_1 = p$, $b_1 = e$; по определению функции p_n

$$OF(p_n) = a_1x_1 \cdot OF(p_{n-1}) \oplus b_1x_1 \cdot OF(q_{n-1}) = \bar{x}_1 \cdot OF(p_{n-1}) \oplus x_1 \cdot OF(q_{n-1});$$

- $a_1 = d$, $b_1 = p$; по предложению 2, соотношение (8)

$$OF(p_n) = a_1x_1 \cdot OF(q_{n-1}) \oplus b_1x_1 \cdot OF(t_{n-1}) = OF(q_{n-1}) \oplus \bar{x}_1 \cdot OF(t_{n-1});$$

- $a_1 = e$, $b_1 = d$; по предложению 2, соотношение (7)

$$OF(p_n) = a_1x_1 \cdot OF(t_{n-1}) \oplus b_1x_1 \cdot OF(p_{n-1}) = x_1 \cdot OF(t_{n-1}) \oplus OF(p_{n-1}).$$

Операторные формы для функций q_n, t_n строятся аналогично в соответствии с определениями этих функций и равенствами (9) – (12) предложения 2.

По построенным операторным формам $OF(f_n)$ функций $f_n \in M_n$ в таблице 9 приведены соотношения для вычисления значений сложностей $l(f_n)$ по значениям $l(f_{n-1})$.

Таблица 9. Сложности $l(f_n)$ операторных форм функций $f_n \in M_n$

a_1, b_1	$l(p_n)$	$l(q_n)$	$l(t_n)$
p, e	$l(p_{n-1}) + l(q_{n-1})$	$l(q_{n-1}) + l(t_{n-1})$	$l(t_{n-1}) + l(p_{n-1})$
d, p	$l(t_{n-1}) + l(q_{n-1})$	$l(p_{n-1}) + l(t_{n-1})$	$l(q_{n-1}) + l(p_{n-1})$
e, d	$l(t_{n-1}) + l(p_{n-1})$	$l(p_{n-1}) + l(q_{n-1})$	$l(q_{n-1}) + l(t_{n-1})$

Пусть значения $l(p_{n-1})$, $l(q_{n-1})$, $l(t_{n-1})$ либо равны $\frac{1}{2}2^{n-1}$, либо попарно различны и принадлежат множеству $\left\{\frac{1}{2}2^{n-1} - 1,\ \frac{1}{2}2^{n-1},\ \frac{1}{2}2^{n-1} + 1\right\}$.

Тогда по соотношениям таблицы 9 в первом случае

$$l(p_n) = l(q_n) = l(t_n) = \frac{1}{2}2^{n-1} + \frac{1}{2}2^{n-1} = \frac{1}{2}2^n;$$

во втором – получаем следующие три попарно различные значения:

$$\left(\frac{1}{2}2^{n-1} - 1\right) + \left(\frac{1}{2}2^{n-1}\right) = \frac{1}{2}2^n - 1,$$

$$\left(\frac{1}{2}2^{n-1}\right) + \left(\frac{1}{2}2^{n-1} + 1\right) = \frac{1}{2}2^n + 1,$$

$$\left(\frac{1}{2}2^{n-1} - 1\right) + \left(\frac{1}{2}2^{n-1} + 1\right) = \frac{1}{2}2^n.$$

Таким образом, значения сложностей $l(f_n)$ операторных форм функций $f_n \in M_n$ в классе $H_\flat \in \mathrm{H}^j$ для некоторого $j \in \{1, 2, ..., 6\}$ либо равны $\frac{1}{2}2^n$, либо попарно различны и принадлежат множеству $\left\{\frac{1}{2}2^n - 1,\ \frac{1}{2}2^n,\ \frac{1}{2}2^n + 1\right\}$.

