S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 618–637 (2019) УДК 510.64
DOI 10.33048/semi.2019.16.040 MSC 03B60,03C80,03F65

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ ВЕРСИЯХ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ СЕМАНТИКИ ДЛЯ ЛОГИКИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

И.Ю. ШЕВЧЕНКО

Abstract. In the article we compare two approaches to effectivisation of game theoretical semantics for first-order logic. One of the approaches was provided by Sergey P. Odintsov, Stanislav O. Speranski, Igor Yu. Shevchenko in the previous article, and it is based on a game-theoretical reconstruction of strategy conception. In this article we provide the other approach — we consider a strategy as a function determined on a set of histories and then we set an equivalence between these two approaches.

Keywords: game theoretical semantics, Nelson's realizability, computability.

1. Введение

В [3], среди прочих, был решен вопрос о конструктивной версии теоретико-игровой семантики (GTS) для логики первого порядка в языке без импликации ($\mathrm{FOL}^{\not\to}$). Оказалось, что эффективная версия GTS эквивалентна семантике реализуемости по Нельсону. Данный результат был получен на основе теоретико-множественной реконструкции понятия стратегии в GTS. С другой стороны, Хинтикка [1], рассуждая об эффективной версии GTS, предположил, что конструктивисты ограничились бы требованием к стратегии — быть вычислимой функцией.

В этой статье мы преследуем следующую цель — найти эффективную версию GTS, основанную на подходе Хинтикки, и проверить, будет ли она эквивалентна версии, предложенной в [3]. Статья имеет следующую структуру:

- в разделе 2 рассмотрены определения экстенсивной игры и стратегии;

Shevchenko, I.Yu., About effective versions of game theoretical semantics for first-order logic.

Поступила 29 июля 2018 г., опубликована 15 мая 2019 г.

- в разделе 3 рассмотрено математическое определение GTS для $\mathrm{FOL}^{\nrightarrow}$ из [3], где за основу была взята формализация из [5], но с небольшими изменениями;
- в разделе 4 рассмотрено определение семантики реализуемости по Нельсону, также с незначительными отличиями от оригинала из [2];
- в разделе 5 кратко описан теоретико-множественный подход к реконструкции GTS для $\mathrm{FOL}^{\nrightarrow}$, который рассматривался в [3];
- в разделе 6 определены конструкции, которые позволяют работать с объектами формальной теоретико-игровой GTS в композициональном ключе, определены ключевые понятия *эффективной* теоретико-игровой стратегии и *эффективной полезной* теоретико-игровой стратегии, и, наконец, доказано, что множества выигрышных эффективных полезных стратегий сводимы к реализациям по Нельсону, а реализации в свою очередь можно преобразовать в выигрышные стратегии при помощи вычислимых с оракулом X функций, где X — множество номеров пустой функции.

2. Экстенсивные игры

Следуя [4] и [5], напомним, как определяются игры в экстенсивной форме с полной информацией. При этом мы сфокусируем внимание на win-lose играх.

Определение 2.1. *Win-lose игра в экстенсивной форме с полной информацией* — это пятерка $\langle N, H, Z, P, u\rangle$ со следующими компонентами:

- N — множество, элементы которого являются *игроками*;
- H — множество конечных последовательностей (*историй*), которое обладает следующим свойством: если $(a_1,\ldots,a_l) \in H$ и $(a_1,\ldots,a_n) \in H$, то для всех $l \le m \le n$ с необходимостью выполняется $(a_1,\ldots,a_m) \in H$. Будем называть $(a_1,\ldots,a_l)$ *начальным сегментом* $(a_1,\ldots,a_m)$, а $(a_1,\ldots,a_n)$ — *продолжением* $(a_1,\ldots,a_m)$. В дальнейшем отношение быть сегментом(продолжением) обозначаем так:
$$(a_1,\ldots,a_l) \le (a_1,\ldots,a_m) \le (a_1,\ldots,a_n),$$
также положим для $a, b \in H$
$$a \lneqq b \Leftrightarrow a \le b \wedge a \ne b.$$
- $Z \subseteq H$ — множество историй без собственных продолжений в H(*тер - минальные истории*). Каждая история из H может быть продолжена до истории из Z;
- $P\colon (H \setminus Z) \to N$ — *функция очереди*, которая сопоставляет игрока каждой нетерминальной истории;
- $u\colon Z \to N$ — *функция выигрыша*, которая сопоставляет победителя каждой терминальной истории.

