S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 609–617 (2019) УДК 517.968
DOI 10.33048/semi.2019.16.039 MSC 45E10

УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА-ХОПФА В МЕРАХ С ВЕРОЯТНОСТНЫМ ЯДРОМ

М.С. СГИБНЕВ

Abstract. The paper deals with a generalization of the classical Wiener-Hopf equation where the functions involved are replaced by measures. A solution in explicit form is given, which coincides with the solution found by the method of successive approximations. An asymptotic property of the solution is also established.

Keywords: integral equation, measure, Wiener-Hopf equation, probability distribution, asymptotic behavior.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел, $\mathbb{R}_+$ — множество всех неотрицательных чисел и $\mathbb{R}_- := \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$ — множество всех отрицательных чисел. Обозначим через $\mathcal{B}$ σ-алгебру всех борелевских множеств прямой $\mathbb{R}$. Положим $\mathcal{B}(\mathbb{R}_\pm) := \{A \in \mathcal{B}\colon A \subseteq \mathbb{R}_\pm\}$. Классическое уравнение Винера-Хопфа имеет следующий вид:

$$z(x) = \int_0^\infty k(x-y)z(y)\,dy + g(x), \qquad x \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $z(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, — неизвестная функция, $k(x)$, $x \in \mathbb{R}$, и $g(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, — известные функции; функция $k(x)$ называется *ядром* уравнения (1). Интегральные уравнения (1) встречаются в ряде задач математической физики [1]. Перепишем уравнение (1) в виде

$$z(x) = \int_{-\infty}^x z(x-y)k(y)\,dy + g(x), \qquad x \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Sgibnev, M.S., The Wiener-Hopf equation in measures with probability kernel.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2, проект № 0314-2016-0005.

Поступила 26 февраля 2019 г., опубликована 30 апреля 2019 г.

Если $k(x)$ — плотность распределения вероятностей F, то уравнение (2) превращается в уравнение

$$z(x) = \int_{-\infty}^{x} z(x-y)\,F(dy) + g(x), \qquad x \in \mathbb{R}_+,$$

которое можно изучать, *не предполагая* абсолютной непрерывности распределения F (см. [2, 3]). Следующий шаг состоит в том, чтобы рассматривать еще более общее уравнение — уравнение в мерах:

$$(3) \qquad z(A) = \int_{\mathbb{R}} z[(A-y)\cap\mathbb{R}_+]\,F(dy) + g(A), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+),$$

где z — неизвестная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, а g — известная конечная мера, заданная на $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$; здесь $A - y := \{x \in \mathbb{R} \colon x + y \in A\}$. Назовем уравнение (3) *уравнением Винера-Хопфа в мерах.* Мы будем изучать уравнение (3), ядром которого является неарифметическое распределение вероятностей F. Напомним (см. [4, гл. V, § 2, определение 3]), что распределение вероятностей F в $\mathbb{R}$ называется *арифметическим*, если оно сосредоточено на множестве точек вида $0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots$. Распределение, не являющееся арифметическим, называется *неарифметическим.*

Пусть ν и $\varkappa$ — конечные меры, определенные на σ-алгебре $\mathcal{B}$. Их *сверткой* назовем меру

$$\nu * \varkappa(A) := \iint\limits_{\{x+y\in A\}} \nu(dx)\,\varkappa(dy) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A-x)\,\varkappa(dx), \qquad A \in \mathcal{B}.$$

Обозначим через F^{n*} n-кратную свертку распределения F:

$$F^{1*} := 1, \quad F^{(n+1)*} := F^{n*} * F, \quad n \geq 1,$$

и $F^{0*} := \delta_0$ (атомическая мера единичной массы, сосредоточенная в нуле). Обозначим через $\widehat{\nu}(s)$ преобразование Лапласа произвольной комплексной меры ν: $\widehat{\nu}(s) := \int_{\mathbb{R}} e^{sx}\,\nu(dx)$, при условии, что данный интеграл имеет смысл. *Полной вариацией* $|\nu|$ вещественной меры ν на $\mathcal{B}$ называют положительную меру $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$, где $\nu^\pm$ — меры из разложения Жордана-Хана для меры ν [5, гл. IV]. Пусть $a(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — функция. Для $c \in \mathbb{C}$ полагаем отношение c/∞ равным нулю. Соотношение $a(x) \sim cb(x)$ при $x \to \infty$ означает, что $a(x)/b(x) \to c$ при $x \to \infty$; если $c = 0$, то $a(x) = o[b(x)]$, $x \to \infty$.