Поскольку любой класс $H_{\mathfrak{b}}$ лежит в одном из шести подмножеств H^j, для классов каждого из которых существует последовательность функций $f_n^j \in M_n^j$, тогда теорема доказана. $\square$

Теорема 2. *Для любого класса* $EH_{\mathfrak{b}}$ *при* $n \geq 3$

$$L_{EH_{\mathfrak{b}}}(n) \geq \frac{1}{2}2^n - 1$$

Доказательство. По теореме 1. для функций $p_n, q_n, t_n \in M_n$

$$\max\{l(p_n), l(q_n), l(t_n)\} \leq \frac{1}{2}2^n + 1$$

по всем операторным формам $OF(p_n)$, $OF(q_n)$, $OF(t_n)$, построенным по пучкам произвольного класса $H_{\mathfrak{b}} \in \mathrm{H}^j$; а значение

$$\min\{l(p_n), l(q_n), l(t_n)\} \geq \frac{1}{2}2^n - 1.$$

Тогда в соответствии с предложением 1 и определением функции Шеннона:

$$L_{EH_{\mathfrak{b}}}(n) = \max_{f \in B_n}\{L_{EH_{\mathfrak{b}}}(f)\} \geq$$
$$\geq \max_{f \in M_n}\left\{\min\left\{\frac{1}{2}2^n - 1, 2^n - (\frac{1}{2}2^n + 1) + 1\right\}\right\} = \frac{1}{2}2^n - 1.$$

$\square$

Таким образом, значение функции Шеннона $L_{EH_{\mathfrak{b}}}(n)$ сложности представлений всех булевых функций в любом из классов $EH_{\mathfrak{b}}$ удовлетворяет неравенству:

$$\frac{1}{2}2^n - 1 \leq L_{EH_{\mathfrak{b}}}(n) \leq \frac{1}{2}2^n.$$

Отметим, что нижняя оценка функции Шеннона доказывается на множествах M_n^j функций, в операторных формах которых используется в качестве базисной функции $g(\tilde{x})$ функция произведения. Получение верхней оценки от вида базисной функции не зависит. Из результатов, доказанных в [6] следует, что оценка функции Шеннона $L_{EH_{\mathfrak{b}}}(n)$ будет справедливой для любого класса $EH_{\mathfrak{b}}$ расширенных двупорожденных операторных форм при любой базисной функции $g(\tilde{x})$.

Сложность в классе EH. Класс EH расширений всех двупорожденных пучков из H можно определить так:

$$EH = \bigcup_{\mathfrak{b}} EH_{\mathfrak{b}},$$

по всем операторам $\mathfrak{b}$. Значение сложности $L_{EH}(f)$ функции f в классе EH находится в соответствии с предложением 1 по всем операторным формам $OF(f)$, построенным по пучкам класса H.

Значение верхней границы, равное $\frac{1}{2}2^n$, и значение нижней границы, равное $\frac{1}{3}2^n$, функции Шеннона в этом классе приведены в [6]. В теореме 3 найдено новое значение нижней границы функции Шеннона.

Рассмотрим последовательность множеств функций $V_n = \{p_n(\tilde{x}), q_n(\tilde{x}), t_n(\tilde{x})\},\ n \geq 4$, которые определим индуктивно следующим образом:

$$
\begin{gathered}
1)\ p_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0001011001101001),\\
q_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1110100010000001),\\
t_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1111111011101000),\\
2)\ p_n(\tilde{x}) = x_n q_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) \oplus \bar{x}_n p_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}),\\
q_n(\tilde{x}) = x_n t_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) \oplus \bar{x}_n q_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}),\\
t_n(\tilde{x}) = x_n p_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) \oplus \bar{x}_n t_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}).
\end{gathered}
$$

Для функций из V_n выполняются свойства аналогичные свойствам функций множеств M_n^j.

Предложение 3. *Для функций p_n, q_n, t_n множеств V_n $(n \geq 4)$ справедливы следующие равенства:*

$$
\begin{gathered}
p_n \oplus q_n \oplus t_n = 0,\\
p_n = x_1 t_{n-1} \oplus p_{n-1}\\
p_n = \bar{x}_1 t_{n-1} \oplus q_{n-1},\\
q_n = x_1 p_{n-1} \oplus q_{n-1}\\
q_n = \bar{x}_1 p_{n-1} \oplus t_{n-1},\\
t_n = x_1 q_{n-1} \oplus t_{n-1},\\
t_n = \bar{x}_1 q_{n-1} \oplus p_{n-1}.
\end{gathered}
$$

Доказательство. Поскольку функции множеств V_n для $n > 4$ определяются по тем же соотношениям, что и функции множеств M_n^j, доказательство данного предложения аналогично доказательству предложения 2. □

Теорема 3. *При $n \geq 4$*

$$L_{EH}(n) \geq \left\lfloor \frac{5}{12} 2^n \right\rfloor.$$

Доказательство. В таблице 10 приведены сложности $l(f_4)$, $f_4 \in V_4$ операторных форм функций f_4 по всем пучкам класса H с операторами длины 4. В 1-м, 5-м и 9-м столбцах таблицы перечислены операторы c, которые являются суммой операторов пучков класса H.