Переход от нетерминальной истории $h = (a_1,\ldots,a_m)$ к одному из её продолжений $h^\frown a = (a_1,\ldots,a_m,a)$ в H происходит с помощью *действия*. Будем отождествлять действия с последним элементом истории-продолжения. Функция очереди показывает, чья очередь ходить. Для каждой нетерминальной истории $h = (a_1,\ldots,a_m)$ игрок $P(h)$ выбирает действие a' из множества
$$A(h) = \{a\colon (a_1,\ldots,a_m,a) \in H\},$$

и игра продолжается с историей $h' = (a_1, \ldots, a_m, a')$.

Определение 2.2. Пусть $H_p = P^{-1}(p)$ — множество историй, в которых очередь хода за игроком p, и $A = \bigcup_{h \in H} A(h)$ — множество всех возможных действий в игре.

Будем называть функцию $\delta_p \colon H_p \to A$ *стратегией игрока* p, если для каждой истории из H_p выполнено условие

$$\delta_p(h) \in A(h).$$

Игрок p *следует* стратегии δ_p на протяжении истории $h' = (a_1, \ldots, a_n)$, если всякий раз, когда $h = (a_1, \ldots, a_m) \in H_p$ является начальным сегментом h', история

$$h^\frown \delta_p(h) = (a_1, \ldots, a_m, \delta_p(h))$$

также является начальным сегментом h'.

Определение 2.3. Определим множества:

- Δ_p — множество всех стратегий игрока p;
- H_{δ_p} — истории, на протяжении которых игрок p следовал стратегии δ_p (*полезное множество*);
- $Z_{\delta_p} = H_{\delta_p} \cap Z$ — терминальные историй, на протяжении которых игрок p следовал стратегии δ_p;
- $Z_p = u^{-1}(p)$ — терминальные истории, в которых выигрывает игрок p.

Стратегия δ_p игрока p называется *выигрышной*, если $Z_{\delta_p} \subseteq Z_p$, т.е. все терминальные истории из H_{δ_p} приводят к выигрышу.

3. Теоретико-игровая семантика

Зафиксируем множество индивидных переменных $\mathrm{FOL}^{\not\to}$-языка Var и сигнатуру Σ. Если $\mathbb{M}$ — модель сигнатуры Σ, то под *означиванием* в $\mathbb{M}$ будем понимать функцию

$$s : X \to |\mathbb{M}|,$$

где $X \subseteq Var$ и $|\mathbb{M}|$ — носитель $\mathbb{M}$. В таком случае будем писать $\mathsf{dom}(s) = X$. Будем называть означивание s *конечным*, если множество $\mathsf{dom}(s)$ конечно. В качестве связок и кванторов будем рассматривать только $\vee$, $\sim$ и $\exists$. Конъюнкция и квантор всеобщности обычным образом выражаются через дизъюнкцию, отрицание, и квантор существования.

Введём обозначения:

- $\mathbb{M}, s \models \Phi$ — краткое обозначение утверждения «$\mathrm{FOL}^{\not\to}$-формула Φ истинна в $\mathbb{M}$ на означивании s»;
- $\langle s \rangle_x^a$ — означивание, которое сопоставляет переменной x значение a, а на остальных аргументах согласовано с s;
- $Sub(\Phi)$ — множество вхождений подформул Φ в формулу Φ;
- $Atom(\Phi)$ — множество атомарных подформул формулы Φ;
- $\mathsf{Free}(\Phi)$ — множество свободных переменных формулы Φ;
- $Var(\Phi)$ — множество переменных, входящих в формулу Φ.