2. Существование решения и его явный вид

Положим $\overline{\mathcal{T}}_+ := \min\{n \geq 1 \colon S_n \geq 0\}$. Случайная величина $\overline{\mathcal{H}}_+ := S_{\overline{\mathcal{T}}_+}$ называется *первой слабо возрастающей лестничной высотой.* Аналогично, $\overline{\mathcal{T}}_- := \min\{n \geq 1 \colon S_n < 0\}$ и $\overline{\mathcal{H}}_- := S_{\overline{\mathcal{T}}_-}$ — *первая сильно убывающая лестничная высота.* Справедливо факторизационное тождество

$$(4) \quad 1 - \xi\mathsf{E}(e^{sX_1}) = \big[1 - \mathsf{E}\big(\xi^{\overline{\mathcal{T}}_-} e^{s\overline{\mathcal{H}}_-}\big)\big]\big[1 - \mathsf{E}\big(\xi^{\overline{\mathcal{T}}_+} e^{s\overline{\mathcal{H}}_+}\big)\big], \quad |\xi| \leq 1, \quad \Re s = 0.$$

Его можно доказать, модифицируя рассуждения из [4, гл. XVIII, § 3], приводящие к аналогичному тождеству для другого набора лестничных величин.

Рассмотрим уравнение (3). Достаточно установить существование его решения z для положительных мер g; в случае вещественных мер следует воспользоваться разложением Жордана-Хана меры g в виде разности $g^+ - g^-$ положительных мер [5, гл. IV, предложение IV.1.1]. Тогда $z = z^+ - z^-$, где $z^\pm$ —

два решения уравнения (1) с положительными мерами $g^{\pm}$ вместо вещественной меры g. Для комплексных мер g используем представление $g = \Re g + i\,\Im g$. Обозначим через $F_{\pm}$ распределения случайных величин $\overline{\mathcal{H}}_{\pm}$ соответственно. Из тождества (4) вытекает равенство

$$\delta_0 - F = (\delta_0 - F_-) * (\delta_0 - F_+). \tag{5}$$

Пусть $U_{\pm} := \sum_{k=0}^{\infty} F_{\pm}^{k*}$ — меры восстановления, порожденные распределениями $F_{\pm}$ соответственно. Продолжим меру g на $\mathcal{B}$, полагая $g(A) := g(A \cap \mathbb{R}_+)$, $A \in \mathcal{B}$. Это соглашение будет действовать на протяжении всей статьи. Обозначим через $(U_- * g)|_{\mathbb{R}_+}$ сужение меры $U_- * g$ на множестве $\mathbb{R}_+$.

Теорема 1. *Пусть F — распределение вероятностей в $\mathbb{R}$ и g — конечная мера, заданная на $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Тогда мера*

$$z(A) := U_+ * \big[(U_- * g)|_{\mathbb{R}_+}\big](A), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \tag{6}$$

является решением уравнения (3), *совпадающим с решением, полученным методом последовательных приближений.*

Доказательство. Положим $\xi \in (0,1)$ в (4):

$$1 - \xi \widehat{F}(s) = [1 - \widehat{F}_{\xi-}(s)][1 - \widehat{F}_{\xi+}(s)], \qquad \Re s = 0,$$

где $F_{\xi\pm}$ — положительные меры, сосредоточенные на множествах $\mathbb{R}_{\pm}$ соответственно, причем $F_{\xi\pm}(\mathbb{R}_{\pm}) < 1$. Найдем решение уравнения

$$z_\xi(A) = \xi \int_{\mathbb{R}} z_\xi[(A - y) \cap \mathbb{R}_+]\, F(dy) + g(A), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \tag{7}$$

