S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 547–590 (2019) УДК 517.95
DOI 10.33048/semi.2019.16.036 MSC 35A05

ГЛОБАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ И РАЗРЕШИМОСТЬ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ О ТРЕХМЕРНОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ

А.Е. МАМОНТОВ, Д.А. ПРОКУДИН

Abstract. We consider the initial-boundary value problem which describes unsteady motions of a viscous compressible heat-conducting multifluid in a bounded three-dimensional domain. Viscosity matrices which characterize viscous friction inside and between the multifluid constituents are supposed to have a general form (except the requirement of positive definiteness). The regularized boundary value problem is formulated and its global solvability is proved.

Keywords: global existence theorem, unsteady boundary value problem, three-dimensional flow, viscous compressible fluid, homogeneous mixture with multiple velocities and one temperature, heat-conductive fluid

1. Введение

В работе проводится анализ разрешимости регуляризации начально-краевой задачи, моделирующей течения многокомпонентной вязкой сжимаемой жидкости (гомогенной смеси жидкостей) в рамках многоскоростного подхода. Теоретические основы моделирования таких сред заложены в [32], [39] (см. также [17], [25]). Известные на сегодняшний день результаты о разрешимости

Mamontov, A.E., Prokudin, D.A., Global estimates and solvability of the regularized problem of the three-dimensional unsteady motion of a viscous compressible heat-conductive multifluid.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18–71–00024).

Поступила 13 марта 2019 г., опубликована 23 апреля 2019 г.

начально-краевых задач для многомерной многоскоростной модели динамики смесей затрагивают либо баротропный случай [11], [12], [13], [19], [20], [21], [23], [27], [38], либо стационарный теплопроводный случай [18].

Отдельного упоминания заслуживают одномерные модели динамики смесей, для которых возможно построение сильных решений и доказательство единственности. В рамках многоскоростного подхода такие результаты получены в работах [15], [26], [28], [29], [35], [36], [37]. Более подробные обзоры результатов по многоскоростным многокомпонентным вязким сжимаемым жидкостям (газам) можно найти в [22], [24]. Следует также отметить результаты, полученные для смежных односкоростных моделей смесей [3], [4], [7], [8], [14], [30], [31], [41].

Таким образом, к настоящему времени для нестационарных многомерных движений многокомпонентной вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости нет каких-либо результатов в многоскоростном случае. Представленная работа начинает деятельность в этом направлении.

2. Постановка задачи

2.1. **Формулировка уравнений динамики смесей.** Дана ограниченная липшицева[1] область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и число $T > 0$. Движение в Ω теплопроводной смеси из двух вязких сжимаемых жидкостей с течением времени $t \in [0, T]$ описывается следующей системой уравнений в частных производных [32], [39] (см. также [17]):

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial (\rho_i \boldsymbol{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i) + \nabla p_i = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \boldsymbol{J}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, 2, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{2} \mathcal{E}_i \boldsymbol{u}_i\right) + \operatorname{div}\left(\boldsymbol{q} - \sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{i=1}^{2} p_i \boldsymbol{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{2} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i + \rho g. \tag{2.3}$$

Данные уравнения представляют собой соответственно математические формулировки законов сохранения массы для каждой компоненты, законов сохранения импульса для каждой компоненты и закона сохранения полной энергии для смеси. Здесь $\rho_i \geqslant 0$ — плотность i-й компоненты; $\rho = \rho_1 + \rho_2$ — суммарная плотность; $\boldsymbol{u}_i$ — скорость i-й компоненты; $\mathcal{E}_i = \dfrac{\rho_i |\boldsymbol{u}_i|^2}{2} + \rho_i e_i(\rho_i, \theta)$ — полная энергия i-й компоненты, где $e_i(\rho_i, \theta)$ — внутренняя удельная энергия i-й компоненты, $\theta > 0$ — температура смеси; $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ — суммарная полная энергия; $p_i = p_i(\rho_i, \theta)$ — давление в i-й компоненте;

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_i &= \sum_{j=1}^{2} \left((\lambda_{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j) \mathbb{I} + 2\mu_{ij} \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{2} \left((\eta_{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j) \mathbb{I} + 2\mu_{ij} \left(\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \boldsymbol{u}_j) \mathbb{I} \right) \right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

[1] Требования на $\partial\Omega$ будут уточняться — см. начало разделов 5 и 6.2.

— вязкая часть тензора напряжений в i-й компоненте, где $\mathbb{I}$ — единичный тензор, $\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) = \dfrac{1}{2}\left((\nabla \otimes \boldsymbol{v}) + (\nabla \otimes \boldsymbol{v})^*\right)$ — тензор скоростей деформаций векторного поля $\boldsymbol{v}$ (верхний индекс $*$ означает транспонирование), а числовые коэффициенты вязкостей λ_{ij}, μ_{ij} и η_{ij} образуют следующие матрицы:

$$\mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^2 > 0, \quad \mathbf{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^2, \quad \mathbf{H} = \{\eta_{ij}\}_{i,j=1}^2 = \mathbf{\Lambda} + \frac{2}{3}\mathbf{M} \geqslant 0, \tag{2.5}$$

откуда в частности следует, что

$$\mathbf{N} = \{\nu_{ij}\}_{i,j=1}^2 = \mathbf{\Lambda} + 2\mathbf{M} > 0; \tag{2.6}$$

далее,

$$\boldsymbol{J}_i = (-1)^i a(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) \tag{2.7}$$

— приток импульса в i-ю компоненту из другой компоненты; $\boldsymbol{f}_i$ — плотность внешних массовых сил, действующих из внешней среды на i-ю компоненту;

$$\boldsymbol{q} = -k(\theta)\nabla\theta \tag{2.8}$$

— суммарный тепловой поток, k — теплопроводность; наконец, g — плотность тепловых источников внешней среды.

2.2. **Определяющие уравнения.** Определяющие уравнения, связывающие термодинамические параметры между собой, обязаны удовлетворять определенным ограничениям, в частности, соотношениям Гиббса

$$\theta ds_i = de_i + p_i d\left(\frac{1}{\rho_i}\right) \quad \forall\, \rho_i,\, \theta > 0, \quad i = 1, 2, \tag{2.9}$$

где $s_i = s_i(\rho_i, \theta)$ — удельная энтропия i-й компоненты, что эквивалентно соотношениям Максвелла

$$\rho_i^2 \frac{\partial e_i}{\partial \rho_i} = p_i - \theta \frac{\partial p_i}{\partial \theta}, \quad i = 1, 2, \tag{2.10}$$

а также условиям термодинамической устойчивости

$$\frac{\partial p_i}{\partial \rho_i} > 0, \quad \frac{\partial e_i}{\partial \theta} > 0, \quad i = 1, 2. \tag{2.11}$$

Замечание 1. *Для гладких решений системы* (2.1), (2.2), (2.3) *уравнения* (2.3) (*ввиду* (2.1), (2.2), (2.10)) *можно записать в одной из следующих эквивалентных форм:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^2 \rho_i e_i + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^2 \rho_i e_i \boldsymbol{u}_i\right) + \sum_{i=1}^2 p_i \operatorname{div}\boldsymbol{u}_i + \operatorname{div}\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) + a|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2 + \rho g, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^2 \rho_i s_i + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^2 \rho_i s_i \boldsymbol{u}_i\right) + \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) - \frac{\boldsymbol{q}\cdot\nabla\theta}{\theta^2} + \frac{a|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2}{\theta} + \frac{\rho g}{\theta}, \tag{2.13}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial e_i}{\partial \theta} \left(\frac{\partial(\rho_i \theta)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_i \theta \boldsymbol{u}_i) \right) + \mathrm{div}\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) - \theta \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial p_i}{\partial \theta} \mathrm{div}\boldsymbol{u}_i + a|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2 + \rho g. \tag{2.14}$$

Следуя подходу, предложенному в [9], будем предполагать, что

$$p_i(\rho_i, \theta) = p_{ei}(\rho_i) + \theta p_{\theta i}(\rho_i), \quad i = 1, 2 \tag{2.15}$$

с некоторыми функциями p_{ei}, $p_{\theta i}$. Тогда из (2.10) получаем

$$e_i(\rho_i, \theta) = P_{ei}(\rho_i) + Q_i(\theta), \quad i = 1, 2, \tag{2.16}$$

где

$$P_{ei}(\rho_i) = \int_1^{\rho_i} \frac{p_{ei}(z)}{z^2}\, dz, \quad i = 1, 2, \tag{2.17}$$

и с точностью до несущественных аддитивных констант верно представление

$$Q_i(\theta) = \int_0^{\theta} c_{\theta i}(z)\, dz, \quad i = 1, 2 \tag{2.18}$$

с некоторыми функциями $c_{\theta i}$.

Условия (2.11) будут заведомо выполнены, если p'_{ei}, $p'_{\theta i}$ неотрицательны, причем p'_{ei} или $p'_{\theta i}$ положительны, а $c_{\theta i}(z) \geqslant c_1 = \mathrm{const} > 0 \quad \forall\, z \geqslant 0$. Теперь из (2.9) находим

$$s_i(\rho_i, \theta) = C_{\theta i}(\theta) - P_{\theta i}(\rho_i) + s_{0i}, \quad i = 1, 2, \tag{2.19}$$

где

$$C_{\theta i}(\theta) = \int_1^{\theta} \frac{c_{\theta i}(z)}{z} dz, \quad P_{\theta i}(\rho_i) = \int_1^{\rho_i} \frac{p_{\theta i}(z)}{z^2}\, dz, \quad i = 1, 2, \tag{2.20}$$

а s_{0i} — произвольные постоянные. Уравнение (2.14) в этом случае примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{2} \rho_i Q_i(\theta) + \mathrm{div} \left(\sum_{i=1}^{2} \rho_i Q_i(\theta) \boldsymbol{u}_i \right) + \mathrm{div}\boldsymbol{q} + \theta \sum_{i=1}^{2} p_{\theta i}(\rho_i) \mathrm{div}\boldsymbol{u}_i = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) + a|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2 + \rho g. \tag{2.21}$$

2.3. **Формулировка Задачи $\mathcal{H}$.** Строгая математическая формулировка задачи о движении смесей в рамках вышеописанной модели выглядит следующим образом.

Задача $\mathcal{H}$. *В замыкании $\overline{Q}_T$ области $Q_T = (0, T) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — область течения, $T > 0$ — произвольное действительное число, требуется найти скалярные поля $\rho_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, $\theta > 0$ и векторные поля $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, 2$,* *удовлетворяющие системе уравнений* (2.1), (2.2), (2.21) *и следующим начальным и краевым условиям:*

$$\rho_i|_{t=0} = \rho_{0i}, \quad \boldsymbol{u}_i|_{t=0} = \boldsymbol{u}_{0i}, \quad i = 1, 2, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \tag{2.22}$$

$$\boldsymbol{u}_i|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{2.23}$$

$$\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} = L(t, \boldsymbol{x}, \theta) \quad \text{на} \quad (0, T) \times \partial\Omega. \tag{2.24}$$

Здесь ρ_{0i} *(начальные плотности),* $\boldsymbol{u}_{0i}$ *(начальные скорости),* θ_0 *(начальная температура) — заданные функции; величина граничного теплообмена (внешней теплопроводности)* L *задана как функция от времени, пространственной переменной и неизвестной температуры;* $\boldsymbol{n}$ *— внешняя единичная нормаль к границе* $\partial\Omega$ *области* Ω.

Замечание 2. *Строго говоря, начальные условия должны быть заданы в терминах* $\rho_i(0,\cdot)$, $(\rho_i\boldsymbol{u}_i)(0,\cdot)$ *и* $\rho_i Q_i(\theta)(0,\cdot)$, *однако математически более удобно работать с начальными условиями, записанными в форме* (2.22).

Замечание 3. *И с физической точки зрения, и с математических позиций необходимо обеспечить неотрицательность производства энтропии. Общая энтропия системы*

$$S = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i s_i d\boldsymbol{x} \tag{2.25}$$

должна не убывать со временем в случае, когда система термодинамически замкнута, т. е. когда $g = 0$ *и* $L = 0$. *В общем (термодинамически незамкнутом) случае из* (2.8), (2.13), (2.23) *и* (2.24) *получаем*

$$\frac{dS}{dt} = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega} \frac{a|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2}{\theta} d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega} \frac{k(\theta)|\nabla\theta|^2}{\theta^2} d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega} \frac{\rho g}{\theta} d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{L(t, \boldsymbol{x}, \theta)}{\theta} d\sigma. \tag{2.26}$$

Таким образом, достаточно потребовать выполнения условий на коэффициенты

$$k \geqslant 0, \quad a \geqslant 0, \tag{2.27}$$

а также следующего условия для тензоров вязких напряжений:

$$\sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) \geqslant 0. \tag{2.28}$$

Однако в рамках условий на матрицы вязкостей, перечисленных в (2.5), *выполнение* (2.28) *очевидно, ввиду равенства*

$$\sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) = \sum_{i,j=1}^{2} \left(\eta_{ij} (\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i)(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j) + 2\mu_{ij} \left(\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) - \frac{1}{3}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i)\mathbb{I} \right) : \left(\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) - \frac{1}{3}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} \right) \right). \tag{2.29}$$

Кроме того, из условий (2.5) (*см.* (2.6)), *в силу* (2.23), *следует весьма важное с математических позиций неравенство*

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\mathbb{S}_i:(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\,d\boldsymbol{x}\geqslant B_0\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x} \tag{2.30}$$

с некоторой положительной постоянной $B_0=B_0(\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{M})$.

2.4. **Условия на определяющие функции.** На функции $p_{ei}, p_{\theta i}$ будем налагать следующие условия:

$$\begin{cases} p_{ei},\, p_{\theta i}\in C^1[0,\infty), \quad p_{ei}(0)=p_{\theta i}(0)=0, \quad i=1,2,\\ \dfrac{1}{c_2}z^{\gamma-1}\leqslant p_{ei}'(z)\leqslant c_2z^{\gamma-1}+c_3 \quad \forall z\geqslant 0, \quad i=1,2,\\ p_{\theta i}(z)\leqslant c_4(1+z^{\frac{\gamma}{3}}) \quad \forall z\geqslant 0, \quad i=1,2,\\ p_{\theta i}'(z)>0 \quad \forall z\geqslant 0, \quad i=1,2, \end{cases} \tag{2.31}$$

где $c_2=\mathrm{const}\geqslant 1$, $c_3,c_4=\mathrm{const}>0$, $\gamma=\mathrm{const}>3$. О функции k будем предполагать следующее:

$$\begin{cases} k\in C^2[0,\infty),\\ \dfrac{1}{c_5}(1+z^m)\leqslant k(z)\leqslant c_5(1+z^m) \quad \forall\, z\geqslant 0,\\ c_5=\mathrm{const}\geqslant 1, \quad m=\mathrm{const}\geqslant 2. \end{cases} \tag{2.32}$$

Относительно функций $c_{\theta i}$ (см. (2.18)) примем следующие гипотезы:

$$\begin{cases} c_{\theta i}\in C^1[0,\infty), \quad i=1,2,\\ \dfrac{1}{c_6}\left(1+z^{\frac{m}{2}-1}\right)\leqslant c_{\theta i}(z)\leqslant c_6\left(1+z^{\frac{m}{2}-1}\right) \quad \forall\, z\geqslant 0, \quad i=1,2,\\ c_6=\mathrm{const}\geqslant 1. \end{cases} \tag{2.33}$$

Наконец, на функцию L будем налагать следующие требования:

$$\begin{cases} L\in C\left([0,T]\times\partial\Omega\times\mathbb{R}\right), \quad L\geqslant 0 \quad \text{в} \quad [0,T]\times\partial\Omega\times\mathbb{R},\\ \\ \forall\,\theta_1,\,\theta_2, \quad \theta_1\leqslant\theta_2 \quad \Longrightarrow \quad L(\cdot,\cdot,\theta_1)\leqslant L(\cdot,\cdot,\theta_2). \end{cases} \tag{2.34}$$

Замечание 4. *Для удобства будем считать* L *продолженной по* $(t,\boldsymbol{x})$, *и в результате*

$$L\in C\left(\mathbb{R}^5\right). \tag{2.35}$$

Замечание 5. *Из* (2.17) *и* (2.31) *следует, что при всех* $i=1,2$ *и* $z\geqslant 0$

$$\frac{1}{c_2\gamma}z^{\gamma}\leqslant p_{ei}(z)\leqslant\frac{c_2}{\gamma}z^{\gamma}+c_3z, \tag{2.36}$$

$$B_1z^{\gamma}-B_2\leqslant zP_{ei}(z)\leqslant B_3z^{\gamma}+B_4, \tag{2.37}$$

где $B_1=B_1(c_2,c_3,\gamma)$, $B_2=B_2(c_2,c_3,\gamma)$, $B_3=B_3(c_2,c_3,\gamma)$, $B_4=B_4(c_2,c_3,\gamma)$. *Из* (2.20) *и* (2.31) *нетрудно получить, что при всех* $i=1,2$ *и* $z\geqslant 0$

$$-B_5\leqslant zP_{\theta i}(z)\leqslant B_6z^{\frac{\gamma}{3}}+B_7, \tag{2.38}$$

где $B_5=B_5(c_4,\gamma)$, $B_6=B_6(c_4,\gamma)$, $B_7=B_7(c_4,\gamma)$. *Наконец, из* (2.18), (2.20) *и* (2.33) *следует, что при всех* $i=1,2$ *и* $z>0$

$$C_{\theta i}(z)\leqslant Q_i(z)-Q_i(1), \tag{2.39}$$

$$B_8(c_6,m)\left(z+z^{\frac{m}{2}}\right) \leqslant Q_i(z) \leqslant B_9(c_6,m)z^{\frac{m}{2}} + B_{10}(c_6,m). \tag{2.40}$$

Кроме того, заметим что $\forall\, z>0$ *верно, ввиду* (2.20), (2.33) *и* (2.40), *что*

$$C_{\theta i}(z) + \frac{1}{c_6}|\ln z| \leqslant B_{11}(B_8,c_6,m)Q_i(z), \quad i=1,2. \tag{2.41}$$

Замечание 6. *Приведем простейший пример ситуации, когда предположения на давления и энергии выполнены:*

$$p_{ei}(\rho_i)=\rho_i^{\gamma}, \quad p_{\theta i}(\rho_i)=\rho_i, \quad c_{\theta i}(\theta)=1+\theta^{\frac{m}{2}-1}, \quad i=1,2. \tag{2.42}$$

Тогда из (2.15)–(2.20) *следует, что*

$$p_i(\rho_i,\theta)=\rho_i^{\gamma}+\rho_i\theta, \quad e_i(\rho_i,\theta)=\frac{\rho_i^{\gamma-1}}{\gamma-1}+\theta+\frac{2}{m}\theta^{\frac{m}{2}}-\frac{1}{\gamma-1}, \quad i=1,2,$$

$$s_i(\rho_i,\theta)=\ln\left(\frac{\theta}{\rho_i}\right)+\frac{2}{m-2}\theta^{\frac{m}{2}-1}+s_{0i}-\frac{2}{m-2}, \quad m>2, \quad i=1,2,$$

$$s_i(\rho_i,\theta)=\ln\left(\frac{\theta^2}{\rho_i}\right)+s_{0i}, \quad m=2, \quad i=1,2.$$

Условия (2.31), (2.33) *очевидно выполнены, а уравнение* (2.14) *в этом случае примет следующий вид:*

$$\left(1+\theta^{\frac{m}{2}-1}\right)\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial(\rho_i\theta)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_i\theta\boldsymbol{u}_i)\right)+\operatorname{div}\boldsymbol{q}+\theta\sum_{i=1}^{2}\rho_i\operatorname{div}\boldsymbol{u}_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)+a|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2+\rho g.$$

При предположениях (2.42) *с* $m=2$ *в стационарном случае существование слабых решений соответствующей краевой задачи доказано в* [18].

2.5. **Условия на входные данные.** Начальные данные в Задаче $\mathcal{H}$ будем брать из класса

$$\rho_{0i}\in L_{\gamma}(\Omega), \quad \rho_{0i}\geqslant 0, \quad \theta_0\in L_{\infty}(\Omega), \quad \inf_{\Omega}\theta_0>0, \quad \boldsymbol{u}_{0i}\in L_{\infty}(\Omega), \quad i=1,2, \tag{2.43}$$

а на внешние силы и источники наложим следующие требования:

$$\boldsymbol{f}_i\in L_{\infty}(Q_T), \quad i=1,2, \quad g\in L_{\infty}(Q_T), \quad g\geqslant 0. \tag{2.44}$$

3. Априорные оценки

Сформулируем априорные оценки классических решений Задачи $\mathcal{H}$ в случае, когда система термодинамически замкнута, т. е. $g=0$ и $L=0$, причем плотности неотрицательны, а температура положительна. В дальнейшем на эти оценки нет прямых ссылок, но их формулировка и доказательство существенно облегчают понимание процесса доказательства существования слабого решения посредством построения решений приближенных задач.