Определение 3.1. Рассмотрим $\mathrm{FOL}^{\not\to}$-формулу Φ, модель $\mathbb{M}$ и конечное[1] означивание s в $\mathbb{M}$ с условием $\mathsf{dom}(s) \supseteq \mathsf{Free}(\Phi)$. *Семантическая игра* $\mathsf{G}(\mathbb{M}, s, \Phi)$

---

[1] Мы не будем работать с бесконечными множествами формул, поэтому не будем рассматривать бесконечные означивания. Однако, в [5] от означиваний не требовали быть конечными.

— это win-lose игра в экстенсивной форме с полной информацией, определённая следующим образом:

- Есть два игрока — Элоиза ($\exists$) и Абеляр ($\forall$). Также у игроков есть роли: *верификатор* и *фальсификатор*. В течение игры игроки могут меняться ролями по правилам, определённым в следующем пункте.
- Множество историй — это
$$H = \bigcup \{H_\chi \colon \chi \in Sub\,(\Phi)\}\,,$$
где множества H_χ будут определены ниже. Параллельно будут определены функции $\mathsf{ver} : H \to \{\exists, \forall\}$ и $\mathsf{fals} : H \to \{\exists, \forall\}$, обозначающие роли игроков для каждой истории.
  - $H_\Phi = \{(s, \Phi)\}$, $\mathsf{ver}((s,\Phi)) = \exists$, $\mathsf{fals}((s,\Phi)) = \forall$;
  - если $\chi = \chi_1 \vee \chi_2$, то $H_{\chi_i} = \{h^\frown \chi_i \colon h \in H_{\chi_1 \vee \chi_2}\}$,
  $\mathsf{ver}(h^\frown \chi_i) = \mathsf{ver}(h)$, $\mathsf{fals}(h^\frown \chi_i) = \mathsf{fals}(h)$;
  - если $\chi = \exists x \varphi$, то $H_\varphi = \{h^\frown (x, a) \colon h \in H_{\exists x \varphi}, a \in M\}$,
  $\mathsf{ver}(h^\frown (x,a)) = \mathsf{ver}(h)$, $\mathsf{fals}(h^\frown (x,a)) = \mathsf{fals}(h)$;
  - если $\chi =\sim \varphi$, то $H_\varphi = \{h^\frown \varphi \colon h \in H_{\sim\varphi}\}$,
  $\mathsf{ver}(h^\frown \varphi) = \mathsf{fals}(h)$, $\mathsf{fals}(h^\frown \varphi) = \mathsf{ver}(h)$.[2]

  Означивание s будем называть *начальным означиванием*. Каждая история h' порождает означивание $s_{h'}$, расширяющее или изменяющее начальное означивание:
$$s_{h'} = \begin{cases} s, & \text{если } h' = (s, \Phi), \\ s_h, & \text{если } h' = h^\frown \chi \text{ для некоторой } \chi \in Sub(\Phi), \\ \langle s_h \rangle^a_x, & \text{если } h' = h^\frown (x, a) \text{ для некоторого } a \in M. \end{cases}$$
- Игра заканчивается, как только она достигает атомарной формулы:
$$Z = \bigcup \{H_\chi \colon \chi \in Atom(\Phi)\}.$$
- Функция очереди P в точности совпадает с функцией ver:
$$P(h) = \mathsf{ver(h)}.$$
- Функция выигрыша определена на терминальных историях $h \in Z$ и выражена через истинность соответствующих атомарных вхождений $\chi \in Atom(\Phi)$:
$$u(h) = \begin{cases} \mathsf{ver(h)}, & \text{если } \mathbb{M}, s_h \models \chi, \\ \mathsf{fals(h)}, & \text{если } \mathbb{M}, s_h \not\models \chi. \end{cases}$$

Теперь определим, когда $\mathrm{FOL}^{\nrightarrow}$-формула истинна в теоретико-игровой семантике.