методом последовательных приближений:

$$z_\xi^{(0)}(A) = g(A), \quad z_\xi^{(n)}(A) = \xi \int_{\mathbb{R}} z_\xi^{(n-1)}[(A - y) \cap \mathbb{R}_+]\, F(dy) + g(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+),$$

при $n \geq 1$. Очевидно, что $z_\xi^{(n)}(A) \uparrow$ при $n \uparrow \infty$ для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, и по теореме о монотонной сходимости предел $z_\xi(A) = \lim_{n\to\infty} z_\xi^{(n)}(A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, — решение уравнения (7). Покажем, что z_ξ — конечная мера. Вместе с уравнением (1) рассмотрим *уравнение восстановления*

$$\zeta_\xi(A) = \xi \int_{\mathbb{R}} \zeta_\xi(A - y)\, F(dy) + g(A), \qquad A \in \mathcal{B}. \tag{8}$$

Построим его решение методом последовательных приближений:

$$\zeta_\xi^{(0)}(A) = g(A), \quad \zeta_\xi^{(n)}(A) = \xi \int_{\mathbb{R}} \zeta_\xi^{(n-1)}(A - y)\, F(dy) + g(A), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Очевидно, что $\zeta_\xi^{(n)}(A) \uparrow$ при $n \uparrow$. Поэтому можно перейти к пределу под знаком интегрирования. Таким образом, пределы $\zeta_\xi(A) := \lim_{n\to\infty} \zeta_\xi^{(n)}(A)$, $A \in \mathcal{B}$, существуют, причем $z_\xi(A) \leq \zeta_\xi(A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Мера ζ_ξ — решение уравнения (8). Так как $\zeta_\xi^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \xi^k F^{k*} * g$, меру ζ_ξ можно представить в виде $\zeta_\xi(A) = U_\xi * g$, где $U_\xi := \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k F^{k*}$ — мера восстановления, порожденная несобственным распределением ξF, причем U_ξ — конечная мера, так как $\xi F(\mathbb{R}) = \xi < 1$. Следовательно, ζ_ξ — конечная мера. Таким образом, для уравнения (7) доказано существование решения z_ξ, представляющего собой конечную меру. Найдем его явный вид. В статье [6] кратко изложена формальная схема решения классического уравнения Винера-Хопфа (см. также [7, гл. II, § 5, п. 5.4]). По аналогии с первым шагом этой схемы запишем уравнение (7) на всей прямой. Пусть

$$v_\xi(A) = \begin{cases} z_\xi(A) & \text{при } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \\ 0 & \text{при } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_-); \end{cases}$$

$$n_\xi(A) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \\ -\xi \displaystyle\int_{\mathbb{R}} z_\xi[(A-y)\cap \mathbb{R}_-]\, F(dy) + g(A) \quad \text{при } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_-). \end{cases}$$

Мера n_ξ имеет смысл, так как $|n_\xi(A)| \le \xi F * \zeta_\xi(A)$, причем $\xi F * \zeta_\xi$ — конечная мера. Уравнение (7) становится эквивалентным следующему уравнению восстановления:

$$v_\xi(A) = \xi \int_{\mathbb{R}} v_\xi(A-y)\, F(dy) + g(A) + n_\xi(A), \qquad A \in \mathcal{B},$$

или кратко:

$$(\delta_0 - \xi F) * v_\xi = g + n_\xi. \tag{9}$$

Положим $U_{\xi\pm} := \sum_{n=0}^{\infty} F_{\xi\pm}^{n*}$. Меры $U_{\xi\pm}$. конечны. Образуем свертки меры $U_{\xi-}$ с обеими частями уравнения (9). Из равенства $\delta_0 - \xi F = (\delta_0 - F_{\xi-}) * (\delta_0 - F_{\xi+})$ вытекает, что

$$U_{\xi-} * (\delta_0 - \xi F) = \delta_0 - F_{\xi+}.$$

Поэтому

$$(\delta_0 - F_{\xi+}) * v_\xi(A) = U_{\xi-} * (g + n_\xi)(A), \qquad A \in \mathcal{B}. \tag{10}$$