Таблица 10. Значения сложностей $l(f_4)$ операторных форм функций $f_4 \in V_n$ по пучкам класса H, операторы которых имеют длину 4

c	$l(p_4)$	$l(q_4)$	$l(t_4)$	c	$l(p_4)$	$l(q_4)$	$l(t_4)$	c	$l(p_4)$	$l(q_4)$	$l(t_4)$
pppp	11	7	6	eppp	10	10	8	dppp	7	11	6
pppe	10	10	8	eppe	9	8	11	dppe	9	10	9
pppd	7	11	6	eppd	9	10	9	dppd	8	11	9
ppep	10	10	8	epep	9	8	11	dpep	9	10	9
ppee	9	8	11	epee	6	7	11	dpee	9	9	10
pped	9	10	9	eped	9	9	10	dped	10	9	9
ppdp	7	11	6	epdp	9	10	9	dpdp	8	11	9
ppde	9	10	9	epde	9	9	10	dpde	10	9	9
ppdd	8	11	9	epdd	10	9	9	dpdd	10	8	10
pepp	10	10	8	eepp	9	8	11	depp	9	10	9
pepe	9	8	11	eepe	6	7	11	depe	9	9	10
pepd	9	10	9	eepd	9	9	10	depd	10	9	9
peep	9	8	11	eeep	6	7	11	deep	9	9	10
peee	6	7	11	eeee	6	11	7	deee	8	10	10
peed	9	9	10	eeed	8	10	10	deed	11	9	8
pedp	9	10	9	eedp	9	9	10	dedp	10	9	9
pede	9	9	10	eede	8	10	10	dede	11	9	8
pedd	10	9	9	eedd	11	9	8	dedd	11	6	7
pdpp	7	11	6	edpp	9	10	9	ddpp	8	11	9
pdpe	9	10	9	edpe	9	9	10	ddpe	10	9	9
pdpd	8	11	9	edpd	10	9	9	ddpd	10	8	10
pdep	9	10	9	edep	9	9	10	ddep	10	9	9
pdee	9	9	10	edee	8	10	10	ddee	11	9	8
pded	10	9	9	eded	11	9	8	dded	11	6	7
pddp	8	11	9	eddp	10	9	9	dddp	10	8	10
pdde	10	9	9	edde	11	9	8	ddde	11	6	7
pddd	10	8	10	eddd	11	6	7	dddd	7	6	11

Данные таблицы 10 показывают следующие случаи значений сложностей $\{l(p_4),\, l(q_4),\, l(t_4)\}$ операторных форм функций $p_4,\, q_4,\, t_4$:

$$1)\{6,\,7,\,11\};\quad 2)\{8,\,10,\,10\};\quad 3)\{9,\,9,\,10\};\quad 4)\{8,\,9,\,11\}. \tag{13}$$

В соответствии с каждым из этих случаев по предложению 1 получаем следующие случаи значения минимума:

$$1)\ \min\{6,\ 2^4-11+1\}=6$$
$$2)\ \min\{8,\ 2^4-10+1\}=7$$
$$3)\ \min\{9,\ 2^4-10+1\}=7$$
$$4)\ \min\{8,\ 2^4-11+1\}=6$$

Отсюда сложность функций $f_4 \in V_4$ в классе EH равна:

$$L_{EH}(f_4)=6=\left\lfloor \frac{5}{12}2^4 \right\rfloor .$$

Аналогично доказательству теоремы 1 приведенные в предложении 3 свойства функций $f_n \in V_n$ позволяют при индуктивном переходе для получения значений сложностей $l(f_n)$ использовать соотношения из таблицы 9.