Определение 3.2. Рассмотрим $\mathrm{FOL}^{\nrightarrow}$-формулу Φ, модель $\mathbb{M}$ и конечное означивание s в $\mathbb{M}$ с условием $\mathsf{dom}(s) \supseteq \mathsf{Free}(\Phi)$. Тогда

$$\mathbb{M}, s \models_{GTS} \Phi \iff \text{Элоиза обладает выигрышной стратегией в игре } \mathsf{G}(\mathbb{M}, s, \Phi).$$

[2] Чтобы выиграть в игре для $\sim \varphi$, верификатор должен опровергнуть φ. Это означает, что верификатор в игре для $\sim \varphi$ должен выступить в роли фальсификатора в игре для φ. Таким образом, символ отрицания инициирует смену ролей игроков.

Когда Φ является предложением, будем писать $\mathbb{M} \models_{GTS} \Phi$. Также обратим внимание [5], что теоретико-игровая и классическая семантики эквивалентны для $\mathrm{FOL}^{\not\to}$:

Теорема 3.3. *Рассмотрим* $\mathrm{FOL}^{\not\to}$*-формулу* Φ*, модель* $\mathbb{M}$ *и конечное означивание* s *в* $\mathbb{M}$ *с условием* $\mathsf{dom}(s) \supseteq \mathsf{Free}(\Phi)$*. Тогда*

$$\mathbb{M}, s \models_{GTS} \Phi \Leftrightarrow \mathbb{M}, s \models \Phi.$$

4. Реализуемость по Нельсону

Напомним определение семантики реализуемости по Нельсону из [2]. Рассмотрим эффективную нумерацию $\{g_e\}_{e\in N}$ частично-рекурсивных функций, для которой верна s-m-n-теорема. Зафиксируем некоторую общерекурсивную биекцию $[\cdot,\cdot]$ из $N \times N$ на N , через l и r обозначим левую и правую проекции соответственно. Т.е. для всех $\{n, k\} \subseteq N$,

$$l_{[n,k]} = n, \quad r_{[n,k]} = k \quad \text{и} \quad [l_n, r_n] = n.$$

Пусть $\Sigma_{\mathbb{N}} = \{0, \mathsf{s}, +, \times, =\}$ — сигнатура арифметики Пеано. Рассмотрим её стандартную модель $\mathbb{N} = \langle N; 0^{\mathbb{N}}, \mathsf{s}^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, \times^{\mathbb{N}}, =^{\mathbb{N}}\rangle$. Для любого числа $e \in N$, $\mathrm{FOL}^{\not\to}$-формулы Φ сигнатуры $\Sigma_{\mathbb{N}}$ и конечного означивания s в $\mathbb{N}$ с условием $\mathsf{dom}(s) \supseteq \mathsf{Free}(\Phi)$ определим по индукции отношения

$$e \circledR_p s, \Phi \quad \text{и} \quad e \circledR_n s, \Phi$$

следующим образом (at обозначает атомарную формулу):

`Позитивная реализуемость` $\circledR_p$

$$\begin{array}{lcl} e \circledR_p s, at & \Leftrightarrow & e = 0 \text{ и } \mathbb{N}, s \models at; \\ e \circledR_p s, \varphi \vee \psi & \Leftrightarrow & \text{либо } e = [1, k]\text{, где } k \circledR_p s, \varphi, \\ & & \text{либо } e = [2, k]\text{, где } k \circledR_p s, \psi; \\ e \circledR_p s, \exists x\, \varphi & \Leftrightarrow & e = [n, k] \text{ где } k \circledR_p \langle s\rangle^n_x, \varphi; \\ e \circledR_p s, \sim \varphi & \Leftrightarrow & e \circledR_n s, \varphi. \end{array}$$