3.1. **Энергетические неравенства и предварительные оценки плотностей.** Интегрируя уравнения (2.1) по области Ω и учитывая начальные и граничные условия (2.22), (2.23), приходим к равенствам

$$(3.1)\quad \|\rho_i\|_{L_1(\Omega)} = M_i \quad \forall t \in [0,T] \Longrightarrow \|\rho_i\|_{L_\infty\left(0,T;L_1(\Omega)\right)} = M_i, \quad \text{где} \quad M_i = \|\rho_{0i}\|_{L_1(\Omega)}, \quad i=1,2.$$

Интегрируя равенство (2.3) сначала по Ω, а затем по времени от 0 до t, получим с учетом (2.22)–(2.24) соотношение баланса полной энергии всей смеси

$$(3.2)\qquad \int\limits_\Omega \mathcal{E} d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega \mathcal{E}_0 d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^2 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \rho_i \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{f}_i d\boldsymbol{x} d\tau,$$

где $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}|_{t=0}$. Из (3.2), используя неравенство Коши и (2.16), (2.37), (2.44), (3.1), приходим к

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} \int\limits_\Omega \mathcal{E} d\boldsymbol{x} \leqslant \|\mathcal{E}_0\|_{L_1(\Omega)} + 2B_2 T|\Omega| \max_{1\leqslant i\leqslant 2}\left\{\|\boldsymbol{f}_i\|^2_{L_\infty(Q_T)}\right\} + \frac{T}{2}(M_1+M_2) \\ + \max_{1\leqslant i\leqslant 2}\left\{\|\boldsymbol{f}_i\|^2_{L_\infty(Q_T)}\right\} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \mathcal{E} d\boldsymbol{x} d\tau, \end{aligned}$$

откуда, используя неравенство Гроноулла, получаем оценку[2]

$$(3.4)\qquad \int\limits_\Omega \mathcal{E} d\boldsymbol{x} \leqslant B_{12}\left(B_2, T, \|\mathcal{E}_0\|_{L_1(\Omega)}, \{M_i\}, \left\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\right\}, |\Omega|\right).$$

Из (3.4), в свою очередь, ввиду (2.37), вытекают следующие априорные оценки:

$$(3.5)\qquad \sum_{i=1}^2 \|\rho_i\|_{L_\infty\left(0,T;L_\gamma(\Omega)\right)} \leqslant B_{13}\left(B_1, B_2, B_{12}, \gamma\right),$$

$$(3.6)\qquad \sum_{i=1}^2 \left(\|\sqrt{\rho_i}\boldsymbol{u}_i\|_{L_\infty\left(0,T;L_2(\Omega)\right)} + \|\rho_i Q_i(\theta)\|_{L_\infty\left(0,T;L_1(\Omega)\right)}\right) \leqslant B_{14}\left(B_2, B_{12}\right).$$

Из последних двух неравенств и (2.31), (2.40) следует, что

$$(3.7)\qquad \begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \|\rho_i \boldsymbol{u}_i\|_{L_\infty\left(0,T;L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)\right)} + \|\rho\theta^{\frac{m}{2}}\|_{L_\infty\left(0,T;L_1(\Omega)\right)} \\ + \sum_{i=1}^2 \|p_{\theta i}(\rho_i)\|_{L_\infty\left(0,T;L_3(\Omega)\right)} \leqslant B_{15}, \end{aligned}$$

где $B_{15} = B_{15}\left(B_8, B_{13}, B_{14}, c_4, \gamma, |\Omega|\right)$.

---

[2]Здесь и далее $|E|$ означает лебегову меру множества E.

3.2. **Предварительные оценки температуры.** Проинтегрируем (2.26) по времени от 0 до t, получим

$$\int_0^t\int_\Omega \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{2}\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)d\boldsymbol{x}d\tau+\int_0^t\int_\Omega \frac{a|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2}{\theta}d\boldsymbol{x}d\tau+\int_0^t\int_\Omega \frac{k(\theta)|\nabla\theta|^2}{\theta^2}d\boldsymbol{x}d\tau=S-S_0, \tag{3.8}$$

где $S_0=S|_{t=0}$ (см. (2.19) и (2.25)). Ввиду (2.27) (см. также (2.32)) и (2.28) все слагаемые в левой части (3.8) неотрицательны. Для правой части (3.8), учитывая (2.19), (2.25), (2.38), (2.41), (3.1), (3.6), получаем оценку

$$S-S_0\leqslant -\frac{1}{c_6}\int_\Omega \rho|\ln\theta|\,d\boldsymbol{x}+B_{16}\left(B_5,B_{11},B_{14},S_0,\{M_i\},\{s_{0i}\},|\Omega|\right). \tag{3.9}$$

Таким образом, из (3.8) и (3.9), в силу (2.32), следует априорная оценка

$$\|\nabla\ln\theta\|_{L_2(Q_T)}+\left\|\nabla\theta^{\frac{m}{2}}\right\|_{L_2(Q_T)}+\|\rho\ln\theta\|_{L_\infty\left(0,T;L_1(\Omega)\right)}\leqslant B_{17}(B_{16},c_5,c_6,m). \tag{3.10}$$

Согласно Лемме 3.2 в [9], стр. 47 и (3.1), (3.5), (3.7), (3.10) имеют место неравенства

$$\|\ln\theta\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant B_{18}(B_{13},B_{17},\{M_i\},\gamma)\left(\|\nabla\ln\theta\|^2_{L_2(\Omega)}+1\right), \tag{3.11}$$

$$\|\theta^{\frac{m}{2}}\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant B_{19}(B_{13},B_{15},\{M_i\},\gamma)\left(\|\nabla\theta^{\frac{m}{2}}\|^2_{L_2(\Omega)}+1\right), \tag{3.12}$$

интегрируя которые по t от 0 до T, приходим с учетом (3.10) к оценке

$$\|\ln\theta\|_{L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)}+\|\theta^{\frac{m}{2}}\|_{L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)}\leqslant B_{20}(B_{17},B_{18},B_{19},T), \tag{3.13}$$

а значит, в силу ограниченности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_6(\Omega)$, к оценке

$$\|\ln\theta\|_{L_2\left(0,T;L_6(\Omega)\right)}+\|\theta\|_{L_m\left(0,T;L_{3m}(\Omega)\right)}\leqslant B_{21}(B_{20},m,\Omega), \tag{3.14}$$

из которой в частности следует ограниченность $\theta p_{\theta i}(\rho_i)$, $i=1,2$ в пространстве $L_m\big(0,T;L_{\frac{3m}{m+1}}(\Omega)\big)$. Действительно, т. к.

$$\|\theta p_{\theta i}(\rho_i)\|_{L_{\frac{3m}{m+1}}(\Omega)}\leqslant\|\theta\|_{L_{3m}(\Omega)}\|p_{\theta i}(\rho_i)\|_{L_3(\Omega)},\quad i=1,2,$$

то из (3.7) и (3.14) получаем требуемое:

$$\|\theta p_{\theta i}(\rho_i)\|_{L_m\left(0,T;L_{\frac{3m}{m+1}}(\Omega)\right)}\leqslant B_{22}\left(B_{15},B_{21}\right),\quad i=1,2. \tag{3.15}$$

3.3. **Оценки скоростей.** Теперь проинтегрируем (2.21) сначала по Ω, а затем по времени от 0 до t, получим

$$(3.16)\quad \sum_{i=1}^{2}\int_0^t\int_\Omega \mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)d\boldsymbol{x}d\tau + a\int_0^t\int_\Omega |\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2 d\boldsymbol{x}d\tau$$
$$= \sum_{i=1}^{2}\int_0^t\int_\Omega \theta p_{\theta i}(\rho_i)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i d\boldsymbol{x}d\tau + \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \rho_i Q_i(\theta)d\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \rho_{0i}Q_i(\theta_0)d\boldsymbol{x},$$

откуда, в силу (2.30), (3.6) и (3.15), следует, что

$$(3.17)\quad \sum_{i=1}^{2}\int_{Q_T} |\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x}dt \leqslant B_{23}\left(B_0, B_{14}, B_{22}, m, T, |\Omega|\right).$$

Используя неравенство Пуанкаре и (2.23), из (3.17) получаем следующую априорную оценку:

$$(3.18)\quad \sum_{i=1}^{2}\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)} \leqslant B_{24}\left(B_{23},\Omega\right)$$

и, в силу ограниченности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_6(\Omega)$,

$$(3.19)\quad \sum_{i=1}^{2}\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_2\left(0,T;L_6(\Omega)\right)} \leqslant B_{25}\left(B_{24},\Omega\right).$$

Тогда из (3.5), (3.7) и (3.19) вытекает, что

(3.20)
$$\sum_{i=1}^{2}\left(\|\rho_i\boldsymbol{u}_i\|_{L_2\left(0,T;L_{\frac{6\gamma}{\gamma+6}}(\Omega)\right)} + \|\rho_i\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{u}_i\|_{L_2\left(0,T;L_{\frac{6\gamma}{4\gamma+3}}(\Omega)\right)}\right) \leqslant B_{26}\left(B_{13}, B_{15}, B_{25}\right).$$

3.4. **Улучшенная оценка температуры.** Обоснуем слабую ограниченность третьего слагаемого в левой части (2.21) (см. (2.8)):

$$(3.21)\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{q} = -\Delta\mathcal{K}(\theta), \quad \text{где} \quad \mathcal{K}(\theta) = \int_0^\theta k(z)\,dz,$$

т. е. покажем ограниченность температуры θ в пространстве $L_{m+1}(Q_T)$ (см. (2.32)).

Для этого сначала умножим уравнение (2.21) на $\theta^{-\sigma_1}$ с некоторым $0<\sigma_1<1$ и проинтегрируем результат по Q_T, получим с учетом (2.1), (2.8), (2.18), (2.23), (2.24), равенство

$$\begin{aligned}(3.22)\quad \sigma_1 \int\limits_{Q_T} \frac{k(\theta)|\nabla\theta|^2}{\theta^{\sigma_1+1}}\, d\boldsymbol{x}dt &= \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{Q_T} \theta^{1-\sigma_1} p_{\theta i}(\rho_i) \mathrm{div} \boldsymbol{u}_i \, d\boldsymbol{x}dt + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \left[\rho_i \left(\int\limits_1^\theta \frac{c_{\theta i}(z)}{z^{\sigma_1}}\, dz \right) \right]_{t=0}^{t=T} d\boldsymbol{x} \\ &\quad - \int\limits_{Q_T} \frac{1}{\theta^{\sigma_1}} \sum_{i=1}^{2} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)\, d\boldsymbol{x}dt - a \int\limits_{Q_T} \frac{|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2}{\theta^{\sigma_1}}\, d\boldsymbol{x}dt.\end{aligned}$$

Последние два слагаемых в правой части (3.22) неположительны. Первое слагаемое в правой части (3.22), используя неравенство Гёльдера и (2.31), (3.5), (3.14), (3.17), оценим следующим образом:

$$\begin{aligned}(3.23)\quad \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{Q_T} \theta^{1-\sigma_1} p_{\theta i}(\rho_i) \mathrm{div} \boldsymbol{u}_i \, d\boldsymbol{x}dt &\leqslant \\ \leqslant B_{27}(c_4, |\Omega|) &\left(1 + \sum_{i=1}^{2} \|\rho_i\|^{\frac{\gamma}{3}}_{L_\infty\left(0,T;L_\gamma(\Omega)\right)} \right) \times \\ \times \|\theta\|^{1-\sigma_1}_{L_{2(1-\sigma_1)}\left(0,T;L_{6(1-\sigma_1)}(\Omega)\right)} &\sum_{i=1}^{2} \|\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i\|_{L_2(Q_T)} \leqslant \\ &\leqslant B_{28}\left(B_{13}, B_{21}, B_{23}, B_{27}, T, m, \gamma, \sigma_1, |\Omega|\right).\end{aligned}$$

Поскольку при всех $i = 1, 2$ и $z > 0$ (см. (2.18))

$$\int\limits_1^z \frac{c_{\theta i}(s)}{s^{\sigma_1}} ds \leqslant Q_i(z),$$

то для второго слагаемого в правой части (3.22) получаем, в силу (2.33), (3.6), оценку

$$(3.24)\qquad \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \left[\rho_i \left(\int\limits_1^\theta \frac{c_{\theta i}(z)}{z^{\sigma_1}}\, dz \right) \right]_{t=0}^{t=T} d\boldsymbol{x} \leqslant B_{29}\left(B_{14}, \{M_i\}, c_6, m, \sigma_1\right).$$

Таким образом, из (3.22), ввиду (2.32), (3.23), (3.24), следует, что

$$(3.25)\qquad \int\limits_{Q_T} |\nabla \theta^{\frac{m+1-\sigma_1}{2}}|^2 \, d\boldsymbol{x}dt \leqslant B_{30}\left(B_{28}, B_{29}, c_5, m, \sigma_1\right).$$

Далее, заметим, что из (2.1), (2.22), (2.23), (3.5) и неравенства Гёльдера при всех $t \in [0, T]$ вытекают неравенства

$$(3.26)\qquad M_1 - \sigma_2|\Omega| \leqslant \int\limits_{\{\Omega:\, \rho_1 \geqslant \sigma_2\}} \rho_1 \, d\boldsymbol{x} \leqslant B_{13}|\{\Omega :\, \rho_1 \geqslant \sigma_2\}|^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

откуда получаем, что

$$|\{\Omega:\ \rho_1 \geqslant \sigma_2\}| \geqslant B_{31}(B_{13}, M_1, \sigma_2, \gamma, |\Omega|) > 0, \quad \sigma_2 \in \left(0, \frac{M_1}{|\Omega|}\right). \tag{3.27}$$

Теперь заметим, что из неравенства Гёльдера, (3.7) и (3.14) следует оценка[3]

$$\int\limits_0^T \left(\int\limits_{\{\Omega:\, \rho_1 \geqslant \sigma_2\}} \theta^{\frac{m+1-\sigma_1}{2}}\, d\boldsymbol{x} \right)^2 dt \leqslant B_{32}(B_{15}, B_{21}, T, m, \sigma_1, \sigma_2), \tag{3.28}$$

которая позволяет с помощью обобщенного неравенства Пуанкаре (см. [10], Теорема 10.14, стр. 327) и (3.25), (3.27), (3.28) заключить, что

$$\left\| \theta^{\frac{m+1-\sigma_1}{2}} \right\|_{L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)} \leqslant B_{33}(B_{30}, B_{31}, B_{32}) \tag{3.29}$$

и, в силу ограниченности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_6(\Omega)$,

$$\|\theta\|_{L_{m+1-\sigma_1}\left(0,T;L_{3(m+1-\sigma_1)}(\Omega)\right)} \leqslant B_{34}(B_{33}, m, \sigma_1, \Omega). \tag{3.30}$$

Выбирая $\sigma_1 = \dfrac{1}{3}$ и используя неравенство Гёльдера, (3.7) и (3.30), приходим к оценке

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\{\Omega:\, \rho_1 \geqslant \sigma_2\}} \theta^{m+1}\, d\boldsymbol{x} dt \leqslant B_{35}(B_{15}, B_{34}, T, m, \sigma_2). \tag{3.31}$$

Далее, рассмотрим следующую задачу Неймана для уравнения Пуассона:

$$\Delta\eta = G(\rho_1) - \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega G(\rho_1)\, d\boldsymbol{x} \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.32}$$

$$\nabla\eta \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \qquad \int\limits_\Omega \eta\, d\boldsymbol{x} = 0,$$

в которой $G \in C^\infty(\mathbb{R})$, $G:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$G(z) = \begin{cases} 0, \quad z \leqslant \sigma_2, \\ \text{невозр.}, \quad \sigma_2 < z < 2\sigma_2, \\ -1, \quad z \geqslant 2\sigma_2, \end{cases} \tag{3.33}$$

а σ_2 — фикс. число из интервала $\left(0, \dfrac{M_1}{2|\Omega|}\right)$, например, $\sigma_2 = \dfrac{M_1}{4|\Omega|}$. Отметим, что при фиксации σ_2 можно иметь $|G'(s)| + |G'(s)s - G(s)| \leqslant B_{36}$, и тогда из (3.5), (3.19) имеем оценку

$$\|\rho_1 \boldsymbol{u}_1\|_{L_2(Q_T)} \leqslant B_{37}(B_{13}, B_{25}, \gamma, |\Omega|),$$

а значит из уравнения (2.1) для ρ_1 следует, что

$$\left\| \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right\|_{L_2\left(0,T;W_2^{-1}(\Omega)\right)} \leqslant B_{37},$$

---

[3]Оптимальным (максимальным) показателем степени интеграла в оценке (3.28) является $\dfrac{5m}{3(1-\sigma_1)} > 2$, но для применения далее неравенства Пуанкаре в силу (3.25) нам нужен (достаточен) именно показатель 2.

и, поэтому, в силу (2.1), (2.23), (3.17), (3.32), приходим к оценке

$$\left\|\Delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\right\|_{L_2\left(0,T;W_2^{-1}(\Omega)\right)} \leqslant B_{38}(B_{23}, B_{36}, B_{37}). \tag{3.34}$$

Для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ имеем неравенство

$$\left|\int\limits_\Omega \nabla\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\cdot\nabla\varphi\,d\boldsymbol{x}\right| \leqslant \left\|\Delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\right\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{3.35}$$

Т. к. произвольную функцию $\boldsymbol{h} \in L_2(\Omega)$ можно представить в виде (см., например, [5]) $\boldsymbol{h} = \nabla\varphi + \boldsymbol{w}$, $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$,

$$\int\limits_\Omega \boldsymbol{w}\cdot\nabla\xi\,d\boldsymbol{x} = 0 \quad \forall\,\xi \in W_2^1(\Omega),$$

и при этом $\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\boldsymbol{h}\|_{L_2(\Omega)}$, то из (3.35) следует, что при всех $\boldsymbol{h} \in L_2(\Omega)$

$$\left|\int\limits_\Omega \nabla\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\cdot\boldsymbol{h}\,d\boldsymbol{x}\right| \leqslant B_{39}(\Omega)\left\|\Delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\right\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \|\boldsymbol{h}\|_{L_2(\Omega)}, \tag{3.36}$$

что вместе с неравенством Пуанкаре и (3.32), (3.34) влечет оценку[4]

$$\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|_{L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)} \leqslant B_{40}\left(B_{38}, \Omega\right). \tag{3.37}$$

Возьмем в качестве пробной функции для слабой (интегральной) записи уравнения (2.21) функцию $\varphi = \psi\eta$, где $\psi \in C_0^\infty(0,T)$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, $\|\psi'\|_{L_1(0,T)} \leqslant 4$, а η — решение задачи (3.32), получим с учетом (3.21) равенство

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^T \int\limits_{\{\Omega:\,\rho_1<\sigma_2\}} \psi\mathcal{K}(\theta)\left(G(\rho_1) - \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega G(\rho_1)\,d\boldsymbol{x}\right)d\boldsymbol{x}dt \\
&= -\int\limits_0^T \int\limits_{\{\Omega:\,\rho_1\geqslant\sigma_2\}} \psi\mathcal{K}(\theta)\left(G(\rho_1) - \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega G(\rho_1)\,d\boldsymbol{x}\right)d\boldsymbol{x}dt \\
&-\int\limits_{Q_T}\left(\sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)\right)\psi\eta\,d\boldsymbol{x}dt - a\int\limits_{Q_T}|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2\,\psi\eta\,d\boldsymbol{x}dt + \\
&+\int\limits_{Q_T}\left(\theta\sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i\right)\psi\eta\,d\boldsymbol{x}dt - \int\limits_{Q_T}\psi\left(\sum_{i=1}^2\rho_i Q_i(\theta)\boldsymbol{u}_i\right)\cdot\nabla\eta\,d\boldsymbol{x}dt \\
&-\int\limits_{Q_T}\left(\sum_{i=1}^2\rho_i Q_i(\theta)\right)\frac{d\psi}{dt}\eta\,d\boldsymbol{x}dt - \int\limits_{Q_T}\left(\sum_{i=1}^2\rho_i Q_i(\theta)\right)\psi\frac{\partial\eta}{\partial t}\,d\boldsymbol{x}dt.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

[4]Ср. раздел 6.1.