Конечная мера $U_{\xi-}$ неотрицательна и сосредоточена на $\mathbb{R}_- \cup \{0\}$. Левая часть соотношения (10) обращается тождественно в нуль на $\mathcal{B}(\mathbb{R}_-)$. Следовательно,

$$[U_{\xi-} * (g + n_\xi)]|_{\mathbb{R}_-} = 0,$$

откуда вытекает, что $U_{\xi-} * n_\xi = -(U_{\xi-} * g)|_{\mathbb{R}_-}$. Образуем свертки обеих частей этого равенства с мерой $\delta_0 - F_{\xi-}$. Получаем

$$n_\xi = -(\delta_0 - F_{\xi-}) * \big[(U_{\xi-} * g)|_{\mathbb{R}_-}\big].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} v_\xi = U_\xi * (g + n_\xi) &= U_\xi * \big\{g - (\delta_0 - F_{\xi-}) * \big[(U_{\xi-} * g)|_{\mathbb{R}_-}\big]\big\} \\ &= U_\xi * \big\{g - (\delta_0 - F_{\xi-})(U_{\xi-} * g) + (\delta_0 - F_{\xi-}) * \big[(U_{\xi-} * g)|_{\mathbb{R}_+}\big]\big\} \\ &= U_\xi * \big\{(\delta_0 - F_{\xi-}) * \big[(U_{\xi-} * g)|_{\mathbb{R}_+}\big]\big\} = U_{\xi+} * \big[(U_{\xi-} * g)|_{\mathbb{R}_+}\big]. \end{aligned}$$

Устремляя $\xi \uparrow 1$ и применяя теорему о монотонной сходимости, убеждаемся в том, что $z(A) := \lim_{\xi\uparrow 1} z_\xi(A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, — решение уравнения (3), и что для него справедливо равенство (6). Докажем последнее утверждение теоремы. Образуем последовательные приближения $z^{(n)}$ для исходного уравнения (3):

$$z^{(0)}(A) = g(A), \quad z^{(n)}(A) = \int_{\mathbb{R}} z^{(n-1)}[(A-y)\cap\mathbb{R}_+]\, F(dy) + g(A), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

Имеем $z^{(n)}(A) \uparrow$, $n \uparrow$. Существуют пределы $\lim_{n\to\infty} z^{(n)}(A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Покажем, что они совпадают с найденным решением (6) уравнения (3). В силу монотонной сходимости и индукции по n имеем

$$z^{(n)}(A) = \lim_{\xi\uparrow 1} z_\xi^{(n)}(A) \leqslant \lim_{\xi\uparrow 1} z_\xi(A) = z(A), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$z_\xi(A) := \lim_{n\to\infty} z_\xi^{(n)}(A) \leqslant \lim_{n\to\infty} z^{(n)}(A) \leqslant \lim_{\xi\uparrow 1} z_\xi(A) = z(A).$$

Переходя к пределу при $\xi \uparrow 1$ получаем равенство $\lim_{n\to\infty} z^{(n)}(A) = z(A)$, т.е. решение z, определяемое формулой (6), совпадает с решением $\{\lim_{n\to\infty} z^{(n)}(A)\}$, полученным методом последовательных приближений. □