`Негативная реализуемость` $\circledR_n$

$$\begin{array}{lcl} e \circledR_n s, at & \Leftrightarrow & e = 0 \text{ и } \mathbb{N}, s \not\models at; \\ e \circledR_n s, \varphi \vee \psi & \Leftrightarrow & e = [n, k]\text{, где } n \circledR_n s, \varphi \text{ и } k \circledR_n s, \psi; \\ e \circledR_n s, \exists x\, \varphi & \Leftrightarrow & \text{для всех } n \in N \text{ верно } g_e(n) \circledR_n \langle s\rangle^n_x, \varphi; \\ e \circledR_n s, \sim \varphi & \Leftrightarrow & e \circledR_p s, \varphi. \end{array}$$

Запись $e \circledR_p s, \Phi$ читается как *«e позитивно реализует Φ при означивании s»* или *«e является позитивной реализацией Φ при означивании s»*. Будем говорить, что Φ *позитивно реализуема при означивании* s тогда и только тогда, когда $e \circledR_p s, \Phi$ для некоторого натурального числа e. Аналогичным образом определяются термины для $\circledR_n$.

Каждую позитивную (негативную) реализацию Φ при означивании s можно рассматривать как код эффективной процедуры верификации (фальсификации) Φ в $\mathbb{N}$ при означивании s.

Для удобства, определения $\circledR_p$ и $\circledR_n$, описанные здесь, немного отличаются от определений из [2].

i. Поскольку в GTS не рассматриваются формулы с импликациями, мы ограничили реализуемость на язык $\mathrm{FOL}^{\not\to}$, хотя в [2] отношения для формул вида $\varphi \to \psi$ определены.
ii. Вместо первопорядковых $\Sigma_{\mathbb{N}}$-предложений мы используем пары (s, Φ), где Φ — $\mathrm{FOL}^{\not\to}$-формула сигнатуры $\Sigma_{\mathbb{N}}$ и s — конечное означивание в $\mathbb{N}$ с условием $\mathsf{dom}(s) \supseteq \mathsf{Free}(\Phi)$.
iii. Нельсон рассматривал примитивы $\wedge$ и $\forall$, хотя его условия для $\varphi \wedge \psi$ и $\forall x\, \varphi$ эквивалентны условиям для $\sim(\sim\varphi \vee \sim\psi)$ и $\sim\exists x \sim\varphi$. Мы будем считать эти примитивы определимыми.

По умолчанию $Ⓡ_p$ и $Ⓡ_n$ интерпретируются над $\mathbb{N}$. Однако подобные определения можно дать для любой конструктивной модели.

Также в [2] показана связь между выводимостью в арифметике и реализуемостью:

Теорема 4.1. *Если $FOL^{\not\to}$[3]-формула выводима в арифметике Нельсона[4], то она позитивно реализуема.*

В обратную сторону теорема не работает, поскольку множество позитивно реализумых формул арифметики Нельсона не является рекурсивно перечислимым.

5. Формальные теоретико-множественные стратегии и их эффективизация

В этой главе мы кратко напомним теоретико-множественный подход к рассмотрению стратегий из [3]. Все необходимые инструкции для выигрыша в игре можно описать формальными объектами теории множеств.

Рассмотрим $\mathrm{FOL}^{\not\to}$-формулу Φ, модель $\mathbb{M}$ и конечное означивание s в $\mathbb{M}$ с условием $\mathsf{dom}(s) \supseteq \mathsf{Free}(\Phi)$. Определим по индукции множества формальных стратегий

$$S^{+}(\mathbb{M}, s, \Phi) \quad \text{и} \quad S^{-}(\mathbb{M}, s, \Phi)$$

следующим образом (где снова at обозначает атомарную формулу):

<u>`Множества выигрышных стратегий верификатора`</u>

$$\begin{aligned}
S^{+}(\mathbb{M}, s, at) &:= \{0\}, \text{ если } \mathbb{M}, s \models at, \text{ и } \varnothing \text{ иначе;}\\
S^{+}(\mathbb{M}, s, \varphi \vee \psi) &:= \big(\{1\} \times S^{+}(\mathbb{M}, s, \varphi)\big) \bigcup \big(\{2\} \times S^{+}(\mathbb{M}, s, \psi)\big);\\
S^{+}(\mathbb{M}, s, \exists x\, \varphi) &:= \big\{\langle a, t\rangle \mid a \in M \text{ и } t \in S^{+}(\mathbb{M}, \langle s\rangle_x^a, \varphi)\big\};\\
S^{+}(\mathbb{M}, s, \sim\varphi) &:= S^{-}(\mathbb{M}, s, \varphi).
\end{aligned}$$

[3] В [2] говорится про любую формулу первого порядка, поэтому для языка $FOL^{\not\to}$ утверждение тоже верно.