Левую часть равенства (3.38), благодаря (3.33), оценим снизу следующим образом:

$$\int_0^T \int_{\{\Omega\colon \rho_1<\sigma_2\}} \psi\mathcal{K}(\theta)\left(G(\rho_1)-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega G(\rho_1)\,d\boldsymbol{x}\right)d\boldsymbol{x}dt \geqslant \frac{\left|\left\{\Omega:\ \rho_1\geqslant \frac{M_1}{2|\Omega|}\right\}\right|}{|\Omega|}\int_0^T\int_{\{\Omega\colon \rho_1<\sigma_2\}}\psi\mathcal{K}(\theta)\,d\boldsymbol{x}dt. \tag{3.39}$$

Теперь оценим сверху каждое слагаемое в правой части (3.38):

$$-\int_0^T \int_{\{\Omega\colon \rho_1\geqslant\sigma_2\}} \psi\mathcal{K}(\theta)\left(G(\rho_1)-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega G(\rho_1)\,d\boldsymbol{x}\right)d\boldsymbol{x}dt \leqslant B_{41}\left(B_{35},c_5,T,m,|\Omega|\right) \tag{3.40}$$

(здесь использовались неравенство Юнга и формулы (2.32), (3.21), (3.31), (3.33));

$$-\int_{Q_T}\left(\sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)\right)\psi\eta\,d\boldsymbol{x}dt - a\int_{Q_T}|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2\,\psi\eta\,d\boldsymbol{x}dt \leqslant B_{42}\left(B_{23},B_{25},\boldsymbol{\Lambda},\mathbf{M},a,\Omega\right) \tag{3.41}$$

(здесь применялись неравенство Коши, стандартные оценки для эллиптических уравнений[5], ограниченность вложения $W^2_{\sigma_3}(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$, где $\sigma_3>\dfrac{3}{2}$, а также (2.4), (3.17), (3.18), (3.32), (3.33));

$$\int_{Q_T}\left(\theta\sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i\right)\psi\eta\,d\boldsymbol{x}dt \leqslant B_{43}\left(B_{22},B_{23},T,m,\Omega\right) \tag{3.42}$$

(здесь мы прибегали к неравенству Коши, стандартным оценкам для эллиптических уравнений, ограниченности вложения $W^2_{\sigma_3}(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ и (3.15), (3.17));

$$-\int_{Q_T}\psi\left(\sum_{i=1}^2\rho_iQ_i(\theta)\boldsymbol{u}_i\right)\cdot\nabla\eta\,d\boldsymbol{x}dt-\int_{Q_T}\left(\sum_{i=1}^2\rho_iQ_i(\theta)\right)\frac{d\psi}{dt}\eta\,d\boldsymbol{x}dt\leqslant B_{44}, \tag{3.43}$$

где $B_{44}=B_{44}\left(B_9,B_{10},B_{13},B_{14},B_{21},B_{25},T,\gamma,\Omega\right)$ (в этом месте применялись стандартные оценки для эллиптических уравнений, неравенство Гёльдера, ограниченность вложений $W^2_{\sigma_3}(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ и $W^2_{\sigma_4}(\Omega)$ в $C^1(\overline{\Omega})$, где $\sigma_4>3$, а также (2.40), (3.5), (3.6), (3.14), (3.19));

$$-\int_{Q_T}\left(\sum_{i=1}^2\rho_iQ_i(\theta)\right)\psi\frac{\partial\eta}{\partial t}\,d\boldsymbol{x}dt\leqslant B_{45}\left(B_9,B_{10},B_{13},B_{21},B_{40},T,\gamma,\Omega\right) \tag{3.44}$$

[5] См., например, [10], стр. 308.

(здесь применялись неравенство Гёльдера, ограниченность вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_6(\Omega)$, а также (2.40), (3.5), (3.14), (3.37)). Таким образом, из (3.38), благодаря (2.32), (3.21), (3.39)–(3.44), следует неравенство

$$\int_0^T \int_{\{\Omega:\,\rho_1<\sigma_2\}} \psi\theta^{m+1}\,d\boldsymbol{x}dt \leqslant \tag{3.45}$$

$$\leqslant B_{46}\left(B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44}, B_{45}, c_5, m, |\Omega|, \left|\left\{\Omega:\ \rho_1 \geqslant \frac{M_1}{2|\Omega|}\right\}\right|\right),$$

выбирая в котором в качестве тестовых функций ψ функции ψ_q, такие, что $\psi_q \in C_0^\infty(0,T)$, $0 \leqslant \psi_q \leqslant 1$, $\psi_q = 1$ при $t \in \left[\dfrac{1}{q}, T-\dfrac{1}{q}\right]$, $|\psi_q'| \leqslant 2q$, $q \in \mathbb{N}$, после чего переходя к пределу по $q \to +\infty$, приходим, ввиду (3.31), к требуемой априорной оценке

$$\|\theta\|_{L_{m+1}(Q_T)} \leqslant B_{47}(B_{35}, B_{46}, m). \tag{3.46}$$

Замечание 7. *Оценку* (3.46) *можно получить из* (3.31) *и* (3.45) *с* ρ_1 *и* σ_2 *замененными на* ρ_2 *и* $\sigma_5 = \dfrac{M_2}{4|\Omega|}$ *соответственно, однако, в силу специфики уравнений неразрывности* (2.1)*, невозможно вместо* ρ_1 *использовать суммарную плотность* ρ*.*

3.5. **Улучшенные оценки плотностей и давлений.** В заключение данного раздела получим дополнительные оценки для давлений p_i и плотностей ρ_i. Ренормализация уравнений (2.1) приводит к равенствам

$$\frac{\partial\rho_i^{\sigma_6}}{\partial t} = -\mathrm{div}(\rho_i^{\sigma_6}\boldsymbol{u}_i) - (\sigma_6-1)\rho_i^{\sigma_6}\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i, \quad i=1,2,$$

из которых следует

$$\frac{\partial\boldsymbol{w}_i}{\partial t} = -(\mathcal{B}\circ\mathrm{div})(\rho_i^{\sigma_6}\boldsymbol{u}_i) - (\sigma_6-1)\mathcal{B}(\rho_i^{\sigma_6}\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i), \quad i=1,2, \tag{3.47}$$

где $\boldsymbol{w}_i = \mathcal{B}(\rho_i^{\sigma_6})$, $\sigma_6 > 0$, а $\mathcal{B}$ — это оператор Боговского, определяемый следующим образом. Значение $\boldsymbol{v} = \mathcal{B}y$ оператора $\mathcal{B}$ на скалярной функции y, заданной в Ω, есть решение задачи

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = y - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega y\,d\boldsymbol{x} \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \boldsymbol{v}=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{3.48}$$

Ясно, что решение (3.48) не единственно, но существуют способы выбора единственного решения ([10], стр. 315–316) таким образом, чтобы оператор $\mathcal{B}$ обладал следующими свойствами:

- $\|\mathcal{B}y\|_{W_{\sigma_8}^{\sigma_7+1}(\Omega)} \leqslant B_{48}(\sigma_7,\sigma_8,\Omega)\|y\|_{W_{\sigma_8}^{\sigma_7}(\Omega)}$ для всех $\sigma_8 \in (1,+\infty)$ и $\sigma_7 = -1, 0, 1, 2, \ldots$;
- $(\mathcal{B}y)_t = \mathcal{B}y_t$;
- оператор $\mathcal{B}\circ\mathrm{div}$ ограничен[6] в $L_{\sigma_9}(\Omega)$ для всех $\sigma_9 \in (1,+\infty)$.

[6]Это свойство, впрочем, вытекает из первого.

Из (3.5), (3.17), (3.19) и неравенства Гёльдера при $\sigma_6 < \dfrac{\gamma}{2}$ получаем

$$(3.49)\quad \|\rho_i^{\sigma_6}\|_{L_\infty\left(0,T;L_{\frac{\gamma}{\sigma_6}}(\Omega)\right)} + \|\rho_i^{\sigma_6}\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i\|_{L_2\left(0,T;L_{\frac{2\gamma}{\gamma+2\sigma_6}}(\Omega)\right)} + \|\rho_i^{\sigma_6}\boldsymbol{u}_i\|_{L_2\left(0,T;L_{\frac{6\gamma}{\gamma+6\sigma_6}}(\Omega)\right)} \leqslant B_{49}, \quad i = 1,2,$$

где $B_{49} = B_{49}(B_{13}, B_{23}, B_{25}, \sigma_6)$. Тогда из свойств оператора $\mathcal{B}$, ограниченности вложения $W^1_{\frac{\gamma}{\sigma_6}}(\Omega)$ в $C\left(\overline{\Omega}\right)$, $W^1_{\frac{2\gamma}{\gamma+2\sigma_6}}(\Omega)$ в $L_{\frac{6\gamma}{\gamma+6\sigma_6}}(\Omega)$ и (3.47), (3.49) следуют при $\sigma_6 < \dfrac{\gamma}{3}$ оценки

$$(3.50)\quad \|\boldsymbol{w}_i\|_{L_\infty(Q_T)} + \left\|\frac{\partial \boldsymbol{w}_i}{\partial t}\right\|_{L_2\left(0,T;L_{\frac{6\gamma}{\gamma+6\sigma_6}}(\Omega)\right)} + \|\nabla\otimes\boldsymbol{w}_i\|_{L_\infty\left(0,T;L_{\frac{\gamma}{\sigma_6}}(\Omega)\right)} \leqslant B_{50}, \quad i = 1,2,$$

где $B_{50} = B_{50}(B_{48}, B_{49}, \sigma_6, \gamma, \Omega)$. Умножая уравнения (2.2) на $\boldsymbol{w}_i$ и интегрируя по Q_T, получим тождества

$$(3.51)\quad \int\limits_{Q_T} p_i\rho_i^{\sigma_6}\, d\boldsymbol{x}dt = \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{Q_T} p_i \left(\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\sigma_6}\, d\boldsymbol{x}\right) d\boldsymbol{x}dt + \int\limits_{\Omega}\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{w}_i d\boldsymbol{x}\Bigg|_{t=0}^{t=T} - \int\limits_{Q_T}\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{w}_i}{\partial t}d\boldsymbol{x}dt - \int\limits_{Q_T}\boldsymbol{w}_i\cdot(\boldsymbol{J}_i + \rho_i\boldsymbol{f}_i)d\boldsymbol{x}dt + \int\limits_{Q_T}(\mathbb{S}_i - \rho_i\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{u}_i) : (\nabla\otimes\boldsymbol{w}_i)d\boldsymbol{x}dt, \quad i = 1,2.$$

Оценим сверху все слагаемые в правой части (3.51): из (2.15), (2.36), (3.1), (3.5), (3.15) получаем

$$\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{Q_T} p_i \left(\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\sigma_6}\, d\boldsymbol{x}\right) d\boldsymbol{x}dt \leqslant B_{51}\left(B_{13}, B_{22}, \{M_i\}, T, c_2, c_3, m, \gamma, \sigma_6, |\Omega|\right), \quad i = 1,2;$$

из (3.7), (3.50) следует, что

$$\int\limits_{\Omega}\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{w}_i d\boldsymbol{x}\Bigg|_{t=0}^{t=T} \leqslant B_{52}\left(B_{15}, B_{50}, \|\rho_{0i}\boldsymbol{u}_{0i}\|_{L_1(\Omega)}, \gamma, |\Omega|\right), \quad i = 1,2;$$

далее из (3.20), (3.50) при $\sigma_6 < \dfrac{2\gamma}{3} - 1$ получаем, что

$$-\int\limits_{Q_T}\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{w}_i}{\partial t}d\boldsymbol{x}dt \leqslant B_{53}\left(B_{26}, B_{50}, \sigma_6, \gamma, |\Omega|\right), \quad i = 1,2;$$

также из (2.7), (2.44), (3.1), (3.19), (3.50) приходим к неравенствам

$$-\int\limits_{Q_T} \boldsymbol{w}_i \cdot (\boldsymbol{J}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i) d\boldsymbol{x} dt$$

$$\leqslant B_{54} \left(B_{25}, B_{50}, \left\{ \|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}, \{M_i\}, T, a, |\Omega| \right), \quad i = 1, 2;$$

наконец, из (2.4), (3.17), (3.20), (3.50) при $\sigma_6 < \dfrac{2\gamma - 3}{6}$ следуют оценки

$$\int\limits_{Q_T} (\mathbb{S}_i - \rho_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{w}_i) d\boldsymbol{x} dt$$

$$\leqslant B_{55} \left(B_{23}, B_{26}, B_{50}, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M}, T, \sigma_6, \gamma, |\Omega| \right), \quad i = 1, 2.$$

Из полученных оценок следует ограниченность слагаемых в правых частях (3.51), что позволяет заключить

$$\int\limits_{Q_T} p_i \rho_i^{\sigma_6} d\boldsymbol{x} dt \leqslant B_{56} \left(B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}, B_{55} \right). \tag{3.52}$$

В итоге, используя (2.15), (2.36), получаем неравенства

$$\int\limits_{Q_T} \rho_i^{\sigma_{10}} \, d\boldsymbol{x} \, dt + \int\limits_{Q_T} \theta \rho_i^{\sigma_6} p_{\theta i}(\rho_i) \, d\boldsymbol{x} \, dt \leqslant B_{57}(B_{56}, c_2, \gamma) \tag{3.53}$$

$$\forall \, \sigma_6 < \frac{2\gamma - 3}{6}, \quad \sigma_{10} < \frac{8\gamma - 3}{6}, \quad i = 1, 2.$$

4. Формулировка приближенной Задачи $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,\upsilon}$

Зададим произвольно числа $q \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $0 < \delta \leqslant 1$, $0 < \upsilon \leqslant 1$ и рассмотрим приближенную **Задачу** $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,\upsilon}$ для функций ρ_i, $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, 2$, θ (все эти функции зависят от параметров q, ε, δ и υ, но пока для краткости опустим соответствующие индексы).

4.1. **Уравнения неразрывности.** Вместо (2.1) будем рассматривать уравнения

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}_i) = \varepsilon \Delta \rho_i, \quad i = 1, 2 \tag{4.1}$$

с краевыми условиями

$$\nabla \rho_i \cdot \boldsymbol{n}|_{(0,T) \times \partial\Omega} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{4.2}$$

а вместо (2.22) для плотностей поставим условия

$$\rho_i|_{t=0} = \rho_{0i}^\delta, \quad i = 1, 2 \tag{4.3}$$

с некоторыми функциями $\rho_{0i}^\delta \in C^{2+\sigma_{11}}\left(\overline{\Omega}\right)$, $0 < \sigma_{11} < 1$ такими, что[7]

$$\nabla \rho_{0i}^\delta \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \inf_{\Omega} \rho_{0i}^\delta > 0, \quad \rho_{0i}^\delta \xrightarrow[\delta \to 0]{} \rho_{0i} \quad \text{в} \quad L_\gamma(\Omega), \quad i = 1, 2. \tag{4.4}$$

---

[7]Например, можно положить $\rho_{0i}^\delta = (\varphi_\delta \rho_{0i}) * \tilde{\zeta}_\delta + \delta$, где $\tilde{\zeta}_\delta$ — усредняющее ядро класса $C^3(\mathbb{R}^3)$, а φ_δ — срезающая функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, равная нулю в δ-окрестности $\partial\Omega$ и равная единице за пределами 2δ-окрестности $\partial\Omega$.

4.2. **Уравнение энергии.** Вместо (2.21) будем рассматривать уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{2}(\rho_i+\upsilon)Q_i(\theta)+\operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{2}\rho_iQ_i(\theta)\boldsymbol{u}_i\right)+\operatorname{div}\boldsymbol{q}+\theta\sum_{i=1}^{2}p_{\theta i}(\rho_i)\operatorname{div}\boldsymbol{u}_i$$
$$+\delta\theta^{m+1}=(1-\delta)\sum_{i=1}^{2}\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)+a|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2+\rho g^\delta, \tag{4.5}$$

а вместо (2.22) для температуры и (2.24) поставим соответственно условия

$$\theta|_{t=0}=\theta_0^\delta \tag{4.6}$$

и

$$k(\theta)\nabla\theta\cdot\boldsymbol{n}+L^\delta(t,\boldsymbol{x},\theta)=0 \quad \text{на} \quad (0,T)\times\partial\Omega, \tag{4.7}$$

с некоторой функцией $\theta_0^\delta\in C^{2+\sigma_{12}}\left(\overline{\Omega}\right)$, $0<\sigma_{12}<1$ такой, что[8]

$$k(\theta_0^\delta)\nabla\theta_0^\delta\cdot\boldsymbol{n}+L^\delta(0,\boldsymbol{x},\theta_0^\delta)=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$
$$\inf_\Omega\theta_0^\delta>0, \quad \theta_0^\delta\xrightarrow[\delta\to0]{}\theta_0 \quad \text{в} \quad L_1(\Omega) \tag{4.8}$$

и функциями g^δ, L^δ определенными следующим образом[9]:

$$g^\delta\in C^1(\overline{Q}_T), \quad g^\delta\geqslant0, \quad g^\delta\to g \quad \text{в } L_{\sigma_{13}}(Q_T) \quad \forall\sigma_{13}<+\infty, \tag{4.9}$$

$$L^\delta\in C^2(\mathbb{R}^5), \quad L^\delta\geqslant0, \quad L^\delta\to L \quad \text{в } C(K) \quad \forall\, K\subset\mathbb{R}^5 \ (K\text{— компакт}),$$
$$L^\delta(\cdot,\cdot,\theta) \text{ не убывает по } \theta. \tag{4.10}$$

4.3. **Уравнения импульсов.** Обозначим $X_q=\operatorname{Lin}\{\boldsymbol{\psi_i}\}_{i=1}^q\subset L_2(\Omega)$, где $\{\boldsymbol{\psi_i}\}_{i=1}^\infty$ — базис в $W_2^1(\Omega)$, ортонормированный в $L_2(\Omega)$, состоящий из гладких функций, имеющих компактный носитель в области Ω, для определенности норму в X_q положим равной норме в $L_2(\Omega)$. Обозначим через P_q ортогональный проектор из $L_2(\Omega)$ в X_q, и положим

$$\mathcal{M}_\xi=P_q(\xi(\cdot)):\ X_q\to X_q, \quad \text{где} \quad \xi\in L_\infty(\Omega).$$

Легко видеть, что

$$(\mathcal{M}_\xi(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v})_{L_2(\Omega)}=\int\limits_\Omega\xi\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}, \quad \forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in X_q,$$

---

[8]Например, можно положить $\theta_0^\delta=(\varphi_\delta\theta_0)*\tilde{\zeta}_\delta+\delta$, где $\tilde{\zeta}_\delta$ — усредняющее ядро класса $C^3(\mathbb{R}^3)$, а φ_δ — срезающая функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, равная нулю в δ-окрестности $\partial\Omega$ и равная единице за пределами 2δ-окрестности $\partial\Omega$.

[9]Например, g^δ, L^δ — это усреднения от g, $L\psi_\delta$ с ядрами классов $C^1(\mathbb{R}^4)$, $C^2(\mathbb{R}^5)$ соответственно, где ψ_δ — это срезающая функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^4)$, равная нулю в δ-окрестности $\{t=0\}\times\partial\Omega$ и равная единице за пределами 2δ-окрестности $\{t=0\}\times\partial\Omega$). На данном этапе нет необходимости обеспечивать условие согласования в (4.8), а это нужно только для задачи (5.3)–(5.5), что и сделано в условии (5.6). Однако для ясности оказалось удобнее заранее обеспечить условие согласования в (4.8) за счет конструкции описанной после (4.10).