В (13) рассмотрим 4-й случай значений сложностей для $\{l(p_4),\, l(q_4),\, l(t_4)\}$.

Пусть для любой функции $f_{n-1} \in V_{n-1}$

$$l(f_{n-1}) \in \begin{cases} \{\frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{5}{3},\ \frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{5}{3} - 2,\ \frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{5}{3} - 3\} \text{ при нечетном } n; \\ \{\frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{4}{3},\ \frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{4}{3} - 1,\ \frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{4}{3} - 3\} \text{ при четном } n. \end{cases}$$

Тогда по таблице 9 возможны следующие варианты значений сложностей для $l(f_n),\ f_n \in V_n$:

при нечетном n:

$$l(f_n) = \frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{5}{3} + \frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{5}{3} - 2 = \frac{7}{12}2^n + \frac{4}{3};$$
$$l(f_n) = \frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{5}{3} + \frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{5}{3} - 3 = \frac{7}{12}2^n + \frac{1}{3};$$
$$l(f_n) = \frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{5}{3} + \frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{5}{3} - 5 = \frac{7}{12}2^n - \frac{5}{3};$$

при четном n:

$$l(f_n) = \frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{4}{3} + \frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{4}{3} - 1 = \frac{7}{12}2^n + \frac{5}{3};$$
$$l(f_n) = \frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{4}{3} + \frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{4}{3} - 3 = \frac{7}{12}2^n - \frac{1}{3};$$
$$l(f_n) = \frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{4}{3} + \frac{7}{12}2^{n-1} + \frac{4}{3} - 4 = \frac{7}{12}2^n - \frac{4}{3}.$$

Рассуждая аналогично для случаев 1) – 3) из (13), значения сложностей $l(f_n),\ f_n \in V_n$ равны:

$$1): \quad \begin{cases} \{\frac{1}{2}2^n - 3,\ \frac{1}{2}2^n + 1,\ \frac{1}{2}2^n + 2\} \text{ при нечетном } n, \\ \{\frac{1}{2}2^n - 1,\ \frac{1}{2}2^n + 3,\ \frac{1}{2}2^n - 2\} \text{ при четном } n; \end{cases}$$

$$2): \quad \begin{cases} \{\frac{7}{12}2^n - \frac{2}{3},\ \frac{7}{12}2^n - \frac{2}{3},\ \frac{7}{12}2^n + \frac{4}{3}\} \text{ при нечетном } n, \\ \{\frac{7}{12}2^n - \frac{4}{3},\ \frac{7}{12}2^n + \frac{2}{3},\ \frac{7}{12}2^n + \frac{2}{3}\} \text{ при четном } n; \end{cases}$$

$$3): \quad \begin{cases} \{\frac{7}{12}2^n - \frac{2}{3},\ \frac{7}{12}2^n + \frac{1}{3},\ \frac{7}{12}2^n + \frac{1}{3}\} \text{ при нечетном } n, \\ \{\frac{7}{12}2^n - \frac{1}{3},\ \frac{7}{12}2^n - \frac{1}{3},\ \frac{7}{12}2^n + \frac{2}{3}\} \text{ при четном } n. \end{cases}$$

По предложению 1 получаем случаи минимума:

$$1) \begin{cases} \min\left\{\frac{1}{2}2^n - 3;\ 2^n - \left(\frac{1}{2}2^n + 2\right) + 1\right\} = \frac{1}{2}2^n - 3 \text{ при нечетном } n; \\ \min\left\{\frac{1}{2}2^n - 2;\ 2^n - \left(\frac{1}{2}2^n + 3\right) + 1\right\} = \frac{1}{2}2^n - 2 \text{ при четном } n; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \min\left\{\frac{7}{12}2^n - \frac{2}{3};\ 2^n - \left(\frac{7}{12}2^n + \frac{4}{3}\right) + 1\right\} = \frac{5}{12}2^n - \frac{1}{3} \text{ при нечетном } n; \\ \min\left\{\frac{7}{12}2^n - \frac{4}{3};\ 2^n - \left(\frac{7}{12}2^n + \frac{2}{3}\right) + 1\right\} = \frac{5}{12}2^n + \frac{1}{3} \text{ при четном } n; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \min\left\{\frac{7}{12}2^n - \frac{2}{3};\ 2^n - \left(\frac{7}{12}2^n + \frac{1}{3}\right) + 1\right\} = \frac{5}{12}2^n + \frac{2}{3} \text{ при нечетном } n; \\ \min\left\{\frac{7}{12}2^n - \frac{1}{3};\ 2^n - \left(\frac{7}{12}2^n + \frac{2}{3}\right) + 1\right\} = \frac{5}{12}2^n + \frac{1}{3} \text{ при четном } n; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \min\left\{\frac{7}{12}2^n - \frac{5}{3};\ 2^n - \left(\frac{7}{12}2^n + \frac{4}{3}\right) + 1\right\} = \frac{5}{12}2^n - \frac{1}{3} \text{ при нечетном } n; \\ \min\left\{\frac{7}{12}2^n - \frac{4}{3};\ 2^n - \left(\frac{7}{12}2^n + \frac{5}{3}\right) + 1\right\} = \frac{5}{12}2^n - \frac{2}{3} \text{ при четном } n. \end{cases}$$

Значение сложности $L_{EH}(f_n)$ достигается в 4-ом случае и равно:

$$L_{EH}(f_n) = \begin{cases} \frac{5}{12}2^n - \frac{1}{3} \text{ при нечетном } n; \\ \frac{5}{12}2^n - \frac{2}{3} \text{ при четном } n. \end{cases}$$

Таким образом, значение функции Шеннона сложности представлений булевых функций в классе всех расширенных двупорожденных операторных форм EH удовлетворяет неравенству:

$$L_{EH}(n) \geq L_{EH}(f_n) = \left\lfloor \frac{5}{12}2^n \right\rfloor.$$

□

Класс H всех двупорожденных операторных форм по определению включен в класс EH. Значение функции Шеннона в этом классе равно $\left\lfloor \frac{2}{3}2^n \right\rfloor$ [6]. Интересно заметить, что сложные функции в классе H, дающие нижнюю границу значения функции Шеннона, не являются сложными в классе EH. А функции из множеств V_n, сложные в классе EH, не являются сложными в классе H. Эти функции в классе H имеют следующую сложность:

Предложение 4. *Для любой функции $f_n \in V_n$ $(n \geq 4)$*

$$L_H(f_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}2^n - 2, \; \textit{при четном } n, \\ \frac{1}{2}2^n - 3, \; \textit{при нечетном } n. \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 и проводится индукцией по числу переменных функций из V_n.

При $n = 4$ данные таблицы 10 показывают, что множество сложностей $\{l(p_4), l(q_4), l(t_4)\}$ функций из V_4 в классе H содержит минимальное значение только в случае $\{6, 7, 11\}$. Отсюда

$$L_H(f_4) = \min\{6, 7, 11\} = 6 = \frac{1}{2}2^4 - 2$$

для любой $f_4 \in V_4$.

Пусть для любой функции $f_{n-1} \in V_{n-1}$

$$l(f_{n-1}) \in \begin{cases} \{\frac{1}{2}2^{n-1} - 2, \; \frac{1}{2}2^{n-1} - 1, \frac{1}{2}2^{n-1} + 3\} \text{ при нечетном } n; \\ \{\frac{1}{2}2^{n-1} - 3, \; \frac{1}{2}2^{n-1} + 2, \frac{1}{2}2^{n-1} + 1\} \text{ при четном } n. \end{cases}$$

Тогда по таблице 9 возможны следующие варианты значения сложности для $l(f_n)$:

при нечетном n:

$$l(f_n) = \frac{1}{2}2^{n-1} - 2 + \frac{1}{2}2^{n-1} - 1 = \frac{1}{2}2^n - 3;$$
$$l(f_n) = \frac{1}{2}2^{n-1} - 2 + \frac{1}{2}2^{n-1} + 3 = \frac{1}{2}2^n + 1;$$
$$l(f_n) = \frac{1}{2}2^{n-1} + 3 + \frac{1}{2}2^{n-1} - 1 = \frac{1}{2}2^n + 2;$$