Пусть X_k, $k \geq 1$, — независимые случайные величины с одним и тем же распределением F, не сосредоточенным в нуле. Эти величины порождают случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \geq 1$. Согласно теореме 1 в [4, гл. XII, § 2] существуют только два типа случайных блужданий: 1) осциллирующий тип (S_n колеблется с вероятностью единица между $-\infty$ и $+\infty$); 2) уходящий тип (с вероятностью единица S_n стремится либо к $-\infty$, либо к $+\infty$). Теорема 1 справедлива для *всех* типов вероятностных распределений: как для распределений осциллирующего типа, так и для распределений уходящего типа. Если существует математическое ожидание $\mathsf{E}X_1 := \int_{\mathbb{R}} x\,F(dx)$, то при $\mathsf{E}X_1 > 0$ согласно закону больших чисел $\lim_{n\to\infty} S_n/n = \mathsf{E}X_1$ почти наверно (см. [5, предложение IV.7.1]), т.е. случайное блуждание уходит в $+\infty$. В этом случае $\overline{\mathcal{T}}_+ < \infty$ почти наверно и распределение F_+ собственное. Кроме того, для случайных блужданий, уходящих в $+\infty$, F_- — несобственное распределение, сосредоточенное на $\mathbb{R}_-$: $F_-(\mathbb{R}_-) < 1$, см. [4, гл. XVII, § 4, пример а)]. Соответствующая мера восстановления U_- конечна и $U_-(\mathbb{R}_- \cup \{0\}) = 1/[1 - F_-(\mathbb{R}_-)]$.

Пусть ядро F в уравнении (3) — несобственное распределение. Тогда метод последовательных приближений дает решение этого уравнения в виде *конечной* меры (см. часть доказательства теоремы 1, относящуюся к уравнению (7)).

3. Асимптотические результаты

Предварительно докажем лемму и установим неарифметичность распределения F_+. Обозначим через $\mathbb{Z}$ множество целых чисел.

Определение 1. Пусть $f(x)$ ограниченная вещественная функция на $\mathbb{R}$. При фиксированном $h > 0$ обозначим соответственно через m_n и M_n инфимум и супремум $f(x)$ на интервале $(nh, (n+1)h]$, $n \in \mathbb{Z}$. Предположим, что ряды $\underline{\sigma} = h\sum m_n$ и $\underline{\sigma} = h\sum M_n$ сходятся абсолютно. Функция $f(x)$ называется *непосредственно интегрируемой по Риману*, если

$$\lim_{h\downarrow 0}(\overline{\sigma} - \underline{\sigma}) = 0;$$

см. [4, XI, § 1] и [8, § 2, определение 2.5.1].

Лемма 1. *Пусть ν — конечная вещественная мера на $\mathbb{R}$ и $a > 0$. Тогда функция $f(x) = \nu((x, x+a])$, $x \in \mathbb{R}$, непосредственно интегрируема по Риману.*

Доказательство. Пусть x, y — произвольные точки интервала $(nh, (n+1)h]$. Если $y \leq z$, то

$$f(z) - f(y) = \nu((y + a, z + a]) - \nu((y, z]),$$

откуда

$$|f(z) - f(y)| \le |\nu|((nh + a, (n+1)h + a]) + |\nu|((nh, (n+1)h]). \tag{11}$$

Это неравенство справедливо при любом распроложении точек y, z из интервала $(nh, (n+1)h]$. Пусть $\{y_k\}$, $\{z_k\}$ — последовательности точек интервала $(nh, (n+1)h]$ такие, что

$$m_n = \lim_{k\to\infty} f(y_k), \qquad M_n = \lim_{k\to\infty} f(z_k).$$

Из неравенства (11) вытекает, что

$$M_n - m_n \le |\nu|((nh + a, (n+1)h + a]) + |\nu|((nh, (n+1)h]).$$

Окончательно имеем: при $h \to 0$

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} \le h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{|\nu|((nh + a, (n+1)h + a]) + |\nu|((nh, (n+1)h])\} = 2h|\nu|(\mathbb{R}) \to 0.$$

Лемма 1 доказана. □

Определение 2. Распределение вероятностей G на $\mathbb{R}$ называется *решётчатым*, если оно сосредоточено на множестве, образующем арифметическую прогрессию, т.е. на множестве точек вида $a + j\lambda$, где $a \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ — постоянные числа, а $j \in \mathbb{Z}$. Наибольшее число λ, обладающее этим свойством, называется *шагом* G.