и для всех $\xi > 0$ оператор $\mathcal{M}_\xi$ обратим. Вместо (2.2) будем рассматривать уравнения для $\boldsymbol{u}_i \in C([0,T],X_q)$

$$\frac{\partial(\rho_i \boldsymbol{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i) + \nabla p_i + \varepsilon(\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)^* \nabla \rho_i = \operatorname{div}\mathbb{S}_i + \boldsymbol{J}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{h}_i, \quad i = 1,2, \tag{4.11}$$

где $\boldsymbol{h}_i \perp C_0^1([0,T),X_q)$ в $L_2(Q_T)$. Условия (2.22) для скоростей и (2.23) остаются прежними с точностью до проектирования на X_q. А именно, вместо прежних начальных условий положим

$$\boldsymbol{u}_i|_{t=0} = \mathcal{M}^{-1}_{\rho^\delta_{0i}} P_q \left(\rho^\delta_{0i} \boldsymbol{u}_{0i}\right) \in X_q. \tag{4.12}$$

Тогда легко проверить, что

$$\rho_i \boldsymbol{u}_i|_{t=0} - \rho^\delta_{0i} \boldsymbol{u}_{0i} \in X_q^\perp. \tag{4.13}$$

В интегральной записи описанные факты означают, что для любых пробных функций $\boldsymbol{\varphi}_i \in C_0^1([0,T),X_q)$ справедливы равенства

$$\int\limits_{Q_T} \left(\rho_i \boldsymbol{u}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} + (\rho_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + p_i \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}_i + (\boldsymbol{J}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i) \cdot \boldsymbol{\varphi}_i\right) d\boldsymbol{x}dt$$
$$= \int\limits_{Q_T} \big(\varepsilon[(\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{\varphi}_i] \cdot \nabla\rho_i + \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i)\big) d\boldsymbol{x}dt - \int\limits_{\Omega} \rho^\delta_{0i} \boldsymbol{u}_{0i} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i|_{t=0} d\boldsymbol{x}, \ \ i = 1,2. \tag{4.14}$$

Сформулированную задачу (4.1)–(4.14) будем называть *Задачей* $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,\upsilon}$.

4.4. **План предельного перехода по параметрам q, ε, δ и υ.** Доказательство разрешимости Задачи $\mathcal{H}$ проводится по следующей схеме:

- Доказать разрешимость поставленной приближенной задачи при фиксированных q, ε, δ и υ;
- Перейти к пределу при $q \to +\infty$, получив, в частности, в пределе уравнения (4.11) без слагаемых $\boldsymbol{h}_i$;
- Перейти к пределу по малым параметрам: сначала $\varepsilon \to 0$, потом $\delta \to 0$, и наконец $\upsilon \to 0$ (возможно, однако, при этом будет $\delta = \varepsilon$ или даже $\upsilon = \delta = \varepsilon$);
- На каждом этапе получать оценки решений, не зависящие от того параметра, по которому предполагается предельный переход.

5. Доказательство разрешимости приближенной Задачи $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,\upsilon}$

5.1. **Выражение плотностей через скорости.** Из теории параболических уравнений известно (см. [10], Лемма 3.1, стр. 54 и [34], Предложение 7.39, стр. 345), что если Ω — ограниченная область класса $C^{2+\sigma_{14}}$, $\sigma_{14} \in (0,1)$ и $\boldsymbol{u}_i \in C([0,T];X_q)$, $i = 1,2$ заданы, то:

- существуют единственные классические решения (4.1)–(4.3), т. е. $\rho_i \in V_{[0,T]}$, $i = 1, 2$, где

$$V_{[0,T]} = \Big\{\rho \,\Big|\quad \rho \in C\big([0,T]; C^{2+\sigma_{15}}(\overline{\Omega})\big), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \in C\big([0,T]; C^{\sigma_{15}}(\overline{\Omega})\big)\Big\};$$

- отображения $\mathcal{S}_i : \boldsymbol{u}_i \mapsto \rho_i$, $i = 1, 2$, ограничены из $C([0,T]; X_q)$ в $V_{[0,T]}$ с нормой B_{58} и непрерывны со значениями в $C^1\big([0,T] \times \overline{\Omega}\big)$;
- для всех $t \in [0,T]$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, $i = 1, 2$ верна оценка

$$\left(\inf_{\Omega} \rho_{0i}^{\delta}\right) \exp\Big(-\|\operatorname{div} \boldsymbol{u}_i\|_{L_1(0,t;L_\infty(\Omega))}\Big) \leqslant \rho_i(t, \boldsymbol{x}) \leqslant \left(\sup_{\Omega} \rho_{0i}^{\delta}\right) \exp\Big(\|\operatorname{div} \boldsymbol{u}_i\|_{L_1(0,t;L_\infty(\Omega))}\Big); \tag{5.1}$$

- если $\|\boldsymbol{u}_i^k\|_{L_\infty\left(0,T;W_\infty^1(\Omega)\right)} \leqslant B_{59}$, $i, k = 1, 2$, то при всех $t \in [0,T]$

$$\|(\mathcal{S}_i(\boldsymbol{u}_i^1) - \mathcal{S}_i(\boldsymbol{u}_i^2))(t)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant B_{60}(B_{59}, T, \varepsilon) t \|\rho_{0i}^{\delta}\|_{W_2^1(\Omega)} \|\boldsymbol{u}_i^1 - \boldsymbol{u}_i^2\|_{L_\infty\left(0,T;W_\infty^1(\Omega)\right)}, \quad i = 1, 2. \tag{5.2}$$

5.2. **Постановка приближенной задачи о выражении температуры через плотности и скорости с дополнительным параметром ω и ее разрешимость.** Нам предстоит доказать, что при известных $\boldsymbol{u}_i \in C([0,T]; X_q)$, $\rho_i = \mathcal{S}_i(\boldsymbol{u}_i)$, $i = 1, 2$ существует единственное сильное положительное решение θ задачи (4.5)–(4.7).

Для этого введем еще один малый параметр[10] $\omega \in (0, \min\{1, T\})$ и рассмотрим следующую задачу[11]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{2} \left([\rho_i]^\omega + \upsilon\right) [Q_i(\theta)]^\omega + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{2} [\rho_i \boldsymbol{u}_i]^\omega [Q_i(\theta)]^\omega\right) - \operatorname{div}([k(\theta)]^\omega \nabla\theta) + \theta \sum_{i=1}^{2} [p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \boldsymbol{u}_i]^\omega + \delta \left[\theta^{m+1}\right]^\omega = (1-\delta) \sum_{i=1}^{2} [\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)]^\omega + a[|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2]^\omega + [\rho g^\delta]^\omega, \tag{5.3}$$

---

[10]Решение θ соответствующей приближенной задачи зависит от ω и потому будет обозначаться θ^ω, однако для краткости индекс ω будет опускаться до формулы (5.37).

[11]Наша цель — построить сильное решение задачи (4.5)–(4.7). В связи с отсутствием в литературе общих теорем для того рода ситуаций мы вынуждены проводить дополнительную регуляризацию и пользоваться теоремой о классической разрешимости из [16]. Для этого в частности приходится временно обеспечивать дополнительные условия (например, гладкость входных данных, условие согласования начальных и краевых условий), которые по отношению к исходной задаче являются искусственными и лишними. Некоторые из этих действий мы начали проводить заранее, еще при введении параметра δ — см. $(4.8)_1$, $(4.9)_1$, $(4.10)_1$.

$$\theta|_{t=0} = \theta_0^{\delta,\omega}, \tag{5.4}$$

$$[k(\theta)]^\omega \nabla\theta \cdot \boldsymbol{n} + [L^\delta(t,\boldsymbol{x},\theta)]^\omega = 0 \quad \text{на} \quad (0,T)\times\partial\Omega, \tag{5.5}$$

где смысл операции $[\cdot]^\omega$ будет объяснен позже[12]. При этом начальная функция $\theta_0^{\delta,\omega}$ предполагается удовлетворяющей краевому условию (5.5), т. е. (ср. (4.7))

$$[k(\theta_0^{\delta,\omega})]^\omega \nabla\theta_0^{\delta,\omega} \cdot \boldsymbol{n} + [L^\delta(0,\boldsymbol{x},\theta_0^{\delta,\omega})]^\omega = 0 \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega. \tag{5.6}$$

Задача (5.3)–(5.5) представляет собой смешанную начально–краевую задачу для квазилинейного уравнения параболического типа и, как мы обоснуем ниже, имеет единственное классическое решение при определенных ограничениях на данные задачи и скобки $[\cdot]^\omega$.

Для конкретизации скобок $[\cdot]^\omega$ введем функцию[13] π_ω и операцию[14] $(\cdot)_\omega$ по формулам:

$$\pi_\omega(z) = \frac{\sqrt{z^2+\omega^2}}{1+\omega\sqrt{z^2+\omega^2}}, \quad h_\omega(z) = (h*\zeta_\omega)(z) := \int\limits_{\mathbb{R}} \zeta_\omega(z-s)h(s)ds, \tag{5.7}$$

где $\zeta_\omega(z) = \dfrac{1}{\omega}\zeta\left(\dfrac{z}{\omega}\right)$, а функция $\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такова, что $\operatorname{supp}\zeta \subset \left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $\zeta(-x)=\zeta(x)\geqslant 0$, $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}}\zeta(z)dz = 1$, $\zeta(z)$ — неубывающая при $z\geqslant 0$. Заметим, что

$$0 \leqslant z\pi'_\omega(z) \leqslant \frac{|z|}{(1+\omega|z|)^2} \leqslant \min\left\{\frac{1}{4\omega}, |z|\right\}. \tag{5.8}$$

Теперь в (5.3)–(5.5) примем, что

$$[k(\theta)]^\omega := (k)_\omega(\pi_\omega(\theta)), \quad \left[\theta^{m+1}\right]^\omega := (\pi_\omega(\theta)-\pi_\omega(0))^{m+1}, \quad \theta_0^{\delta,\omega} := \theta_0^\delta, \tag{5.9}$$

$$[c_{\theta i}(\theta)]^\omega := (c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(\theta)), \quad [Q_i(\theta)]^\omega := \int\limits_0^\theta [c_{\theta i}(z)]^\omega dz, \tag{5.10}$$
$$[L^\delta(t,\boldsymbol{x},\theta)]^\omega := L^\delta(t,\boldsymbol{x},\pi_\omega(\theta)),$$

---

[12]Точнее, это не операция, т. к. имеет разный смысл для разных величин, входящих в (5.3)–(5.5).

[13]Заметим, что $\pi_\omega(z)\in\left[\dfrac{\omega}{1+\omega^2},\dfrac{1}{\omega}\right)$, причем $\pi_\omega(z) < |z|+1$ всегда, и $\pi_\omega(z) > \dfrac{|z|}{2}$ при $|z| < \dfrac{1}{\omega}$.

[14]В [9], стр. 60 также используется операция продолжения типа $\phi[h](z) = \begin{cases} h(z), & z>0,\\ h(0), & z\leqslant 0,\end{cases}$ но она, по всей видимости, нужна только для того, чтобы при усреднении $(\cdot)_\omega$ придать смысл ситуации малых $\pi_\omega(z)$, мы же решаем эту проблему за счет согласования радиуса усреднения $\dfrac{\omega}{2}$ с тем фактом, что $\pi_\omega(z) > \dfrac{\omega}{2}$ всегда.

(5.11)
$$[\rho_i]^\omega(\cdot,\boldsymbol{x}) := (\Pi\rho_i)_\omega(\cdot,\boldsymbol{x}), \quad [\rho_i\boldsymbol{u}_i]^\omega(\cdot,\boldsymbol{x}) := (\Pi\rho_i)_\omega(\cdot,\boldsymbol{x})(\Pi\boldsymbol{u}_i)_\omega(\cdot,\boldsymbol{x}),$$
$$[p_{\theta i}(\rho_i)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i]^\omega(\cdot,\boldsymbol{x}) := (\Pi(p_{\theta i}(\rho_i)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i))_\omega(\cdot,\boldsymbol{x}),$$
$$\left((1-\delta)\sum_{i=1}^{2}[\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)]^\omega + a[|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2]^\omega + [\rho g^\delta]^\omega\right)(\cdot,\boldsymbol{x})$$
$$:= \left((1-\delta)\sum_{i=1}^{2}\Pi\left(\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)\right) + a\Pi\left(|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2\right)\right)_\omega(\cdot,\boldsymbol{x}) + (\Pi\rho)_\omega(\cdot,\boldsymbol{x})g^\delta(\cdot,\boldsymbol{x}),$$
где Π — это любое непрерывное продолжение скалярной или вектор-функции от $t\in[0,T]$ на отрезок $\left[-\frac{T}{2},\frac{3T}{2}\right]$, такое, чтобы свойство положительности функций сохранялось после продолжения и усреднения, например[15],
$$\Pi f(t,\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(t,\boldsymbol{x}), & t\in[0,T], \\ f(-t,\boldsymbol{x}), & t\in\left[-\frac{T}{2},0\right), \\ f(2T-t,\boldsymbol{x}), & t\in\left(T,\frac{3T}{2}\right]. \end{cases}$$
Предложенная конструкция скобок $[\cdot]^\omega$ и перечисленные выше требования (см. формулы (4.8), (4.9), (4.10) и сноски к ним) обеспечивают выполнение (5.6).

По Теореме 8 Раздела 6.2 задача (5.3)–(5.5) при допущениях (5.9)–(5.11) имеет единственное решение (см. Разделы 6.2 и 6.3)
$$\theta\in C^{1+\frac{\sigma_{23}}{2},2+\sigma_{23}}\left([0,T]\times\overline{\Omega}\right) \tag{5.12}$$
(здесь $\sigma_{23}=\sigma_{12}$ — см. раздел 6.3, проверка условия (III), и свойства θ_0^δ перед (4.8)).

Наша дальнейшая цель — получить равномерные по ω оценки и на их основе совершить предельный переход в (5.3)–(5.5) при $\omega\to 0$. Сначала получим оценки снизу и сверху для температуры $\theta=\theta^\omega$.

5.3. **Оценки приближенной температуры θ^ω сверху и снизу.**

5.3.1. *Эквивалентный вид приближенного уравнения энергии с дополнительным параметром ω.* Введем следующие обозначения:
$$E_{\omega i}(t,\boldsymbol{x},\theta) = (\Pi\rho_i)_\omega\left(\int_0^\theta (c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(z))dz\right),$$
$$\mathcal{K}_\omega(\theta) = \int_0^\theta (k)_\omega(\pi_\omega(z))\,dz,$$
$$F_\omega(t,\boldsymbol{x},\theta) = \left((1-\delta)\sum_{i=1}^{2}\Pi\left(\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)\right) + a\Pi\left(|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2\right)\right)_\omega + (\Pi\rho)_\omega g^\delta$$

[15]При указанных выше свойствах ядра ζ и описанной конструкции оператора Π очевидно, что если $f>c_7$ в Q_T, то и $(\Pi f)_\omega > c_7$ в Q_T.

$$-\theta\sum_{i=1}^{2}(\Pi(p_{\theta i}(\rho_i)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i))_\omega-\delta(\pi_\omega(\theta)-\pi_\omega(0))^{m+1}$$

$$-\sum_{i=1}^{2}(\Pi\rho_i)_\omega\left(\int_0^\theta(c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(z))dz\right)\mathrm{div}((\Pi\boldsymbol{u}_i)_\omega)$$

и перепишем уравнение (5.3) в виде

$$\upsilon\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^\theta(c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(z))dz\right)+\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial E_{\omega i}}{\partial t}+\nabla E_{\omega i}\cdot(\Pi\boldsymbol{u}_i)_\omega\right)-\Delta\mathcal{K}_\omega=F_\omega. \tag{5.13}$$

5.3.2. *Постоянные суб-решения и супер-решения.* Заметим, что ввиду соотношений $E_{\omega i}(t,\boldsymbol{x},0)=0$, $\mathcal{K}_\omega(0)=0$, $F_\omega(t,\boldsymbol{x},0)\geqslant 0$ функция $\underline{\theta}=0$ является суб-решением[16] уравнения (5.13). С другой стороны, $\overline{\theta}=\mathrm{const}>0$ будет супер-решением уравнения (5.13) если и только если

$$\begin{aligned}\left(\pi_\omega(\overline{\theta})-\pi_\omega(0)\right)^{m+1}\geqslant\frac{1}{\delta}\Big((1-\delta)\sum_{i=1}^{2}\Pi\left(\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)\right)+a\Pi\left(|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2\right)\Big)_\omega\\+\frac{1}{\delta}(\Pi\rho)_\omega g^\delta-\frac{\overline{\theta}}{\delta}\sum_{i=1}^{2}(\Pi(p_{\theta i}(\rho_i)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i))_\omega\\-\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{2}\left(\int_0^{\overline{\theta}}(c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(z))dz\right)\left(\frac{\partial(\Pi\rho_i)_\omega}{\partial t}+\mathrm{div}((\Pi\rho_i)_\omega(\Pi\boldsymbol{u}_i)_\omega)\right),\end{aligned} \tag{5.14}$$

а поскольку[17]

$$\begin{aligned}&[\text{левая часть (5.14)}]>\left(\frac{\overline{\theta}}{12}\right)^{m+1}\quad\text{при}\quad 1<\overline{\theta}<\frac{1}{\omega},\\&[\text{правая часть (5.14)}]\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{\theta}}{12}\right)^{m+1}+B_{61},\end{aligned} \tag{5.15}$$

где $B_{61}=B_{61}\Big(\left\{\|\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)\|_{L_\infty(Q_T)}\right\},\left\{\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\right\},\left\{\|\rho_i\|_{W^1_\infty(Q_T)}\right\},$ $\left\|g^\delta\right\|_{L_\infty(Q_T)}, a, m, c_6,\delta,\left\{\|p_{\theta i}(\rho_i)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\right\},\left\{\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\right\}\Big)$,
то для (5.14) достаточно потребовать

$$\overline{\theta}\in\left(\max\left\{1,12(2B_{61})^{\frac{1}{m+1}}\right\},\frac{1}{\omega}\right), \tag{5.16}$$

---

[16] Как обычно, под суб-решением (или супер-решением) уравнения (5.13) понимается функция, которая после подстановки в (5.13) вместо знака «=» дает знак «$\leqslant$» (или «$\geqslant$»).

[17] См. Лемму 16 в разделе 6.4.

что возможно при следующем дополнительном ограничении[18] на ω:

$$\omega < \omega_0, \quad \text{где} \quad \omega_0 = \mathrm{const} \in \left(0, \frac{1}{\max\left\{1, 12(2B_{61})^{\frac{1}{m+1}}\right\}}\right). \tag{5.17}$$

5.3.3. *Переменные суб-решения и супер-решения, единственность и оценка решения приближенной задачи с дополнительным параметром* ω. Покажем, что если $\underline{\theta}$ и $\overline{\theta}$ являются сильными неотрицательными (вообще говоря, переменными) суб- и супер-решениями задачи[19] (5.3)–(5.5) такими, что

$$\underline{\theta}|_{t=0} \leqslant \overline{\theta}|_{t=0}, \tag{5.18}$$

то тогда

$$\underline{\theta} \leqslant \overline{\theta} \quad \text{в} \quad \overline{Q}_T. \tag{5.19}$$

Действительно, т. к. $\underline{\theta}$ и $\overline{\theta}$ являются суб- и супер-решениями уравнения (5.13), то имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \upsilon \int\limits_\Omega h\left(\underline{\theta} - \overline{\theta}\right) \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^2 \left(\int\limits_{\overline{\theta}}^{\underline{\theta}} (c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(z)) dz \right) d\boldsymbol{x} \\ + \int\limits_\Omega h\left(\underline{\theta} - \overline{\theta}\right) \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^2 \left(E_{\omega i}\left(t, \boldsymbol{x}, \underline{\theta}\right) - E_{\omega i}\left(t, \boldsymbol{x}, \overline{\theta}\right)\right) d\boldsymbol{x} \\ + \int\limits_\Omega h\left(\underline{\theta} - \overline{\theta}\right) \sum_{i=1}^2 \nabla\left(E_{\omega i}\left(t, \boldsymbol{x}, \underline{\theta}\right) - E_{\omega i}\left(t, \boldsymbol{x}, \overline{\theta}\right)\right) \cdot (\Pi \boldsymbol{u}_i)_\omega d\boldsymbol{x} \\ + \int\limits_\Omega h\left(\underline{\theta} - \overline{\theta}\right) \Delta\left(\mathcal{K}_\omega\left(\overline{\theta}\right) - \mathcal{K}_\omega\left(\underline{\theta}\right)\right) d\boldsymbol{x} \\ \leqslant \int\limits_\Omega h\left(\underline{\theta} - \overline{\theta}\right) \left| F_\omega\left(t, \boldsymbol{x}, \underline{\theta}\right) - F_\omega\left(t, \boldsymbol{x}, \overline{\theta}\right)\right| d\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{5.20}$$

где h — функция Хевисайда, т. е.

$$h(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0. \end{cases} \tag{5.21}$$

Заметим, что

$$h\left(\varphi\left(t, \boldsymbol{x}, \underline{\theta}\right) - \varphi\left(t, \boldsymbol{x}, \overline{\theta}\right)\right) = h\left(\underline{\theta} - \overline{\theta}\right) \text{ для всех возрастающих } \varphi\left(t, \boldsymbol{x}, \cdot\right), \tag{5.22}$$

$$\partial\left[h\left(\underline{\theta} - \overline{\theta}\right)\left(\psi(t, \boldsymbol{x}, \underline{\theta}) - \psi(t, \boldsymbol{x}, \overline{\theta})\right)\right] = h\left(\underline{\theta} - \overline{\theta}\right)\left(\partial\psi(t, \boldsymbol{x}, \underline{\theta}) - \partial\psi(t, \boldsymbol{x}, \overline{\theta})\right) \quad \text{для всех} \quad \psi \in C^1, \tag{5.23}$$

[18] Тем самым $\omega \in (0, \min\{1, T, \omega_0\})$.