[4] Арифметика Нельсона — теоретико-числовая система, предложенная в [2] — аналог арифметики Пеано.

Множества выигрышных стратегий фальсификатора

$$
\begin{aligned}
S^{-}(\mathbb{M}, s, at) &:= \{0\}, \text{ если } \mathbb{M}, s \not\models at, \text{ и } \varnothing \text{ иначе;}\\
S^{-}(\mathbb{M}, s, \varphi \vee \psi) &:= S^{-}(\mathbb{M}, s, \varphi) \times S^{-}(\mathbb{M}, s, \psi);\\
S^{-}(\mathbb{M}, s, \exists x\, \varphi) &:= \text{множество всех функций } f \text{ с } \mathsf{dom}(f) = M \text{ таких, что}\\
& f(a) \in S^{-}(\mathbb{M}, \langle s \rangle_x^a, \varphi) \text{ для каждого } a \in M;\\
S^{-}(\mathbb{M}, s, \sim \varphi) &:= S^{+}(\mathbb{M}, s, \varphi).
\end{aligned}
$$

Замечание 5.1. В [3] стратегии, у которых совпадают полезные множества, отождествляются. Можно сказать, что вместо самих стратегий рассматриваются классы эквивалентности по отношению $\delta_1 \sim \delta_2 \Leftrightarrow H_{\delta_1} = H_{\delta_2}$.

В [3] показано, что об элементах $S^{+}(\mathbb{M}, s, \Phi)$ и $S^{-}(\mathbb{M}, s, \Phi)$ можно думать как о выигрышных стратегиях Элоизы и Абеляра в игре $\mathsf{G}(\mathbb{M}, s, \Phi)$ с точностью до $\sim$.

Теорема 5.2. *Для любых* $\mathrm{FOL}^{\nrightarrow}$*-формулы* Φ*, модели* $\mathbb{M}$ *и конечного означивания* s *в* $\mathbb{M}$ *с условием* $\mathsf{dom}(s) \supseteq \mathsf{Free}(\Phi)$*, существуют такие канонические биекции* ι^{+} *и* ι^{-}*, что:*

- ι^{+} *отображает* $S^{+}(\mathbb{M}, s, \Phi)$ *на множество всех классов эквивалентности выигрышных стратегий Элоизы в игре* $\mathsf{G}(\mathbb{M}, s, \Phi)$ *по отношению* $\sim$*;*
- ι^{-} *отображает* $S^{-}(\mathbb{M}, s, \Phi)$ *на множество всех классов эквивалентности выигрышных стратегий Абеляра в игре* $\mathsf{G}(\mathbb{M}, s, \Phi)$ *по отношению* $\sim$*.*

Более того, в [3] показано, что об эффективных элементах $S^{+}(\mathbb{N}, s, \Phi)$ и $S^{-}(\mathbb{N}, s, \Phi)$ можно думать как о реализациях по Нельсону.