Лемма 2. *Пусть F — неарифметическое распределение вероятностей такое, что с вероятностью единица S_n стремится к $+\infty$. Тогда F_+ также является неарифметическим распределением.*

Доказательство. Распределение вероятностей G на $\mathbb{R}$ является решетчатым тогда и только тогда, когда найдется вещественное число $t_0 \ne 0$ такое, что $|\widehat{G}(it_0)| = 1$ [9, теорема 2.1.4]. Анализируя доказательство этой теоремы, видим, что G — арифметическое распределение в том и только в том случае, когда найдется вещественное число $t_0 \ne 0$ такое, что $\widehat{G}(it_0) = 1$. Шаг λ решетчатого распределения G определяется следующими соотношениями [10, гл. IV, упр. 7]: $|\widehat{G}(it)| < 1$ при $0 < |t| < 2\pi/\lambda$ (t вещественно) и $|\widehat{G}(2\pi i/\lambda)| = 1$. Если G — арифметическое распределение, то его шаг λ определяется из соотношений $\widehat{G}(it) \ne 1$ при $0 < |t| < 2\pi/\lambda$ (t вещественно) и $\widehat{G}(2\pi i/\lambda) = 1$. Далее рассуждаем от противного. Допустим, что распределение F_+ является арифметическим с шагом λ. Тогда $\widehat{F}_+(2\pi i/\lambda) = 1$. Переходя от мер к преобразованиям Лапласа в (5) и полагая $s = 2\pi i/\lambda$, получаем

$$1 - \widehat{F}(2\pi i/\lambda) = [1 - \widehat{F}_-(2\pi i/\lambda)][1 - \widehat{F}_+(2\pi i/\lambda)] = 0,$$

откуда согласно приведенному критерию арифметичности для вероятностных распределений вытекает, что распределение F также должно быть арифметическим вопреки предположению. Поэтому F_+ — неарифметическое распределение. Лемма доказана. □

Пусть g — конечная вещественная мера, заданная на σ-алгебре $\mathcal{B}$. Обозначим через $g(x)$ ее функцию распределения: $g(x) := g((-\infty, x])$ при $x \in \mathbb{R}$. Положим $g(\infty) := \lim_{x\to\infty} g(x) = g(\mathbb{R})$ и $g(x - 0) := \lim_{\Delta\downarrow 0} g(x - \Delta)$. Если мера g сосредоточена на $\mathbb{R}_+$, то значение $g(x - 0)$ в точке $x = 0$ равно нулю.

Теорема 2. *Пусть F — неарифметическое распределение вероятностей такое, что*

$$\mu := \mathsf{E}X_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x\, F(dx) \in (0, +\infty],$$

и пусть g — конечная вещественная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Тогда решение z уравнения (3) *удовлетворяет следующему соотношению*:

$$z((x, x+h]) \to \frac{hg(\mathbb{R}_+)}{\mu} - \frac{h}{\mu_+}\int_{-\infty}^{0+} g(-y-0)\, U_-(dy), \qquad x \to \infty; \tag{12}$$

здесь $h > 0$ — фиксированное число, $\mu_+ = \mathsf{E}\overline{\mathcal{H}}_+ = \int_0^\infty x\, F_+(dx)$.

Доказательство. Положим $\mathcal{T}_+ := \min\{n \geq 1\colon S_n > 0\}$. Случайная величина $\mathcal{H}_+ := S_{\mathcal{T}_+}$ называется *первой строго возрастающей лестничной высотой.* Если μ конечно и положительно, то $\mathsf{E}\mathcal{H}_+ \in (0, +\infty)$ (см. [4, гл. XII, § 2, теорема 2]). Следовательно, μ_+ также конечно и положительно, поскольку $X_1 = S_1 \leq \overline{\mathcal{H}}_+ \leq \mathcal{H}_+$ почти наверно. Кроме того, $\mu_+ \geq \mu$. Таким образом, если $\mu = +\infty$ то и $\mu_+ = +\infty$.