[19] Т. е. это суб- и супер-решения уравнения (5.3)=(5.13), удовлетворяющие (5.5), а также (5.4) — каждое со своим начальным условием.

$$(5.24)\quad h\left(\underline{\theta}-\overline{\theta}\right)\left|F_\omega\left(t,\boldsymbol{x},\underline{\theta}\right)-F_\omega\left(t,\boldsymbol{x},\overline{\theta}\right)\right|\leqslant \\ \leqslant B_{62}h\left(\underline{\theta}-\overline{\theta}\right)\sum_{i=1}^{2}\left(E_{\omega i}\left(t,\boldsymbol{x},\underline{\theta}\right)-E_{\omega i}\left(t,\boldsymbol{x},\overline{\theta}\right)\right),$$

где $B_{62}=B_{62}\Big(\Big\{\|(\Pi(p_{\theta i}(\rho_i)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i))_\omega\|_{L_\infty(Q_T)}\Big\},\Big\{\|(\Pi\rho_i)_\omega\|_{L_\infty(Q_T)}\Big\},$
$\Big\{\|\mathrm{div}(\Pi\boldsymbol{u}_i)_\omega\|_{L_\infty(Q_T)}\Big\},\ \|\underline{\theta}\|_{L_\infty(Q_T)},\|\overline{\theta}\|_{L_\infty(Q_T)},\ \Big\{\inf_{Q_T}(\Pi\rho_i)_\omega\Big\},\ m,\ c_6\Big),$
а также, что[20]

$$(5.25)\quad \int_\Omega h\left(\underline{\theta}-\overline{\theta}\right)\Delta\left(\mathcal{K}_\omega\left(\underline{\theta}\right)-\mathcal{K}_\omega\left(\overline{\theta}\right)\right)d\boldsymbol{x}\leqslant \\ \leqslant\int_{\partial\Omega}h\left(\underline{\theta}-\overline{\theta}\right)\nabla\left(\mathcal{K}_\omega\left(\underline{\theta}\right)-\mathcal{K}_\omega\left(\overline{\theta}\right)\right)\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma\leqslant 0.$$

Поэтому из (5.20) после интегрирования от 0 до t с учетом (5.22) и (5.23) получаем неравенство

$$(5.26)\quad v\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega h\left(\underline{\theta}-\overline{\theta}\right)\left(\int_{\overline{\theta}}^{\underline{\theta}}(c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(z))dz\right)d\boldsymbol{x}+ \\ +\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega h\left(\underline{\theta}-\overline{\theta}\right)\left(E_{\omega i}\left(t,\boldsymbol{x},\underline{\theta}\right)-E_{\omega i}\left(t,\boldsymbol{x},\overline{\theta}\right)\right)d\boldsymbol{x}\leqslant \\ \leqslant B_{63}\left(B_{62},\left\{\|\mathrm{div}(\Pi\boldsymbol{u}_i)_\omega\|_{L_\infty(Q_T)}\right\}\right)\times \\ \times\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\int_\Omega h\left(\underline{\theta}-\overline{\theta}\right)\left(E_{\omega i}\left(\tau,\boldsymbol{x},\underline{\theta}\right)-E_{\omega i}\left(\tau,\boldsymbol{x},\overline{\theta}\right)\right)d\boldsymbol{x}d\tau,$$

откуда непосредственно следует (5.19).

Из (5.19) следует единственность решения задачи (5.3)–(5.5) и оценка (см. (5.16))

$$(5.27)\qquad 0\leqslant\theta(t,\boldsymbol{x})\leqslant\overline{\theta},\quad\forall\overline{\theta}\in\left(\max\left\{1,12(2B_{61})^{\frac{1}{m+1}},\sup_\Omega\theta_0^\delta\right\},\frac{1}{\omega}\right).$$

5.4. **Дальнейшие оценки приближенной температуры θ^ω.** Умножим уравнение (5.3)=(5.13) на θ и проинтегрируем результат по Q_t, получим равенство

[20]Первое неравенство здесь выводится применением (5.22) к $\varphi(t,\boldsymbol{x},\theta)=\mathcal{K}_\omega(\theta)$ и Леммы 17 из раздела 6.4 к функции $v=\mathcal{K}_\omega(\underline{\theta})-\mathcal{K}_\omega(\overline{\theta})$, второе неравенство следует из (5.5) и монотонности $[L^\delta(t,\boldsymbol{x},\cdot)]^\omega$ (см. (4.10) и (5.10)).

$$(5.28)\quad \sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \theta\frac{\partial\theta}{\partial\tau}((\Pi\rho_i)_\omega+\upsilon)(c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(\theta))\,d\boldsymbol{x}d\tau+ \\ +\int\limits_0^t\int\limits_\Omega (k)_\omega(\pi_\omega(\theta))|\nabla\theta|^2\,d\boldsymbol{x}d\tau- \\ -\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega (\Pi\rho_i)_\omega\left(\int\limits_0^\theta (c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(z))dz\right)(\Pi\boldsymbol{u}_i)_\omega\cdot\nabla\theta\,d\boldsymbol{x}d\tau+ \\ +\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega}\theta L^\delta(t,\boldsymbol{x},\pi_\omega(\theta))\,d\sigma d\tau=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \theta F_{(1)}\,d\boldsymbol{x}d\tau,$$

в котором обозначено

$$(5.29)\quad F_{(1)}=-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial(\Pi\rho_i)_\omega}{\partial\tau}\left(\int\limits_0^\theta (c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(z))dz\right) \\ +\Big((1-\delta)\sum_{i=1}^{2}\Pi\left(\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)\right)+a\Pi\left(|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2\right)\Big)_\omega \\ +(\Pi\rho)_\omega g^\delta-\theta\sum_{i=1}^{2}(\Pi(p_{\theta i}(\rho_i)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i))_\omega-\delta(\pi_\omega(\theta)-\pi_\omega(0))^{m+1},$$

причем

$$(5.30)\quad \|F_{(1)}\|_{L_\infty(Q_T)} \\ \leqslant B_{64}\Big(\left\{\|\rho_i\|_{L_\infty(Q_T)}\right\},\left\{\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\right\},\left\{\|\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)\|_{L_\infty(Q_T)}\right\}, \\ \|g^\delta\|_{L_\infty(Q_T)},\left\{\|p_{\theta i}(\rho_i)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i)\|_{L_\infty(Q_T)}\right\},\left\{\left\|\frac{\partial\rho_i}{\partial t}\right\|_{L_\infty(Q_T)}\right\},c_6,\,m,\,a,\,\overline{\theta}\Big).$$

После умножения уравнения (5.13) на $\dfrac{\partial\mathcal{K}_\omega(\theta)}{\partial t}$ и интегрирования по Q_t получаем

$$(5.31)\quad \frac{1}{2}\int\limits_\Omega|\nabla\mathcal{K}_\omega(\theta)|^2\,d\boldsymbol{x}+\int\limits_{\partial\Omega}\left(\int\limits_0^\theta (k)_\omega(\pi_\omega(z))L^\delta(t,\boldsymbol{x},\pi_\omega(z))dz\right)d\sigma+ \\ +\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega((\Pi\rho_i)_\omega+\upsilon)(c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(\theta))(k)_\omega(\pi_\omega(\theta))\left|\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right|^2\,d\boldsymbol{x}d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\int_\Omega (\Pi\rho_i)_\omega(c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(\theta))(\Pi\boldsymbol{u}_i)_\omega\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\cdot\nabla\mathcal{K}_\omega(\theta)\,d\boldsymbol{x}d\tau =$$

$$=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla\mathcal{K}_\omega(\theta_0^\delta)|^2\,d\boldsymbol{x}+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^\theta(k)_\omega(\pi_\omega(z))\frac{\partial}{\partial\tau}L^\delta(\tau,\boldsymbol{x},\pi_\omega(z))dz\right)d\sigma d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_\Omega F_{(2)}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\,d\boldsymbol{x}d\tau,$$

где

(5.32)

$$F_{(2)}=(k)_\omega(\pi_\omega(\theta))\left(F_{(1)}-\sum_{i=1}^{2}\left(\int_0^\theta(c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(z))dz\right)\operatorname{div}\left((\Pi\rho_i)_\omega(\Pi\boldsymbol{u}_i)_\omega\right)\right),$$

$$\|F_{(2)}\|_{L_\infty(Q_T)}\leqslant B_{65}\Big(B_{64},\,\left\{\|\rho_i\|_{L_\infty(Q_T)}\right\},\,\left\{\|\nabla\rho_i\|_{L_\infty(Q_T)}\right\},\,\left\{\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\right\},\,\left\{\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i)\|_{L_\infty(Q_T)}\right\},\,c_5,\,c_6,\,m,\,\overline{\theta}\Big). \tag{5.33}$$

Наконец, складывая (5.28) и (5.31), приходим к равенству

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla\mathcal{K}_\omega(\theta)|^2\,d\boldsymbol{x}+\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^\theta(k)_\omega(\pi_\omega(z))L^\delta(t,\boldsymbol{x},\pi_\omega(z))dz\right)d\sigma+ \tag{5.34}$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\int_\Omega((\Pi\rho_i)_\omega+\upsilon)(c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(\theta))(k)_\omega(\pi_\omega(\theta))\left|\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right|^2\,d\boldsymbol{x}d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_\Omega(k)_\omega(\pi_\omega(\theta))|\nabla\theta|^2\,d\boldsymbol{x}d\tau+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\theta L^\delta(\tau,\boldsymbol{x},\pi_\omega(\theta))\,d\sigma d\tau=$$

$$=-\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\int_\Omega(\Pi\rho_i)_\omega(c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(\theta))(\Pi\boldsymbol{u}_i)_\omega\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\cdot\nabla\mathcal{K}_\omega(\theta)\,d\boldsymbol{x}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla\mathcal{K}_\omega(\theta_0^\delta)|^2\,d\boldsymbol{x}+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^\theta(k)_\omega(\pi_\omega(z))\frac{\partial}{\partial\tau}L^\delta(\tau,\boldsymbol{x},\pi_\omega(z))dz\right)d\sigma d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_\Omega F_2\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\,d\boldsymbol{x}d\tau+\int_0^t\int_\Omega\theta F_1\,d\boldsymbol{x}d\tau-\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\int_\Omega((\Pi\rho_i)_\omega+\upsilon)(c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(\theta))\theta\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\,d\boldsymbol{x}d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\int_\Omega(\Pi\rho_i)_\omega\left(\int_0^\theta(c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(z))dz\right)(\Pi\boldsymbol{u}_i)_\omega\cdot\nabla\theta\,d\boldsymbol{x}d\tau,$$

откуда, используя элементарные неравенства и лемму Гроноулла, приходим к равномерной по ω оценке

$$\|\theta\|_{L_\infty\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)} + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial t}\right\|_{L_2(Q_T)} \leqslant B_{66}, \tag{5.35}$$

где $B_{66} = B_{66}\Big(B_{64},\, B_{65},\, \|\nabla\theta_0^\delta\|_{L_\infty(\Omega)},\, \Big\{\inf\limits_\Omega \rho_{0i}^\delta\Big\},\, \big\{\|\rho_i\|_{L_\infty(Q_T)}\big\},\, \big\{\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\big\},$ $\big\{\|\operatorname{div}\boldsymbol{u}_i\|_{L_1(0,T;L_\infty(\Omega))}\big\},\, \left\|\dfrac{\partial L^\delta}{\partial t}\right\|_{C\left([0,T]\times\partial\Omega\times\left[0,\overline{\theta}+1\right]\right)},\, c_5,\, c_6,\, \overline{\theta},\, T, \Omega\Big)$.

Тогда, благодаря классическим оценкам решений эллиптических уравнений (см. [1], Теорема 15.2, стр. 704, [40], стр. 139), из уравнения (5.13) следует, что[21]

$$\|\mathcal{K}_\omega(\theta)\|_{L_2\left(0,T;W_2^2(\Omega)\right)} \leqslant B_{67}, \tag{5.36}$$

где

$$B_{67} = B_{67}\Big(B_{64},\, B_{66},\, \big\{\|\rho_i\|_{L_\infty(Q_T)}\big\},\, \big\{\|\nabla\rho_i\|_{L_\infty(Q_T)}\big\},\, \big\{\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\big\},$$
$$\big\{\|\operatorname{div}\boldsymbol{u}_i)\|_{L_\infty(Q_T)}\big\},\, c_5,\, c_6,\, T,\, m,\, \overline{\theta},\, \Omega,$$
$$\big\|L^\delta\big\|_{C\left([0,T]\times\partial\Omega\times\left[0,\overline{\theta}+1\right]\right)},\, \big\|\nabla_{\boldsymbol{x}}L^\delta\big\|_{C\left([0,T]\times\partial\Omega\times\left[0,\overline{\theta}+1\right]\right)},\, \big\|\partial_3 L^\delta\big\|_{C\left([0,T]\times\partial\Omega\times\left[0,\overline{\theta}+1\right]\right)}\Big).$$

5.5. **Компактность θ^ω.** Ввиду оценок (5.27) и (5.35), из семейства[22] θ^ω, $\omega \in (0,\omega_0)$ (см. (5.17)), может быть выделена последовательность (которую мы обозначим так же), для которой при $\omega \to 0$ имеют место сходимости

$$\theta^\omega \to \theta \quad * - \text{слабо в } L_\infty\big(0,T;W_2^1(\Omega)\big) \text{ и в } L_\infty(Q_T), \tag{5.37}$$

$$\frac{\partial\theta^\omega}{\partial t} \to \frac{\partial\theta}{\partial t} \ \text{ слабо в } \ L_2(Q_T). \tag{5.38}$$

Далее, из (5.35) получаем, что

$$\left\|\frac{\partial\theta^\omega}{\partial t}\right\|_{L_2\left(0,T;W_2^{-1}(\Omega)\right)} \leqslant B_{66}. \tag{5.39}$$

Таким образом, последовательность θ^ω равностепенно непрерывна по $t \in [0,T]$ со значениями в $W_2^{-1}(\Omega) = \Big(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\Big)^*$ (верхний индекс $*$ означает сопряжение). Тогда благодаря (5.27) приходим (см. [34], Лемма 6.2, стр. 301) к сходимости (выделяя подпоследовательность и переобозначая ее так же)

$$\theta^\omega \to \theta \ \text{ при } \ \omega \to 0 \ \text{ сильно в } \ C\big([0,T]; L_{\sigma_{16},\mathrm{weak}}(\Omega)\big), \quad \forall\, \sigma_{16} < \infty. \tag{5.40}$$

Т. к. имеют место вложения (символы $\hookrightarrow$ и $\hookrightarrow\!\!\!\hookrightarrow$ здесь и далее обозначают соответственно непрерывное и компактное вложения пространств)

$$W_2^1(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow W_2^{-1}(\Omega),$$

[21] Из (5.36) можно вывести оценку $\Delta\theta$ в $L_1(0,T,L_2(\Omega))$, а значит оценку θ в $L_1(0,T,W_2^2(\Omega))$. Для этого достаточно заметить что $\theta = \mathcal{K}_\omega^{-1}\left(\mathcal{K}_\omega(\theta)\right)$ и воспользоваться свойствами $\mathcal{K}_\omega$. Однако эти оценки зависят от q и потому мало полезны в будущем.

[22] Отныне индекс ω у θ^ω будем писать.

последовательность $\{\theta^\omega\}$ ограничена в $L_\infty(Q_T)\bigcap L_\infty\big(0,T;W_2^1(\Omega)\big)$, а $\left\{\dfrac{\partial\theta^\omega}{\partial t}\right\}$ ограничена в $L_2\big(0,T;W_2^{-1}(\Omega)\big)$, то, выбрав подходящую подпоследовательность и переобозначив ее так же, получаем[23], что при $\omega\to 0$

$$\theta^\omega\to\theta \ \text{ сильно в } \ L_{\sigma_{17}}\big(0,T;L_2(\Omega)\big),\quad \forall\sigma_{17}\in[1,+\infty), \tag{5.41}$$

а значит

$$\mathcal{K}_\omega(\theta^\omega)\to\mathcal{K}(\theta) \ \text{ сильно в } \ L_{\sigma_{17}}\big(0,T;L_2(\Omega)\big). \tag{5.42}$$

В силу вложений $W_2^2(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow W_2^1(\Omega)\hookrightarrow W_2^{-1}(\Omega)$, ограниченности $\{\mathcal{K}_\omega(\theta^\omega)\}$ в $L_\infty\big(0,T;W_2^1(\Omega)\big)\bigcap L_2\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big)$, а $\left\{\dfrac{\partial\mathcal{K}_\omega(\theta^\omega)}{\partial t}\right\}$ — в $L_2\big(0,T;W_2^{-1}(\Omega)\big)$, можно выбрать подпоследовательность и переобозначив ее так же, получить (по теореме Лионса—Обена), что при $\omega\to 0$

$$\mathcal{K}_\omega(\theta^\omega)\to\mathcal{K}(\theta) \ \text{ сильно в } \ L_{\sigma_{18}}\big(0,T;W_2^1(\Omega)\big),\quad \forall\sigma_{18}\in[1,+\infty). \tag{5.43}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\mathcal{K}_\omega(\theta^\omega)\to\mathcal{K}(\theta)$ при $\omega\to 0$ сильно в $L_{\sigma_{18}}\left(0,T;W_2^{\frac12}(\partial\Omega)\right)$, а поэтому $\theta^\omega\to\theta$ при $\omega\to 0$ сильно в $L_{\sigma_{18}}\left(0,T;L_4(\partial\Omega)\right)$. Наконец, поскольку имеют место вложения

$$W_2^2(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow W_2^{\sigma_{19}}(\Omega)\hookrightarrow L_2(\Omega),\quad \forall\sigma_{19}\in[0,2),$$

последовательность $\{\mathcal{K}_\omega(\theta^\omega)\}$ ограничена в $L_2\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big)$, $\left\{\dfrac{\partial\mathcal{K}_\omega(\theta^\omega)}{\partial t}\right\}$ — в $L_2\left(Q_T\right)$, то (выбрав подходящую подпоследовательность и переобозначив ее так же) получаем (по теореме Лионса—Обена), что при $\omega\to 0$

$$\mathcal{K}_\omega(\theta^\omega)\to\mathcal{K}(\theta) \ \text{ сильно в } \ L_{\sigma_{20}}\big(0,T;W_2^{\sigma_{19}}(\Omega)\big),\quad \forall\sigma_{20}\in[0,2). \tag{5.44}$$

Из (5.44) следует, что $\nabla\mathcal{K}_\omega(\theta^\omega)\to\nabla\mathcal{K}(\theta)$ при $\omega\to 0$ сильно в $L_{\sigma_{20}}\left(0,T;W_2^{\sigma_{19}-\frac32}(\partial\Omega)\right)$ при $\sigma_{19}\geqslant\dfrac32$, а значит $\nabla\mathcal{K}_\omega(\theta^\omega)\to\nabla\mathcal{K}(\theta)$ при $\omega\to 0$ сильно в $L_{\sigma_{20}}\left(0,T;L_{\sigma_{21}}(\partial\Omega)\right)$, $1\leqslant\sigma_{21}\leqslant\dfrac{4}{5-2\sigma_{19}}$. В заключение отметим, что из оценки (5.36) следует, что $\Delta\mathcal{K}_\omega(\theta^\omega)\to\Delta\mathcal{K}(\theta)$ при $\omega\to 0$ слабо в $L_2(Q_T)$.