при четном n:

$$l(f_n) = \frac{1}{2}2^{n-1} - 3 + \frac{1}{2}2^{n-1} + 2 = \frac{1}{2}2^n - 1;$$
$$l(f_n) = \frac{1}{2}2^{n-1} + 2 + \frac{1}{2}2^{n-1} + 1 = \frac{1}{2}2^n + 3;$$
$$l(f_n) = \frac{1}{2}2^{n-1} - 3 + \frac{1}{2}2^{n-1} + 1 = \frac{1}{2}2^n - 2.$$

Отсюда получаем, что

$$L_H(f_n) = \min_{OF(f_n)}(l(f_n)) = \begin{cases} \frac{1}{2}2^n - 2, & \text{при четном } n, \\ \frac{1}{2}2^n - 3, & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

□

3. Заключение

Операторный способ описания классов канонических форм булевых функций позволил ввести новые классы вида $H_{\mathtt{b}}$ со свойствами аналогичными свойствам класса поляризованных полиномов Жегалкина. Значения сложности представлений булевых функций во всех введенных классах $H_{\mathtt{b}}$, в классе поляризованных полиномов Жегалкина и в классе H кронекеровых форм совпадают. В данной работе операторный подход также оказался удобен для расширения классов $H_{\mathtt{b}}$ и класса H и получения новых классов расширенных двупорожденных операторных форм $EH_{\mathtt{b}}$ и класса $EH = \bigcup_{\mathtt{b}} EH_{\mathtt{b}}$ всех расширенных двупорожденных операторных форм.

Операторный подход оказался эффективным для получения оценок сложности представлений булевых функций в этих классах: получены оценки значения функции Шеннона в каждом из классов $EH_{\mathtt{b}}$ и улучшено значение нижней границы функции Шеннона в классе EH.

Интересной особенностью введенных классов расширенных форм является результат сравнения их по мощности и значению сложности с классом H. Двупорожденный операторный пучок $\mathtt{A}$, порождающий, например, базис полинома Жегалкина, при расширении дает 2^n+1 базисов. Однако, сложность представлений булевых функций в получившемся классе $EH_{\mathtt{A}}$ меньше сложности представлений булевых функций в классе H всех двупорожденных операторных пучков, общее количество которых 3^n. Значения сложностей в классах $EH_{\mathtt{b}}$ и EH также меньше значения сложности в классе H.

References

[1] A.S. Baliuk, S.F. Vinokurov, *The Shannon function for some classes of operator polynomial forms*, Optimization, Control, Intellect, **5** (2000), 167–180.

[2] A.S. Kazimirov, S.Y. Reimerov, *Computation complexity bounding of polynomial representation of Boolean functions*, News of the Irkutsk state university, Series «Mathematics», **3** (2010), 33–43. Zbl 1271.94038

[3] L.V. Ryabets, S.F. Vinokurov, *An Algorithm of Exact Minimization of Boolean Functions in the Class of Kronecker Forms*, Algebra and Model Theory, **4** (2003), 148–159.

[4] K.D. Vinokurov, *Upper bound for the complexity of polynomial normal forms of Boolean functions*, Discrete Math., **17** (2005), 80–88.

[5] N.A. Peryazev, *The complexity of Boolean functions in the class of polarized polynomial forms*, Algebra and logic, **34** (1995), 323–326. MR1364470

[6] *Selected problems of the theory of Boolean functions*, Edited by Vinokurov S. F., Peryazev N. A., FIZMATLIT, Moscow, 2001.

[7] S. F. Vinokurov, A.S. Kazimirov, *Enumeration of operator classes of Boolean functions*, News of the Irkutsk state university, Series «Mathematics», **2** (2009), 40–55.

[8] S. F. Vinokurov, A.S. Frantseva, *The Complexity of the Representation of Multiple-Output Boolean Functions*, News of the Irkutsk state university, Series «Mathematics», **16** (2016), 30–42. Zbl 1354.94074

Anastasiya Sergeevna Frantseva
Irkutsk State University,
1, Karl Marx str.,
Irkutsk, 664003, Russia
E-mail address: a.s.frantseva@gmail.com