Так как U_- — конечная мера, то мера $U_- * g$ конечна и, следовательно, конечна мера $(U_- * g)|_{\mathbb{R}_+}$. По лемме 1 функция $(U_- * g)|_{\mathbb{R}_+}((x, x+h])$ непосредственно интегрируема по Риману. Применяем теорему 2 из [4, гл. XI, § 1] (см. также замечание после формулировки теоремы 1 в [4, гл. XI, § 9]), получаем

$$z((x, x+h]) \to \frac{1}{\mu_+}\int_{\mathbb{R}} (U_- * g)((x, x+h] \cap \mathbb{R}_+)\, dx, \qquad x \to \infty.$$

Интеграл равен следующему выражению:

$$\int_{-h}^{0}\int_{-\infty}^{0+} g([-y, x-y+h])\, U_-(dy)\, dx + \int_0^\infty \int_{-\infty}^{0+} g((x-y, x-y+h])\, U_-(dy)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0+}\int_{-h}^{0} g([-y, x-y+h])\, dx\, U_-(dy) + \int_{-\infty}^{0+}\int_0^\infty g((x-y, x-y+h])\, dx\, U_-(dy).$$

Обозначая данные слагаемые через I_1 и I_2, осуществим преобразования:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0+}\int_{-h}^{0} [g(x-y+h) - g(-y-0)]\, dx\, U_-(dy)$$
$$= \int_{-\infty}^{0+}\int_0^h g(x-y)\, dx\, U_-(dy) - h\int_{-\infty}^{0+} g(-y-0)\, U_-(dy);$$

$$\int_0^\infty g((x-y, x-y+h])\, dx = \int_0^\infty [g(x-y+h) - g(x-y)]\, dx$$
$$= \lim_{B\to\infty}\left[\int_0^B g(x-y+h)\, dx - \int_0^B g(x-y)\, dx\right]$$
$$= \lim_{B\to\infty}\left[\int_h^{B+h} g(x-y)\, dx - \int_0^B g(x-y)\, dx\right] = hg(\infty) - \int_0^h g(x-y)\, dx;$$

$$I_2 = hg(\infty)U_-(\mathbb{R}_- \cap \{0\}) - \int_{-\infty}^{0+}\int_0^h g(x-y)\, dx\, U_-(y).$$

Складывая I_1 и I_2, производя сокращение и умножая на $1/\mu_+$, получаем требуемую асимптотику (12), так как из формулы (5) вытекают равенства

$$\mu = \mu_+[1 - F_-(\mathbb{R}_-)] = \frac{\mu_+}{U_-(\mathbb{R}_- \cup \{0\})}.$$

Действительно, перейдем в формуле (5) от мер к преобразованиям Лапласа, затем разделим обе части на $-s$. Получим соотношение

$$\frac{\widehat{F}(s) - 1}{s} = \bigl[1 - \widehat{F}_-(s)\bigr]\frac{\widehat{F}_+(s) - 1}{s}, \qquad \Re s = 0.$$

Устремим s к нулю. Тогда дроби в левой и правой частях будут стремиться к μ и μ_+ соответственно. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2. *Тогда*

$$z([0,x]) \sim x\left[\frac{g(\mathbb{R}_+)}{\mu} - \frac{1}{\mu_+}\int_{-\infty}^{0+} g(-y-0)\,U_-(dy)\right], \qquad x \to \infty;$$

если $\mu = +\infty$, *то* $z([0,x]) = o(x)$ *при* $x \to \infty$.

Предположим, что F сосредоточено на $\mathbb{R}_+$ и $g = F$. Тогда уравнение (3) совпадает с уравнением восстановления $z = z*F+F$. Известная теорема Блеквелла [4, гл. XI, § 1, теорема 1] утверждает, что если $\mu = \mathsf{E}X_1 \in (0,+\infty]$ и $h > 0$ — фиксированное число, то в этом случае $z((x,x+h]) \to h/\mu$ при $x \to \infty$, Мы видим полное совпадение с формулой (12) для уравнения Винера-Хопфа в мерах, так как в данном случае $F(\mathbb{R}_+) = 1$, $U_- = \delta_0$ и $F(0-0) = 0$, поскольку функция распределения $F(x)$ обращается в нуль при $x < 0$. Имеет место аналогичное совпадение следствия 1 с так называемой *элементарной теоремой восстановления*: если $F(\mathbb{R}_+) = 1$ и $g = F$, то $z([0,x]) \sim x/\mu$, $x \to \infty$ (см. [4, гл. XI, § 4]).