5.6. **Выражение температуры через скорости и ее оценки.** Благодаря полученным выше сходимостям можно заключить, что предельная функция θ вместе с $\boldsymbol{u}_i\in C([0,T];X_q)$, $\rho_i=\mathcal{S}_i(\boldsymbol{u}_i)$, $i=1,2$, принадлежащая пространству

$$Y_{[0,T]}=\Big\{\theta\;\Big|\;\ \frac{\partial\theta}{\partial t}\in L_2(Q_T),\quad \theta\in L_\infty(Q_T)\bigcap L_\infty\big(0,T;W_2^1(\Omega)\big),$$
$$\theta\geqslant 0,\quad \mathcal{K}(\theta)\in L_2\left(0,T;W_2^2(\Omega)\right)\Big\},$$

является единственным[24] сильным решением задачи (4.5)–(4.7). Кроме того, оператор $\Theta:\mathbf{u}\mapsto\theta$, $\mathbf{u}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$, решения задачи (4.5)–(4.7), где $\rho_i=\mathcal{S}_i(\boldsymbol{u}_i)$, $i=1,2$, переводит ограниченное множество из $C([0,T];X_q^2)$ в ограниченное множество из $Y_{[0,T]}$.

---

[23] См. [34], Теорема 1.71, стр. 59 — Теорема Лионса–Обена.

[24] Единственность получается по той же схеме что и для (5.3)–(5.5), т. е. проверкой свойства [(5.18)$\Longrightarrow$(5.19)] (достаточно убедиться что все выкладки сохраняют силу).

Проводя рассуждения аналогично выводу (5.16) и (5.27), но уже для (4.5) вместо (5.3), выводим оценку

$$\theta \leqslant B_{68}\Big(\Big\{\|\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)\|_{L_\infty(Q_T)}\Big\},\ \Big\{\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\Big\},\ \Big\{\|\rho_i\|_{L_\infty(Q_T)}\Big\},$$
$$\big\|g^\delta\big\|_{L_\infty(Q_T)},\ a,\ m,\ c_6, \delta,\ \Big\{\|p_{\theta i}(\rho_i)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\Big\},\ \Big\{\|\Delta\rho_i\|_{L_\infty(Q_T)}\Big\},\ \sup_\Omega \theta_0^\delta\Big). \tag{5.45}$$

5.7. **Формулировка оператора решения Задачи $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,\upsilon}$ и его свойства.** Нам предстоит доказать, что существуют $\tau_0 \in (0,T)$ и $\boldsymbol{u}_i \in C([0,\tau_0];X_q)$, $i=1,2$, удовлетворяющие уравнениям (4.14), в которых вместо T стоит τ_0, а $\rho_i = \mathcal{S}_i(\boldsymbol{u}_i)$, $i=1,2$, $\theta=\Theta(\mathbf{u})$. Для этого рассмотрим при всех $t\in[0,T]$ отображение[25]

$$\Psi:\ C\big([0,t];X_q^2\big)\to C\big([0,t];X_q^2\big),\quad \Psi(\mathbf{u})(t) = (\mathcal{T}_1(\mathbf{u})(t), \mathcal{T}_2(\mathbf{u})(t)),$$

$$\mathcal{T}_i(\mathbf{u})(t) = \mathcal{M}^{-1}_{\rho_i(t)}\left(P_q\rho_{0i}\boldsymbol{u}_{0i} + \int\limits_0^t P_q\mathcal{N}_i(\mathbf{u})(s)ds\right),\quad i=1,2, \tag{5.46}$$

где $\mathcal{N}_i(\mathbf{u}) = \mathrm{div}\,\mathbb{S}_i - \nabla p_i(\rho_i,\theta) - \mathrm{div}\,(\rho_i\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{u}_i) - \varepsilon(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)^*\nabla\rho_i + \boldsymbol{J}_i + \rho_i\boldsymbol{f}_i$, $\rho_i = \mathcal{S}_i(\boldsymbol{u}_i)$, $i=1,2$, $\theta=\Theta(\mathbf{u})$.

Отметим сначала, что благодаря эквивалентности норм в конечномерном пространстве X_q справедливы неравенства

$$\|P_q\mathcal{N}_i(\mathbf{u})\|_{X_q} \leqslant B_{69}\Big(\sum_{j=1}^2\|\boldsymbol{u}_j\|_{X_q} + \|\rho_i\|_{L_\infty(\Omega)}\|\boldsymbol{u}_i\|^2_{X_q} +$$
$$+\varepsilon\|\rho_i\|_{L_\infty(\Omega)}\|\boldsymbol{u}_i\|_{X_q} + \|\rho_i\|^\gamma_{L_\infty(\Omega)} + \|\theta\|_{L_\infty(\Omega)}\|\rho_i\|^{\frac{\gamma}{3}}_{L_\infty(\Omega)} +$$
$$+\|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\rho_i\|_{L_\infty(\Omega)}\Big)\quad \forall\, t\in[0,T],\quad i=1,2, \tag{5.47}$$

где положительная постоянная B_{69} зависит от c_2, c_3, c_4, $\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\}$, $\{\|\boldsymbol{\psi}_i\|_{W_2^2(\Omega)}\}$, a, q, γ, $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{M}$ и Ω. Далее, нетрудно проверить, что при всех $t\in[0,T]$ верно

$$\|\mathcal{M}^{-1}_{\rho_i(t)}\|_{\mathcal{L}(X_q,X_q)} \leqslant \Big(\inf_\Omega\rho^\delta_{0i}\Big)^{-1}\exp\Big(\|\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_i\|_{L_1(0,t;L_\infty(\Omega))}\Big),\quad i=1,2. \tag{5.48}$$

Кроме того, т. к. для любых $\rho_i^k = \mathcal{S}_i(\boldsymbol{u}_i^k)$, $k=1,2$, верно представление

$$\mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^1(t)} - \mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^2(t)} = \mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^2(t)}(\mathcal{M}_{\rho_i^2(t)} - \mathcal{M}_{\rho_i^1(t)})\mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^1(t)},$$

[25] Уравнение (5.46) получается из (4.11), (4.12) при $T:=\tau_0$ после интегрирования от 0 до t, где $t<\tau_0$, и применения P_q.

то при всех $t \in [0,T]$, $i = 1,2$

$$(5.49)\quad \|\mathcal{M}^{-1}_{\rho^1_i(t)} - \mathcal{M}^{-1}_{\rho^2_i(t)}\|_{\mathcal{L}(X_q,X_q)} \leqslant$$

$$\leqslant B_{70}(q)\left(\inf_\Omega \rho^\delta_{0i}\right)^{-2} \exp\left(\sum_{k=1}^2 \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}^k_i\|_{L_1(0,t;L_\infty(\Omega))}\right) \|(\rho^1_i - \rho^2_i)(t)\|_{L_1(\Omega)}.$$

5.8. **Построение неподвижной точки оператора и локального решения Задачи $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,\upsilon}$.**

5.8.1. *Отображение шара в себя.* Покажем, что при некотором $\tau_0 \in (0,T]$ оператор Ψ отображает множество

$$B_{R,\tau_0} = \left\{\mathbf{u} \in C([0,\tau_0];X^2_q) \mid \|\mathbf{u}\|_{C([0,\tau_0];X^2_q)} \leqslant R\right\}$$

в себя (при этом $R > R^*$, что не ограничивает общность, а R^* будет выбрано ниже). Благодаря (5.1), (5.47), второму свойству $\mathcal{S}_i$ и ограниченности оператора Θ (см. (5.45)), имеем для всех $\mathbf{u} \in B_{R,\tau_0}$

$$\|\Psi(\mathbf{u})\|_{C([0,\tau_0];X^2_q)} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant\tau_0} \sum_{i=1}^2 \|\mathcal{M}^{-1}_{\rho_i(t)}\|_{\mathcal{L}(X_q,X_q)}\Big(\|P_q\rho_{0i}\boldsymbol{u}_{0i}\|_{X_q} + \int_0^t \|P_q\mathcal{N}_i(\mathbf{u})(s)\|_{X_q}ds\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^2 \big(\inf_\Omega \rho^\delta_{0i}\big)^{-1} e^{B_{71}\tau_0 R}\Big(B_{72}\big(\sup_\Omega \rho^\delta_{0i}\big)\|\boldsymbol{u}_{0i}\|_{L_\infty(\Omega)} +$$

$$+\tau_0 B_{69}\big\{2R + 2R^2\big(\sup_\Omega \rho^\delta_{0i}\big)e^{B_{71}\tau_0 R} + R\big(\sup_\Omega \rho^\delta_{0i}\big)e^{B_{71}\tau_0 R} + \big(\sup_\Omega \rho^\delta_{0i}\big)^\gamma e^{B_{71}\tau_0 R\gamma} +$$

$$+B_{73}\big(\sup_\Omega \rho^\delta_{0i}\big)^{\frac{\gamma}{3}} e^{\frac{B_{71}\tau_0 R\gamma}{3}} + B_{73} + \big(\sup_\Omega \rho^\delta_{0i}\big)e^{B_{71}\tau_0 R}\big\}\Big) \leqslant \frac{R}{2},$$

где[26] $B_{71} = B_{71}\big(q, \{\|\boldsymbol{\psi}_i\|_{W^2_\infty(\Omega)}\}, \Omega\big)$, $B_{72} = B_{72}(\Omega)$,

$$B_{73} = B_{73}\Big(B_{58}, c_4, c_6, \|g^\delta\|_{C(\overline{Q}_T)}, \{\|\boldsymbol{\psi}_i\|_{W^1_\infty(\Omega)}\}, a, q, \gamma, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}, \delta, \Omega, R, m,$$

$$\{\sup_\Omega \rho^\delta_{0i}\}, \sup_\Omega \theta^\delta_0, e^{B_{71}\tau_0 R}, e^{\frac{B_{71}\tau_0 R\gamma}{3}}\Big),$$

при подходящем выборе $R^*\Big(B_{72}, \big\{\|\boldsymbol{u}_{0i}\|_{L_\infty(\Omega)}\big\}, \{\inf_\Omega \rho^\delta_{0i}\}, \{\sup_\Omega \rho^\delta_{0i}\}\Big)$ и при всех

$$\tau_0 < B_{74}(B_{69}, B_{71}, R^*, T, \{\inf_\Omega \rho^\delta_{0i}\}, \text{аргументы } B_{73} \text{ кроме } R \text{ и двух последних}),$$

т. е. отображение Ψ переводит B_{R,τ_0} в себя.

---

[26] $B_{73} = B_{68}$ с переформулированными аргументами.

5.8.2. *Непрерывность оператора.* Установим непрерывность отображения Ψ. Выберем произвольно $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2 \in B_{R,\tau_0}$ и заметим, что при $i = 1, 2$

$$\mathcal{T}_i(\mathbf{u}^1)(t) - \mathcal{T}_i(\mathbf{u}^2)(t) = \big(\mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^1(t)} - \mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^2(t)}\big)\left[P_q\rho_{0i}\boldsymbol{u}_{0i} + \int\limits_0^t P_q\mathcal{N}_i(\mathbf{u}^1)(s)\,ds\right] +$$

$$+\mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^2(t)}\int\limits_0^t P_q(\mathcal{N}_i(\mathbf{u}^1)(s) - \mathcal{N}_i(\mathbf{u}^2)(s))\,ds,$$

где $\rho_i^k = \mathcal{S}_i(\boldsymbol{u}_i^k)$, $\theta^k = \Theta(\mathbf{u}^k)$, $i, k = 1, 2$, откуда, используя (5.1), (5.47), (5.48), (5.49) и (5.45) (при замене B_{68} на B_{73}), получаем при $i = 1, 2$

$$\|\mathcal{T}_i(\mathbf{u}^1) - \mathcal{T}_i(\mathbf{u}^2)\|_{C([0,\tau_0];X_q)} \leqslant B_{75}\Big(\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i^1 - \rho_i^2\|_{C([0,\tau_0];L_2(\Omega))} + \tag{5.50}$$
$$+\|\theta^1 - \theta^2\|_{C([0,\tau_0];L_2(\Omega))} + \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\|_{C([0,\tau_0];X_q^2)}\Big),$$

где B_{75} зависит от[27] B_{69}, B_{70}, B_{73}, $\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\}$, $\big\{\|\boldsymbol{u}_{0i}\|_{L_\infty(\Omega)}\big\}$, $\{\sup\limits_\Omega \rho_{0i}^\delta\}$, $\{\inf\limits_\Omega \rho_{0i}^\delta\}$, $\{\|p'_{\theta i}\|_{C[0,B_{76}]}\}$, $\{\|\boldsymbol{\psi}_i\|_{W^2_\infty(\Omega)}\}$, R, T, c_2, c_3, c_4, a, q, γ, $\boldsymbol{\Lambda}$, $\mathbf{M}$ и Ω, а $B_{76} = B_{76}\big(\{\sup\limits_\Omega \rho_{0i}^\delta\}, T, R, q, \{\|\mathrm{div}\boldsymbol{\psi}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\}\big)$. Пусть $B_{R,\tau_0} \ni \mathbf{u}^n \to \mathbf{u}$ (ясно, что $\mathbf{u} \in B_{R,\tau_0}$) при $n \to +\infty$ сильно в пространстве $C([0,\tau_0]; X_q^2)$. Обозначим $\rho_i^n = \mathcal{S}_i(\boldsymbol{u}_i^n)$, $\rho_i = \mathcal{S}_i(\boldsymbol{u}_i)$. По свойству 2 операторов $\mathcal{S}_i$

$$\|\rho_i^n - \rho_i\|_{C([0,\tau_0];L_2(\Omega))} \to 0 \text{ при } n \to +\infty. \tag{5.51}$$

Обозначим $\theta^n = \Theta(\mathbf{u}^n)$, $\theta = \Theta(\mathbf{u})$. Для θ^n — решения задачи (4.5)–(4.7), где вместо $\boldsymbol{u}_i$ стоит $\boldsymbol{u}_i^n$, а вместо $\rho_i = \mathcal{S}_i(\boldsymbol{u}_i)$ стоит $\rho_i^n = \mathcal{S}_i(\boldsymbol{u}_i^n)$, $i = 1, 2$ — справедливы равномерные по n оценки в $Y_{[0,\tau_0]}$ (см. (5.35), (5.36), (5.45)). Это позволяет выделить подпоследовательность (обозначим ее так же) $\theta^n \to \theta^*$, сходящуюся в нормах $Y_{[0,\tau_0]}$, поэтому θ^* является решением той же задачи что и θ, а значит (в силу единственности) $\theta^* = \theta$. Поскольку $\{\theta^n\}$ равномерно по n ограничены в $L_\infty\big(0,\tau_0; W_2^1(\Omega)\big) \bigcap W_2^1\big(0,\tau_0; L_2(\Omega)\big)$ и имеет место интерполяционное неравенство

$$\|f\|_{W_2^{1-\sigma_{22}}(\Omega)} \leqslant B_{77}\|f\|^{1-\sigma_{22}}_{W_2^1(\Omega)}\|f\|^{\sigma_{22}}_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, f \in W_2^1(\Omega),\ \sigma_{22} \in (0,1)$$

(см., например, [2], Лемма 2.2, стр. 25), то согласно Теореме 1.72 из [34] (стр. 59) можно заключить, что (выделяя подпоследовательность и переобозначая ее так же) $\theta^n \to \theta$ при $n \to +\infty$ сильно в $C\big([0,\tau_0], W_2^{1-\sigma_{22}}(\Omega)\big)$, что позволяет заключить

$$\|\theta^n - \theta\|_{C([0,\tau_0];L_2(\Omega))} \to 0 \text{ при } n \to +\infty. \tag{5.52}$$

Стандартными рассуждениями показывается что (5.52) имеет место для всей последовательности. Таким образом, учитывая (5.50), (5.51), (5.52) можно сделать вывод о том, что отображение Ψ непрерывно.

---

[27]Отметим, что у постоянной B_{73} два последних аргумента исчезают за счет подходящего выбора малости τ_0.

5.8.3. *Компактность оператора и существование неподвижной точки.* Пусть $\mathbf{u}$ пробегает ограниченное множество $U \subset C([0,\tau_0]; X_q^2)$. В силу свойств оператора $\mathcal{M}_\xi$ (см. [34], стр. 352–353) имеем

$$\frac{\partial \mathcal{T}_i(\mathbf{u})}{\partial t} = -\mathcal{M}_{\rho_i(t)}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\partial \rho_i}{\partial t}(t)} \mathcal{M}_{\rho_i(t)}^{-1} \left(P_q \rho_{0i} \boldsymbol{u}_{0i} + \int\limits_0^t P_q \mathcal{N}_i(\mathbf{u})(s) ds \right) +$$

$$+\mathcal{M}_{\rho_i(t)}^{-1} P_q \mathcal{N}_i(\mathbf{u})(t), \quad i = 1, 2,$$

и, ввиду ограниченности ρ_i в $V_{[0,\tau_0]}$, $i = 1, 2$, а θ в $Y_{[0,\tau_0]}$, получаем ограниченность $\mathcal{T}_i(\mathbf{u})$, $i = 1, 2$, в пространстве $C^1([0,\tau_0]; X_q)$, что означает предкомпактность $\Psi(U)$ в пространстве $C\big([0,\tau_0]; X_q^2\big)$ (по теореме Арцела[28]).

Тем самым, выполнены все условия теоремы Шаудера[29] и поэтому оператор Ψ имеет неподвижную точку в B_{R,τ_0} — пару функций $\mathbf{u} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, которая вместе с соответствующими $\rho_i = \mathcal{S}_i(\boldsymbol{u}_i)$, $i = 1, 2$ и $\theta = \Theta(\mathbf{u})$ является искомым решением Задачи $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,\upsilon}$ в цилиндре Q_{τ_0} при достаточно малом $\tau_0 > 0$.

5.9. **Построение глобального решения Задачи $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,\upsilon}$.** Чтобы продолжить построенное локальное решение на весь промежуток времени $[0, T]$, достаточно доказать равномерную по $\tau_0 \in (0, T]$ ограниченность в пространстве $C([0,\tau_0]; X_q)$ решений[30] $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, 2$, уравнений (4.14).

Для этого возьмем в (4.14) в качестве пробных функций $\boldsymbol{\varphi}_i = \chi_i \boldsymbol{u}_i$, $i = 1, 2$, где $\chi_i \in C_0^1[0, T)$, $i = 1, 2$, и получим равенство[31]

$$(5.53) \quad \sum_{i=1}^2 \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2} \rho_i(t) |\boldsymbol{u}_i(t)|^2 + \rho_i(t) P_{ei}(\rho_i)(t) \right) d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^2 \int\limits_{Q_t} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\, d\boldsymbol{x}\, d\tau +$$
$$+ \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int\limits_{Q_t} \frac{p'_{ei}(\rho_i)}{\rho_i} |\nabla \rho_i|^2 \, d\boldsymbol{x}\, d\tau + a \int\limits_{Q_t} |\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2 \, d\boldsymbol{x}\, d\tau =$$
$$= \sum_{i=1}^2 \int\limits_{Q_t} \theta p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \boldsymbol{u}_i \, d\boldsymbol{x}\, d\tau + \sum_{i=1}^2 \int\limits_{Q_t} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i \, d\boldsymbol{x}\, d\tau +$$
$$+ \sum_{i=1}^2 \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2} \rho_{0i}^\delta |\boldsymbol{u}_{0i}|^2 + \rho_{0i}^\delta P_{ei}\left(\rho_{0i}^\delta\right) \right) d\boldsymbol{x} \quad \forall\, t \in [0, T].$$

Далее, проинтегрируем (4.5) по Q_t, сложим результат с (5.53), и получим, что при всех $t \in [0, T]$

[28] См., например, [34], Теорема 1.70, стр. 58.

[29] См., например, [33], стр. 20.

[30] Т. е. априорную оценку в $C([0, T]; X_q)$. Мы это сделаем с помощью энергетической оценки, которая потребуется и далее.

[31] Для этого нужно взять $\chi_i \to \chi_{[0,t]}$ — здесь и далее через χ_U обозначается характеристическая функция множества U.

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\rho_i(t)|\boldsymbol{u}_i(t)|^2+\rho_i(t)P_{ei}(\rho_i)(t)+(\rho_i(t)+\upsilon)Q_i(\theta)(t)\right)d\boldsymbol{x}+ \tag{5.54}$$
$$+\delta\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_t}\mathbb{S}_i:(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_t}\frac{p'_{ei}(\rho_i)}{\rho_i}|\nabla\rho_i|^2\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+$$
$$+\delta\int\limits_{Q_t}\theta^{m+1}\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega}L^{\delta}(\tau,\boldsymbol{x},\theta)\,d\sigma\,d\tau=$$
$$=\int\limits_{Q_t}\rho g^{\delta}\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_t}\rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}\,d\tau+$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\rho_{0i}^{\delta}|\boldsymbol{u}_{0i}|^2+\rho_{0i}^{\delta}P_{ei}\left(\rho_{0i}^{\delta}\right)+(\rho_{0i}^{\delta}+\upsilon)Q_i\left(\theta_0^{\delta}\right)\right)d\boldsymbol{x}.$$

Из (5.54), в свою очередь, благодаря (2.30), (2.37), (2.40), (2.43), (2.44) и (4.1)–(4.3), следует, что

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_t}|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}\,d\tau\leqslant B_{78}\left(1+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_t}\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}\,d\tau\right), \tag{5.55}$$

в котором положительная постоянная B_{78} зависит только от B_0, B_2, B_3, B_4, B_9, B_{10}, $\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\}$, $\|g^{\delta}\|_{L_\infty(Q_T)}$, $\left\{\|\boldsymbol{u}_{0i}\|_{L_\infty(\Omega)}\right\}$, $\left\{\|\rho_{0i}^{\delta}\|_{L_\gamma(\Omega)}\right\}$, $\|\theta_0^{\delta}\|_{L_\infty(\Omega)}$, T, m, γ, δ и $|\Omega|$. Отсюда, используя лемму Гроноулла получаем, что

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}\leqslant B_{79}(B_{78},T), \tag{5.56}$$

а значит, ввиду неравенства Фридрихса, верна оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;X_q)}\leqslant B_{80}\left(B_{78},B_{79},T,\Omega\right). \tag{5.57}$$

Наконец, благодаря (5.1) и (5.57), из (5.56) выводим

$$\|\mathbf{u}\|_{C([0,T];X_q)}\leqslant B_{81}\left(B_{79},B_{80},\{\inf_{\Omega}\rho_{0i}^{\delta}\},\{\|\mathrm{div}\boldsymbol{\psi}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\},T,q\right). \tag{5.58}$$

Эта оценка позволяет[32] продолжить за конечное число шагов построенное выше локальное решение на произвольный конечный промежуток $[0,T]$.

[32] Т. к. длина τ_0 интервала существования локального решения (см. выше) определяется в конечном счете нормой (5.58).

6. Приложение

6.1. **Альтернативный способ получения оценки** (3.37)**.** Умножим уравнение Пуассона в (3.32) на $\varphi\dfrac{d\widetilde{\psi}}{dt}$, $\varphi \in W_2^1(\Omega)$, $\widetilde{\psi} \in C_0^\infty(0,T)$, и проинтегрируем результат по Q_T, получим, используя процедуру ренормализации уравнения (2.1), что

$$(6.1)\qquad \int\limits_{Q_T} \widetilde{\psi}\nabla\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\cdot\nabla\varphi\,d\boldsymbol{x}dt =$$

$$= -\int\limits_{Q_T} \widetilde{\psi}G(\rho_1)\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla\varphi\,d\boldsymbol{x}dt + \int\limits_{Q_T}\widetilde{\psi}\varphi\left(G'(\rho_1)\rho_1 - G(\rho_1)\right)\operatorname{div}\boldsymbol{u}_1 d\boldsymbol{x}dt -$$

$$-\int\limits_{Q_T}\widetilde{\psi}\varphi\left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\left(G'(\rho_1)\rho_1 - G(\rho_1)\right)\operatorname{div}\boldsymbol{u}_1\,d\boldsymbol{x}\right)d\boldsymbol{x}dt =$$

$$= \int\limits_{Q_T}\widetilde{\psi}\varphi\,\operatorname{div}\boldsymbol{g}\,d\boldsymbol{x}dt,$$

где $\boldsymbol{g} = G(\rho_1)\boldsymbol{u}_1 + \mathcal{B}\left(\left(G'(\rho_1)\rho_1 - G(\rho_1)\right)\operatorname{div}\boldsymbol{u}_1\right)$. В силу свойств оператора $\mathcal{B}$ и оценок (3.5), (3.18), (3.19) получаем, что

$$(6.2)\qquad \|\boldsymbol{g}\|_{L_2(Q_T)} \leqslant B_{82}\left(B_{13}, B_{24}, B_{25}, B_{36}, B_{48}, T, \gamma, \Omega\right).$$

Ввиду[33] (3.37) и (6.2), равенство (6.1) имеет место и для $\widetilde{\psi} = \chi_{[t_1,t_2]}$, t_1, $t_2 \in (0,T)$ $(t_1 < t_2)$, что дает равенство

$$(6.3)\qquad \int\limits_{\Omega}\left(\nabla\eta(t_2,\boldsymbol{x}) - \nabla\eta(t_1,\boldsymbol{x})\right)\cdot\nabla\varphi\,d\boldsymbol{x} = -\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{g}\cdot\nabla\varphi\,d\boldsymbol{x}dt.$$

Далее, т. к. произвольную функцию $\boldsymbol{h} \in L_2(\Omega)$ можно представить в виде (см., например, [5]) $\boldsymbol{h} = \nabla\varphi + \boldsymbol{w}$, $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$,

$$\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{w}\cdot\nabla\xi\,d\boldsymbol{x} = 0 \quad \forall\,\xi \in W_2^1(\Omega),$$

и при этом $\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\boldsymbol{h}\|_{L_2(\Omega)}$, $\|\boldsymbol{w}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\boldsymbol{h}\|_{L_2(\Omega)}$, то из (6.3) следует, что

$$(6.4)\qquad \left|\int\limits_{\Omega}\left(\nabla\eta(t_2,\boldsymbol{x}) - \nabla\eta(t_1,\boldsymbol{x})\right)\cdot\boldsymbol{h}\,d\boldsymbol{x}\right| \leqslant \left(\int\limits_{t_1}^{t_2}\|\boldsymbol{g}\|_{L_2(\Omega)}\,dt\right)\|\boldsymbol{h}\|_{L_2(\Omega)},$$

[33]Но (3.37) пока еще не доказано, и в этом здесь проблема. Для гладких решений (доказательство априорных оценок) рассуждение, однако, верно.

что ввиду произвольности $\boldsymbol{h}$ означает

$$\|\nabla\eta(t_2)-\nabla\eta(t_1)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant\int\limits_{t_1}^{t_2}\|\boldsymbol{g}\|_{L_2(\Omega)}\,dt. \tag{6.5}$$

Отсюда, в свою очередь, с помощью неравенства Пуанкаре и (3.32), получаем неравенство

$$\|\eta(t_2)-\eta(t_1)\|_{W_2^1(\Omega)}\leqslant B_{83}(\Omega)\int\limits_{t_1}^{t_2}\|\boldsymbol{g}\|_{L_2(\Omega)}\,dt. \tag{6.6}$$

Теперь мы можем воспользоваться Теоремой 1.4.40 на стр. 15 из [6] и, ввиду (6.2), получить (3.37).

6.2. **О существовании и единственности решения третьей краевой задачи для квазилинейного уравнения параболического типа.** Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\partial\Omega\in C^{2+\sigma_{23}}$, $n\in\mathbb{N}$, $\sigma_{23}\in(0,1)$. Рассмотрим третью краевую задачу для квазилинейного уравнения параболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,\boldsymbol{x},u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+b(t,\boldsymbol{x},u,\nabla u)=0 \quad \text{в} \quad Q_T=(0,T)\times\Omega, \tag{6.7}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,\boldsymbol{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_j}n_i+\psi(t,\boldsymbol{x},u)=0 \quad \text{на} \quad [0,T]\times\partial\Omega, \tag{6.8}$$

$$u|_{t=0}=0, \tag{6.9}$$

где $\boldsymbol{n}=\{n_i\}_{i=1}^n$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Искомой величиной является $u(t,\boldsymbol{x})$, при этом здесь и далее символ ∇ означает градиент по $\boldsymbol{x}$. Далее будем обозначать $\nabla u=\boldsymbol{g}=\{g_i\}_{i=1}^n$. Справедливо следующее утверждение — см. [16], Теорема 7.4, стр. 491.

Теорема 8. *Пусть выполнены следующие условия:*

(I) *величины $a_{ij}(t,\boldsymbol{x},u)$, $b(t,\boldsymbol{x},u,\boldsymbol{g})$ и $\psi(t,\boldsymbol{x},u)$ удовлетворяют неравенствам*

$$0\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\leqslant c_8|\boldsymbol{\xi}|^2 \quad \text{при} \quad (t,\boldsymbol{x},u)\in(0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R},\quad \boldsymbol{\xi}=\{\xi_i\}_{i=1}^n\in\mathbb{R}^n, \tag{6.10}$$

$$-ub\leqslant c_9|\boldsymbol{g}|^2+c_{10}u^2+c_{11} \quad \text{при} \quad (t,\boldsymbol{x},u,\boldsymbol{g})\in(0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \tag{6.11}$$

$$c_{12}|\boldsymbol{\xi}|^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j,\quad -u\psi\leqslant c_{13}u^2+c_{14} \quad \text{при} \quad (t,\boldsymbol{x},u)\in[0,T]\times\partial\Omega\times\mathbb{R},\quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n, \tag{6.12}$$

где c_8, $c_{12}=\mathrm{const}>0$, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{13}, $c_{14}=\mathrm{const}\geqslant 0$;

(II) *при* $(t, \boldsymbol{x}) \in [0,T]\times\overline{\Omega}$, $|u| \leqslant B_{84}$ *и* $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^n$ *величины* $a_{ij}(t, \boldsymbol{x}, u)$, $b(t, \boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{g})$ *и* $\psi(t, \boldsymbol{x}, u)$ *непрерывны по своим аргументам, обладают производными, входящими в условия*

$$c_{15}|\boldsymbol{\xi}|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant c_{16}|\boldsymbol{\xi}|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, \tag{6.13}$$

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial t},\, \nabla a_{ij},\, \frac{\partial a_{ij}}{\partial u},\, \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial t\partial u},\, \nabla\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right),\, \nabla\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}\right),\, \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial u^2}\right| \leqslant c_{16}, \tag{6.14}$$

$$\left|\psi,\, \frac{\partial \psi}{\partial t},\, \nabla\psi,\, \frac{\partial \psi}{\partial u},\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial t\partial u},\, \nabla\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right),\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}\right| \leqslant c_{16}, \tag{6.15}$$

$$\left|b,\, \frac{\partial b}{\partial t},\, \frac{\partial b}{\partial u},\, (1+|\boldsymbol{g}|)\frac{\partial b}{\partial g_i}\right| \leqslant c_{16}(1+|\boldsymbol{g}|^2), \tag{6.16}$$

где c_{15}, $c_{16} = \mathrm{const} > 0$, *и удовлетворяют этим условиям;*

(III) *при* $(t, \boldsymbol{x}) \in [0,T]\times\overline{\Omega}$, $|u| \leqslant B_{84}$, $|\boldsymbol{g}| \leqslant B_{85}$
- $\nabla a_{ij}(t, \boldsymbol{x}, u)$ *непрерывны по* $\boldsymbol{x}$ *в смысле Гёльдера с показателем* σ_{23},
- $\nabla\psi(t, \boldsymbol{x}, u)$ *непрерывна по* t *и* $\boldsymbol{x}$ *в смысле Гёльдера с показателями* $\dfrac{\sigma_{23}}{2}$ *и* σ_{23} *соответственно,*
- $b(t, \boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{g})$ *непрерывна по* $\boldsymbol{x}$ *в смысле Гёльдера с показателем* σ_{23}*;*

(IV) *выполнено условие согласования* $\psi(0, \boldsymbol{x}, 0)|_{\partial\Omega} = 0$.

Тогда задача (6.7)–(6.9) *имеет единственное решение* $u \in C^{1+\frac{\sigma_{23}}{2}, 2+\sigma_{23}}\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big)$.

Замечание 9. *Утверждение Теоремы 8 остается в силе, если* (*см.* [16], *Теорема 7.4, стр. 491*) *вместо* (6.10)–(6.12) *величины* $a_{ij}(t, \boldsymbol{x}, u)$, $b(t, \boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{g})$ *и* $\psi(t, \boldsymbol{x}, u)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (t, \boldsymbol{x}, u) \in (0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\xi} = \{\xi_i\}_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n, \tag{6.17}$$

$$-ub|_{\boldsymbol{g}=0} \leqslant c_{17}u^2 + c_{18} \quad \text{при} \quad (t, \boldsymbol{x}, u) \in (0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}, \tag{6.18}$$

$$-u\psi < 0 \quad \text{при} \quad |u| > 0, \quad (t, \boldsymbol{x}) \in [0,T]\times\partial\Omega, \tag{6.19}$$

где c_{17}, $c_{18} = \mathrm{const} \geqslant 0$.

Замечание 10. *Постоянные* B_{84} *и* B_{85} *берутся из оценок* $|u| \leqslant B_{84}$ *и* $|\nabla u| \leqslant B_{85}$, *справедливых для всех решений задачи* (6.7)–(6.9). *Таким образом, если эти оценки не использовать, то достаточно потребовать выполнения соответствующих условий при* $B_{84} = B_{85} = +\infty$. *Если это слишком обременительно, то нужно обеспечить выполнение этих условий при любых конечных* B_{84}, B_{85}. *При этом следует учесть следующее:*

(1) B_{84} *зависит*
- *в случае условий* (6.10)–(6.12)*: от* T, $\partial\Omega$, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14} *и* c_{16},
- *или, в случае условий* (6.17)–(6.19)*: от* T, c_{17}, c_{18}*;*

(2) B_{85} *зависит от:* $\partial\Omega$, B_{84}, c_{15}, c_{16}*;*

(3) *условия* (6.13)–(6.16) *содержат* c_{16} *и должны быть выполнены при* $|u| \leqslant B_{84}$, *где* (*в случае условий* (6.10)–(6.12)) *в свою очередь величина* B_{84} *зависит от* c_{16}.

Таким образом,

- *в случае условий* (6.10)–(6.12) *существование* B_{84} *и* c_{16} *для конкретной задачи* (6.7)–(6.9) *следует проверять из соответствующих функциональных уравнений* (*см.* [16], *стр. 488, 489*)*;*
- *в случае условий* (6.17)–(6.19) *величина* B_{84} *не зависит от* c_{16}, *так что условия* (6.13)–(6.16) *достаточно проверить для любого конечного* B_{84}.

Замечание 11. *В условиях* (6.10), (6.12) *и* (6.13) (*или* (6.17) *и* (6.13)), *на первый взгляд, повторяются* (*уточняются*) *одни и те же условия на матрицу* $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, *но на самом деле там фигурируют разные значения переменных* $(t, \boldsymbol{x}, u)$.

Замечание 12. *Общий случай* $u|_{t=0} = u_0 \in C^{2+\sigma_{23}}\left(\overline{\Omega}\right)$ *сводится к* (6.9) *заменой* $v(t,\boldsymbol{x}) = u(t,\boldsymbol{x}) - u_0(\boldsymbol{x})$.

6.3. **Проверка условий Теоремы 8 для приближенной задачи с дополнительным параметром** $\boldsymbol{\omega}$**.** Рассмотрим задачу (5.3)–(5.5). Заменой $u = \theta - \theta_0^{\delta,\omega}$ с учетом (5.6) приведем ее к форме (6.7)–(6.9), где

$$a_{ij}(t,\boldsymbol{x},u) = \frac{\left[k\left(u+\theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^{\omega}}{\sum\limits_{i=1}^{2}\left([\rho_i]^{\omega}+\upsilon\right)\left[c_{\theta i}\left(u+\theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^{\omega}}\delta_{ij},$$

$$b(t,\boldsymbol{x},u,\boldsymbol{g}) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{2}\left([\rho_i]^{\omega}+\upsilon\right)\left[c_{\theta i}\left(u+\theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^{\omega}}\left(-\left[k\left(u+\theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^{\omega}\Delta\theta_0^{\delta,\omega}+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\left[Q_i\left(u+\theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^{\omega}\frac{\partial[\rho_i]^{\omega}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}\left[c_{\theta i}\left(u+\theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^{\omega}[\rho_i\boldsymbol{u}_i]^{\omega}\cdot(\boldsymbol{g}+\nabla\theta_0^{\delta,\omega})+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\left[Q_i\left(u+\theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^{\omega}\mathrm{div}([\rho_i\boldsymbol{u}_i]^{\omega})-\left(\left[k\left(u+\theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^{\omega}\right)'\left|\boldsymbol{g}+\nabla\theta_0^{\delta,\omega}\right|^2+$$

$$+\left(u+\theta_0^{\delta,\omega}\right)\sum_{i=1}^{2}[p_{\theta i}(\rho_i)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i]^{\omega}+\delta\left[\left(u+\theta_0^{\delta,\omega}\right)^{m+1}\right]^{\omega}-$$

$$\left.-(1-\delta)\sum_{i=1}^{2}[\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)]^{\omega}-a[|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2]^{\omega}-[\rho g^{\delta}]^{\omega}\right),$$

$$\psi(t,\boldsymbol{x},u) = \frac{\left[k\left(\theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^{\omega}\left[L^{\delta}\left(t,\boldsymbol{x},u+\theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^{\omega}-\left[k\left(u+\theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^{\omega}[L^{\delta}(0,\boldsymbol{x},\theta_0^{\delta,\omega})]^{\omega}}{\left[k\left(\theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^{\omega}\sum\limits_{i=1}^{2}\left([\rho_i]^{\omega}+\upsilon\right)\left[c_{\theta i}\left(u+\theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^{\omega}},$$

где $[Q_i(u)]^{\omega}$ и $[c_{\theta i}(u)]^{\omega}$ связаны формулой (5.10).

6.3.1. *Проверка условия* (I) *Теоремы 8.*

- Для выполнения (6.10) будем предполагать, что величины $[k(u)]^\omega$, $[c_{\theta i}(u)]^\omega$ для всех $u \in \mathbb{R}$ определены и удовлетворяют неравенствам

$$0 < [k(u)]^\omega \leqslant \mathrm{c}_{19}, \quad [c_{\theta i}(u)]^\omega \geqslant c_{20}, \tag{6.20}$$

а для функции $[\rho_i]^\omega$ верна оценка

$$[\rho_i]^\omega \geqslant \mathrm{c}_{21} - \upsilon, \quad (t, \boldsymbol{x}) \in (0, T] \times \overline{\Omega}, \tag{6.21}$$

где постоянные c_{19}, c_{20}, $c_{21} > 0$;
- для выполнения (6.11) достаточно, чтобы, помимо (6.20) и (6.21), величины $[c_{\theta i}(u)]^\omega$, $([k(u)]^\omega)'$, $[u^{m+1}]^\omega$ для всех $u \in \mathbb{R}$ были определены и удовлетворяли неравенствам

$$[c_{\theta i}(u)]^\omega \leqslant c_{22}, \quad u([k(u)]^\omega)' \leqslant c_{23}, \quad \left|\left[u^{m+1}\right]^\omega\right| \leqslant c_{24}, \tag{6.22}$$

а также чтобы выполнялись оценки

$$\begin{aligned} &\Big|\theta_0^{\delta,\omega}, \nabla\theta_0^{\delta,\omega}, \Delta\theta_0^{\delta,\omega}, \frac{\partial[\rho_i]^\omega}{\partial t}, [\rho_i \boldsymbol{u}_i]^\omega, \operatorname{div}([\rho_i \boldsymbol{u}_i]^\omega), [p_{\theta i}(\rho_i)\operatorname{div}\boldsymbol{u}_i]^\omega, \\ &\qquad [\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)]^\omega, [|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2]^\omega, [\rho g^\delta]^\omega\Big| \leqslant c_{25}, \quad (t, \boldsymbol{x}) \in (0, T] \times \overline{\Omega}, \end{aligned} \tag{6.23}$$

где постоянные c_{22}, c_{24}, $c_{25} > 0$;
- для выполнения (6.12) достаточно, чтобы, помимо (6.20) и (6.21), при $(t, \boldsymbol{x}, u) \in [0, T] \times \partial\Omega \times \mathbb{R}$ выполнялись оценки

$$[\rho_i]^\omega \leqslant c_{26}, \quad [c_{\theta i}(u)]^\omega \leqslant c_{27}[k(u)]^\omega, \tag{6.24}$$

$$\begin{aligned} u\left[k\left(u + \theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^\omega [L^\delta(0, \boldsymbol{x}, \theta_0^{\delta,\omega})]^\omega - u\left[k\left(\theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^\omega \left[L^\delta\left(t, \boldsymbol{x}, u + \theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^\omega \leqslant \\ \leqslant c_{28}u^2 + c_{29}, \end{aligned} \tag{6.25}$$

где постоянные c_{26}, $c_{27} > 0$, а c_{28}, $c_{29} \geqslant 0$.