Установим связь уравнения (3) для мер с классическим уравнением Винера-Хопфа (1). Предположим, что мера g абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и распределение F имеет плотность $k(x)$. В этом случае решение z уравнения (3), задаваемое формулой (6), абсолютно непрерывно. Действительно, если хотя бы одна из двух мер абсолютно непрерывна, то их свертка также абсолютно непрерывна. Поэтому абсолютно непрерывны мера $U_- * g$, ее сужение на $\mathbb{R}_+$ и решение $z = U_+ * \bigl[(U_- * g)|_{\mathbb{R}_+}\bigr]$. Мера, задаваемая интегралом в (3), абсолютно непрерывна как разность $z - g$ абсолютно непрерывных мер. Возьмем $A = [0,x]$. Так как мера z сосредоточена на $\mathbb{R}_+$, можем считать, что ее плотность $z'(v) \equiv 0$ на $\mathbb{R}_-$. Тогда

$$z[(A-y) \cap \mathbb{R}_+] = \int_{A-y} z'(v)\,dv.$$

Имеем

$$\int_0^x z'(u)\,du = \int_{-\infty}^x \int_{-y}^{x-y} z'(v)\,dv\,k(y)\,dy + \int_0^x g'(u)\,du.$$

Преобразуем повторный интеграл:

$$\int_{-\infty}^x \int_0^x z'(u-y)\,du\,k(y)\,dy$$
$$= \int_0^x \int_{-\infty}^x z'(u-y)k(y)\,dy\,du = \int_0^x \int_{-\infty}^u z'(u-y)k(y)\,dy\,du.$$

Окончательно имеем

$$\int_0^x \Big[z'(u) - \int_{-\infty}^u z'(u-y)k(y)\,dy - g'(u)\Big]\,du \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество, приходим к классическому уравнению Винера-Хопфа для неизвестной плотности z':

$$z'(x) = \int_{-\infty}^x z'(x-y)k(y)\,dy + g'(x).$$

Таким образом, в абсолютно непрерывном случае уравнение Винера-Хопфа (3) для мер эквивалентно классическому уравнению Винера-Хопфа (1) для соответствующих плотностей.

References

[1] V.A. Fock, *On some integral equations of mathematical physics*, Matematicheskiĭ Sbornik, **14**:1–2 (1944), 3–50. MR0012190

[2] M.S. Sgibnev, *Wiener-Hopf equation whose kernel is a probability distribution*, Differential equations, **53**:9 (2017), 1209–1231. MR3714954

[3] M.S. Sgibnev, *On the inhomogeneous conservative Wiener-Hopf equation*, Siberian Mathematical Journal, **58**:6 (2017), 1090–1103. MR3783880

[4] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications. Volume II*, New York–London–Sydney: John Wiley & Sons, 1966. MR0210154

[5] J. Neveu, *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*, Paris: Masson et Cie, 1964. MR0198504

[6] V.I. Dmitriev, *The Wiener–Hopf equation*, in: Mathematical Encyclopedia. Volume 1 [Russian], Sovetskaya 'Entsiklopediya, Moscow, (1977), 697—698.

[7] F.D Gakhov, Yu.I. Cherskiĭ, *Equations of the convolution type*, Nauka, Moscow, 1978 [Russian]. MR527628

[8] G. Alsmeyer, *Erneuerungstheorie*, Stuttgart: B.G. Teubner, 1991. MR1119301

[9] E. Lukacs, *Characteristic Functions. Second Edition*, London: Griffin, 1970. MR0346874

[10] M. Loève, *Probability Theory. Second Edition*, New Jersey–Toronto–New York–London: D. Van Nostrand Company Inc. Princeton, 1960. MR0123342

Mikhail Sergeyevich Sgibnev
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: sgibnev@math.nsc.ru