6.3.2. *Проверка условия* (II) *Теоремы 8.*

- Для выполнения (6.13) достаточно, чтобы, помимо (6.20)–(6.23), выполнялись оценки

$$[\rho_i]^\omega|_{t=0} \geqslant c_{30} - \upsilon, \quad \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}, \quad [\rho_i]^\omega \leqslant c_{31}, \quad (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \Omega, \tag{6.26}$$

где постоянные c_{30}, $c_{31} > 0$;
- для выполнения (6.14) достаточно, чтобы, помимо приведенных выше условий, величины $([c_{\theta i}(u)]^\omega)'$, $([c_{\theta i}(u)]^\omega)''$, $([k(u)]^\omega)'$, $([k(u)]^\omega)''$ были определены для всех $u \in \mathbb{R}$ и удовлетворяли неравенствам

$$|([c_{\theta i}(u)]^\omega)', ([k(u)]^\omega)', ([c_{\theta i}(u)]^\omega)'', ([k(u)]^\omega)''| \leqslant c_{32}, \tag{6.27}$$

а также выполнялись оценки

$$\left|\left.\frac{\partial[\rho_i]^\omega}{\partial t}\right|_{t=0}, \nabla[\rho_i]^\omega, \nabla\frac{\partial[\rho_i]^\omega}{\partial t}\right| \leqslant c_{33}, \quad (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \overline{\Omega}, \tag{6.28}$$

где постоянные c_{32}, $c_{33} > 0$;

- для выполнения (6.15) нужно, чтобы, помимо приведенных выше условий, величины

$$\left[L^\delta(t,\boldsymbol{x},u)\right]^\omega,\quad \frac{\partial}{\partial t}\left[L^\delta(t,\boldsymbol{x},u)\right]^\omega,\quad \nabla\left[L^\delta(t,\boldsymbol{x},u)\right]^\omega,\quad \frac{\partial}{\partial u}\left[L^\delta(t,\boldsymbol{x},u)\right]^\omega,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial u}\left[L^\delta(t,\boldsymbol{x},u)\right]^\omega,\quad \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left[L^\delta(t,\boldsymbol{x},u)\right]^\omega,\quad \nabla\left(\frac{\partial}{\partial u}\left[L^\delta(t,\boldsymbol{x},u)\right]^\omega\right)$$

  для всех $(t,\boldsymbol{x},u)\in[0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$ были определены и при всех $|u|\leqslant c_{25}+B_{84}$ и $(t,\boldsymbol{x})\in[0,T]\times\overline{\Omega}$ по модулю ограничены положительной постоянной;
- для выполнения (6.16) достаточно, чтобы, помимо приведенных выше условий, величина $([u^{m+1}]^\omega)'$ для всех $u\in\mathbb{R}$ была определена и по модулю ограничена положительной постоянной, оценки (6.23) выполнялись для всех $(t,\boldsymbol{x})\in[0,T]\times\overline{\Omega}$ и, кроме того,

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial^2[\rho_i]^\omega}{\partial t^2},\ \frac{\partial}{\partial t}[\rho_i\boldsymbol{u}_i]^\omega,\ \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}([\rho_i\boldsymbol{u}_i]^\omega),\ \frac{\partial}{\partial t}[p_{\theta i}(\rho_i)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i]^\omega,\ \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)\right]^\omega,\\ \frac{\partial}{\partial t}[|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2]^\omega,\ \frac{\partial}{\partial t}[\rho g^\delta]^\omega\Big|\leqslant c_{25},\quad (t,\boldsymbol{x})\in[0,T]\times\overline{\Omega},\end{aligned}\tag{6.29}$$

  где постоянная $c_{25}>0$.

6.3.3. *Проверка условий* (III), (IV) *Теоремы 8.* Для выполнения условия (III) достаточно, чтобы при $(t,\boldsymbol{x})\in[0,T]\times\overline{\Omega}$ выполнялись следующие условия (помимо сформулированных выше):

- $\theta_0^{\delta,\omega}$, $\nabla\theta_0^{\delta,\omega}$, $[\rho_i]^\omega$, $\nabla[\rho_i]^\omega$ непрерывно дифференцируемы по $\boldsymbol{x}$,
- $\left[L^\delta(t,\boldsymbol{x},u)\right]^\omega$, $\nabla\left[L^\delta(t,\boldsymbol{x},u)\right]^\omega$, $\dfrac{\partial}{\partial u}\left[L^\delta(t,\boldsymbol{x},u)\right]^\omega$, $[\rho_i]^\omega$ непрерывно дифференцируемы по t и $\boldsymbol{x}$,
- $[\rho_i\boldsymbol{u}_i]^\omega$, $\mathrm{div}([\rho_i\boldsymbol{u}_i]^\omega)$, $[p_{\theta i}(\rho_i)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i]^\omega$, $[\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)]^\omega$, $[|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|^2]^\omega$, $[\rho g^\delta]^\omega$, $\dfrac{\partial[\rho_i]^\omega}{\partial t}$ непрерывно дифференцируемы по $\boldsymbol{x}$, а $\Delta\theta_0^{\delta,\omega}$ непрерывна по $\boldsymbol{x}$ в смысле Гёльдера с показателем[34] $\sigma_{23}=\sigma_{12}$.

Условие (IV) Теоремы 8 выполнено в силу (5.6).

6.3.4. *Проверка условий Замечания 9.* Проверим условия[35], перечисленные в Замечании 9:

- для выполнения (6.17) достаточно, чтобы величины $[k(u)]^\omega$, $[c_{\theta i}(u)]^\omega$ для всех $u\in\mathbb{R}$ были определены и удовлетворяли неравенствам

$$[k(u)]^\omega\geqslant 0,\quad [c_{\theta i}(u)]^\omega>0,\tag{6.30}$$

  а для функции $[\rho_i]^\omega$ верна оценка

$$[\rho_i]^\omega>-\upsilon,\quad (t,\boldsymbol{x})\in(0,T]\times\overline{\Omega};\tag{6.31}$$

---

[34] Требуется также, чтобы $\partial\Omega\in C^{2+\sigma_{23}}$ — см. начало раздела 6.2, ср. начало раздела 5.

[35] Они, напомним, могут служить альтернативой требованиям (6.20)–(6.25), нужным для выполнения условия (I) Теоремы 8. При этом, если выбран этот вариант, следует внимательно отследить, какие из условий перечисленных в (6.20)–(6.25) по-прежнему будут нужны для выполнения оставшихся пунктов Теоремы 8 (поскольку при проверке пп. (II), (III) Теоремы 8 употреблялся прием «помимо сказанного выше требуется...»).

- для выполнения (6.18) достаточно, чтобы при всех $u \in \mathbb{R}$ выполнялись неравенства

$$c_{35} \leqslant [c_{\theta i}(u)]^\omega \leqslant c_{36}, \tag{6.32}$$

$$[k(u)]^\omega \leqslant c_{36}|u| + c_{37}, \quad u([k(u)]^\omega)' \leqslant c_{36}u^2 + c_{37}, \quad \left|\left[u^{m+1}\right]^\omega\right| \leqslant c_{36}|u| + c_{37}, \tag{6.33}$$

а также чтобы имели место оценки

$$[\rho_i]^\omega \geqslant \mathrm{c}_{38} - \upsilon, \quad (t, \boldsymbol{x}) \in (0, T] \times \overline{\Omega}, \tag{6.34}$$

$$\left|\theta_0^{\delta,\omega},\, \nabla\theta_0^{\delta,\omega},\, \Delta\theta_0^{\delta,\omega},\, \frac{\partial[\rho_i]^\omega}{\partial t},\, [\rho_i \boldsymbol{u}_i]^\omega,\, \mathrm{div}([\rho_i \boldsymbol{u}_i]^\omega),\, [p_{\theta i}(\rho_i)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i]^\omega\right| \leqslant c_{39}, \quad (t, \boldsymbol{x}) \in (0, T] \times \overline{\Omega}, \tag{6.35}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{2} [\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)]^\omega,\, a[|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|^2]^\omega,\, [\rho g^\delta]^\omega\right| \leqslant c_{39}, \quad (t, \boldsymbol{x}) \in (0, T] \times \overline{\Omega}, \tag{6.36}$$

где c_{35}, c_{36}, $c_{38} > 0$, а c_{37}, $c_{39} \geqslant 0$;
- для выполнения (6.19) достаточно, чтобы

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad [k(u)]^\omega > 0, \tag{6.37}$$

причем для всех $(t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \partial\Omega$ при $u > 0$ выполняется неравенство

$$\left[k\left(\theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^\omega [L^\delta(t, \boldsymbol{x}, u + \theta_0^{\delta,\omega})]^\omega > \left[k\left(u + \theta_0^{\delta,\omega}\right)\right]^\omega [L^\delta(0, \boldsymbol{x}, \theta_0^{\delta,\omega})]^\omega, \tag{6.38}$$

а при $u < 0$ выполняется противоположное неравенство. В случае если $L^\delta > 0$ и не зависит от t, для этого достаточно выполнения неравенства

$$\ln[L^\delta(\boldsymbol{x}, a + b)]^\omega - \ln[L^\delta(\boldsymbol{x}, a)]^\omega > \ln\left[k\left(a + b\right)\right]^\omega - \ln\left[k\left(a\right)\right]^\omega \tag{6.39}$$

при всех $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ ($\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$), и противоположного неравенства при $b < 0$.

Приведем примеры ситуаций, в которых выполнены неравенства (6.39) (с $L^\delta > 0$) или (6.38).

Пример 13. $[L^\delta(\boldsymbol{x}, \theta)]^\omega = ([k\,(\theta)]^\omega)^{\zeta(\boldsymbol{x},\omega)}$, *где* $\zeta(\boldsymbol{x}, \omega) > 1$, *а* $[k\,(\theta)]^\omega$ *строго возрастает по* θ.

Пример 14. $[L^\delta(\boldsymbol{x}, \theta)]^\omega = L_0(\theta, \omega)(\theta - \widehat{\theta}(\boldsymbol{x}))$, *где* $L_0(\theta, \omega) > 0$, *и кроме того*[36] $\theta_0^{\delta,\omega}|_{\partial\Omega} = \widehat{\theta}$.

Пример 15. $[L^\delta(\boldsymbol{x}, \theta)]^\omega = ([k\,(\theta)]^\omega)^{\zeta(\boldsymbol{x},\omega)}\,(\theta - \widehat{\theta}(\boldsymbol{x}))$, *где* $\zeta(\boldsymbol{x}, \omega) \geqslant 1$, $\theta_0^{\delta,\omega}|_{\partial\Omega} > \widehat{\theta}$, *а* $[k\,(\theta)]^\omega$ *не убывает по* θ.

---

[36] Это искусственное ограничение, возникающее в связи с неестественным способом решения задачи с любыми начальными данными сведением к задаче (6.7)–(6.9) с нулевыми начальными данными, принятым в [16].

6.4. **Вспомогательные утверждения.**

Лемма 16. *Пусть* $\omega \in (0,1)$, $|z| \in \left(1, \dfrac{1}{\omega}\right)$. *Тогда* (*см.* (5.7))

$$\pi_\omega(z) - \pi_\omega(0) - \frac{|z|}{12} > 0.$$

Доказательство. Имеем

$$0 < \omega < \frac{1}{|z|} < 1 < |z| < \frac{1}{\omega} < +\infty \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \sqrt{z^2+\omega^2} < \sqrt{2}|z| \quad \Longrightarrow \quad \omega\sqrt{z^2+\omega^2} < \sqrt{2} \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \left(1+\omega^2\right)\left(1+\omega\sqrt{z^2+\omega^2}\right)\left(\omega+\sqrt{z^2+\omega^2}\right) <$$
$$< 2\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}|z|\right) < 2\left(1+\sqrt{2}\right)^2|z| < 12|z| \Longrightarrow$$
$$\pi_\omega(z) - \pi_\omega(0) = \frac{z^2}{\left(1+\omega^2\right)\left(1+\omega\sqrt{z^2+\omega^2}\right)\left(\omega+\sqrt{z^2+\omega^2}\right)} > \frac{|z|}{12}. \qquad \square$$

Лемма 17. *Пусть* $v \in W_1^2(\Omega) \bigcap W_2^1(\Omega)$, $\partial\Omega \in C^1$. *Тогда* (*см.* (5.21))

$$\int_\Omega h(v)\Delta v\, d\boldsymbol{x} \leqslant \int_{\partial\Omega} h(v)\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\, d\sigma. \tag{6.40}$$

Доказательство. Для всех $\widehat{\delta} > 0$ рассмотрим функцию $h_{\widehat{\delta}} \in C^1(\mathbb{R})$ такую, что $0 \leqslant h_{\widehat{\delta}} \leqslant 1$, $h'_{\widehat{\delta}} \geqslant 0$, $h_{\widehat{\delta}} \to h$ поточечно при $\widehat{\delta} \to 0$. Заметим, что $\nabla v \in W_1^1(\Omega)$, а значит $\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \in L_1(\partial\Omega)$. Имеем

$$\operatorname{div}\left(h_{\widehat{\delta}}(v)\nabla v\right) = h_{\widehat{\delta}}(v)\Delta v + h'_{\widehat{\delta}}(v)|\nabla v|^2 \quad \Longrightarrow \quad \int_{\partial\Omega} h_{\widehat{\delta}}(v)\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\, d\sigma \geqslant \int_\Omega h_{\widehat{\delta}}(v)\Delta v\, d\boldsymbol{x}.$$

При $\widehat{\delta} \to 0$ по теореме Лебега получаем (6.40). $\square$

References

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I*, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), 623–727. MR0125307

[2] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, V. N. Monakhov, *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, Studies in Mathematics and its Applications, **22**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990. MR1035212

[3] D. Bresch, V. Giovangigli, E. Zatorska, *Two-velocity hydrodynamics in Fluid Mechanics. Part I: Well posedness for zero Mach number systems*, J. Math. Pures Appl., **104**:4 (2015), 762–800. MR3394616

[4] D. Bresch, B. Desjardins, E. Zatorska, *Two-velocity hydrodynamics in Fluid Mechanics. Part II: Existence of global k-entropy solutions to compressible Navier-Stokes system with degenerate viscosities*, J. Math. Pures Appl., **104**:4 (2015), 801–836. MR3394617

[5] E. B. Bykhovskii, N. V. Smirnov, *Orthogonal decomposition of the space of vector functions square-summable on a given domain, and the operators of vector analysis*, Trudy Mat. Inst. Steklov., **59** (1960), 5–36 (in Russian). MR0121641

[6] T. Cazenave, A. Haraux, *An introduction to semilinear evolution equations*, Oxford: Clarendon Press, 1998. MR1691574

[7] E. Feireisl, *On weak solutions to a diffuse interface model of a binary mixture of compressible fluids*, Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S, **9**:1 (2016), 173–183. MR3461654

[8] E. Feireisl, H. Petzeltova, K. Trivisa, *Multicomponent reactive flows: Global-in-time existence for large data*, Communications on Pure and Applied Analysis, **7**:5 (2008), 1017–1047. MR2410865

[9] E. Feireisl, *Dynamics of viscous compressible fluids*, Oxford: Oxford University Press, 2004. MR2040667

[10] E. Feireisl, A. Novotny, *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids. Advances in Mathematical Fluid Mechanics*, Basel: Birkhauser, 2009. MR2499296

[11] J. Frehse, S. Goj, J. Malek, *On a Stokes-like system for mixtures of fluids*, SIAM J. Math. Anal., **36**:4 (2005), 1259–1281. MR2139449

[12] J. Frehse, S. Goj, J. Malek, *A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum*, Appl. Math., **50**:6 (2005), 527–541. MR2181024

[13] J. Frehse, W. Weigant, *On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids*, Appl. Math., **53**:4 (2008), 319–345. MR2433725

[14] V. Giovangigli, M. Pokorny, E. Zatorska, *On the steady flow of reactive gaseous mixture*, Analysis (Berlin), **35**:4 (2015), 319–341. MR3420315

[15] A. V. Kazhikhov, A. N. Petrov, *Well-posedness of the initial-boundary value problem for a model system of equations of a multicomponent mixture*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **35** (1978), 61–73 (in Russian). MR539168

[16] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Uraltseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, 1968. MR0241822

[17] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence*, Methods and Applications of Analysis, **20**:2 (2013), 179–195. MR3119736

[18] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Solubility of a stationary boundary-value problem for the equations of motion of a one-temperature mixture of viscous compressible heat–conducting fluids*, Izvestiya: Mathematics, **78**:3 (2014), 554–579. MR3241821

[19] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Solvability of the regularized steady problem of the spatial motions of multicomponent viscous compressible fluids*, Siberian Math. J., **57**:6 (2016), 1044–1054. MR3614003

[20] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Solubility of steady boundary value problem for the equations of polytropic motion of multicomponent viscous compressible fluids*, Siberian Electr. Math. Reports, **13** (2016), 664–693 (in Russian). MR3540771

[21] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Solubility of initial boundary value problem for the equations of polytropic motion of multicomponent viscous compressible fluids*, Siberian Electr. Math. Reports, **13** (2016), 541–583 (in Russian). MR3528629

[22] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory*, Siberian Electr. Math. Reports, **14** (2017), 388–397. MR3642147

[23] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Existence of weak solutions to the three-dimensional problem of steady barotropic motions of mixtures of viscous compressible fluids*, Siberian Math. J., **58**:1 (2017), 113–127. MR3686948

[24] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Global solvability of 1D equations of viscous compressible multi-fluids*, J. of Physics: Conference Series, **894** (2017), Art. 012059.

[25] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Modeling viscous compressible barotropic multi-fluid flows*, J. of Physics: Conference Series, **894** (2017), Art. 012058.

[26] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Unique solvability of initial-boundary value problem for one-dimensional equa-tions of polytropic flows of multicomponent viscous compressible fluids*, Siberian Electr. Math. Reports, **15** (2018), 631–649. MR3814156

[27] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Solubility of unsteady equations of multi-component viscous compressible fluids*, Izvestiya: Mathematics, **82**:1 (2018), 140–185. MR3749599

[28] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Local solvability of initial-boundary value problem for one-dimensional equations of polytropic flows of viscous compressible multifluids*, J. of Math. Sciences, **231**:2 (2018), 227–242. MR3803034

[29] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Global unique solvability of the initial-boundary value problem for the equations of one-dimensional polytropic flows of viscous compressible multifluids*, J. Math. Fluid Mech., **21**:1 (2019), article 9.

[30] P. B. Mucha, M. Pokorny, E. Zatorska, *Heat-conducting, compressible mixtures with multicomponent diffusion: construction of a weak solution*, SIMA, **47**:5 (2015), 3747–3797. MR3403138

[31] P. B. Mucha, M. Pokorny, E. Zatorska, *Chemically reacting mixtures in terms of degenerated parabolic setting*, J. Math. Phys., **54** (2013), 071501. MR3114200

[32] R. I. Nigmatulin, *Dynamics of multiphase media, Vol. 1*, Hemisphere, N.Y., 1990.

[33] L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, 1974. MR0488102

[34] A. Novotný, I. Straškraba, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, **27**, Oxford: Oxford University Press, 2004. MR2084891

[35] A. N. Petrov, *Well-posedness of initial-boundary value problems for one-dimensional equations of interpenetrating motion of perfect gases*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **56** (1982), 105–121 (in Russian). MR706350

[36] D. A. Prokudin, *Unique solvability of initial-boundary value problem for a model system of equations for the polytropic motion of a mixture of viscous compressible fluids*, Siberian Electr. Math. Reports, **14** (2017), 568–585 (in Russian). MR3693742

[37] D. A. Prokudin, *Global solvability of the initial boundary value problem for a model system of one-dimensional equations of polytropic flows of viscous compressible fluid mixtures*, J. of Physics: Conference Series, **894** (2017), 012076.

[38] D. A. Prokudin, M. V. Krayushkina, *Solvability of a stationary boundary value problem for a model system of the equations of barotropic motion of a mixture of compressible viscous fluids*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **10**:3 (2016), 417–428. MR3588953

[39] K. L. Rajagopal, L. Tao, *Mechanics of mixtures*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, **35**, World Scientific, River Edge, NJ, 1995. MR1370661

[40] V. A. Solonnikov, *Estimates in L_p of solutions of elliptic and parabolic systems*, Trudy Mat. Inst. Steklov., **102** (1967), 137–160 (in Russian). MR0228809

[41] E. Zatorska, *On the flow of chemically reacting gaseous mixture*, J. Differential Equations, **253** (2012), 3471–3500. MR2981262

Alexander Evgenyevich Mamontov, Dmitriy Alexeyevich Prokudin
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
15, Lavrent'eva ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: aem@hydro.nsc.ru