Пусть $\mathbb{S}^{\circ}\big(\circ \in \{+,-\}\big)$ — множество всех троек $\langle s, \Phi, t\rangle$ где Φ — $\mathrm{FOL}^{\nrightarrow}$-формула, s — конечное означивание в $\mathbb{N}$ с условием $\mathsf{dom}(s) \supseteq \mathsf{Free}(\Phi)$ и $t \in S^{\circ}(\mathbb{N}, s, \Phi)$. Определим функции

$$
\mathtt{E}^{+} : \mathbb{S}^{+} \to \mathcal{P}(N) \quad \text{и} \quad \mathtt{E}^{-} : \mathbb{S}^{-} \to \mathcal{P}(N)
$$

индукцией по сложности Φ следующим образом:

Для любой тройки $\langle s, \Phi, t\rangle$ из $\mathbb{S}^{+}$:

– если $\Phi = at$, то $t = 0$ и $\mathtt{E}^{+}(s, \Phi, t) = \{0\}$;

– если $\Phi = \varphi \vee \psi$, то $t = \langle i, t'\rangle$ для $i \in \{1, 2\}$ и подходящей [5] t', и

$$
\mathtt{E}^{+}(s, \Phi, t) \;=\; \big\{[1, k] \mid k \in \mathtt{E}^{+}(s, \varphi, t')\big\} \bigcup \big\{[2, k] \mid k \in \mathtt{E}^{+}(s, \psi, t')\big\};
$$

– если $\Phi = \exists x\, \varphi$, то $t = \langle n, t'\rangle$ для подходящих n и t', и

$$
\mathtt{E}^{+}(s, \Phi, t) \;=\; \big\{[n, k] \mid k \in \mathtt{E}^{+}\big(\langle s\rangle_x^n, \varphi, t'\big)\big\};
$$

– если $\Phi = \neg\varphi$, то $\mathtt{E}^{+}(s, \Phi, t) = \mathtt{E}^{-}(s, \varphi, t)$.

Для любой тройки $\langle s, \Phi, t\rangle$ из $\mathbb{S}^{-}$:

– если $\Phi = at$, то $t = 0$, и $\mathtt{E}^{-}(s, \Phi, t) = \{0\}$;

[5] Под "подходящими"понимаем объекты, удовлетворяющие свойствам из определений $S^{+}(\mathbb{N}, s, \Phi)$ и $S^{-}(\mathbb{N}, s, \Phi)$

– если $\Phi = \varphi \vee \psi$, то $t = \langle t_1, t_2 \rangle$ для подходящих t_1 и t_2, и

$$\mathtt{E}^-(s, \Phi, t) = \big\{[n, k] \mid n \in \mathtt{E}^-(s, \varphi, t_1) \text{ и } k \in \mathtt{E}^-(s, \psi, t_2)\big\};$$

– если $\Phi = \exists x\, \varphi$, то $t = f$ для подходящих f, и

$$\mathtt{E}^-(s, \Phi, t) = \big\{e \in N \mid \text{для всех } n \in N,\ g_e(n) \in \mathtt{E}^-\big(\langle s\rangle_x^n, \varphi, f(n)\big)\big\};$$

– если $\Phi = \neg\varphi$, то $\mathtt{E}^-(s, \Phi, t) = \mathtt{E}^+(s, \varphi, t)$.

Определение 5.3. Пусть Φ — $\mathrm{FOL}^{\nrightarrow}$-формула, s — конечное означивание в $\mathbb{N}$ с условием $\mathsf{dom}(s) \supseteq \mathsf{Free}(\Phi)$. Будем называть стратегию $t \in S^{\circ}(\mathbb{N}, s, \Phi)\big(\circ \in \{+, -\}\big)$ *эффективной*, если $E^{\circ}(s, \Phi, t) \neq \varnothing$.

Таким образом, если $t \in S^{\circ}(\mathbb{N}, s, \Phi)$, то каждый номер в $E^{\circ}(s, \Phi, t) \neq \varnothing$ кодирует алгоритм для вычисления t. Конечно, такой подход к эффективизации напоминает кодирование формул реализациями Нельсона. Собственно, в [3] показана эквивалентность этих двух подходов:

Предложение 5.4. *Пусть Φ — $\mathrm{FOL}^{\nrightarrow}$-формула сигнатуры $\Sigma_{\mathbb{N}}$ и s — конечное означивание в $\mathbb{N}$ с условием $\mathsf{dom}(s) \supseteq \mathsf{Free}(\Phi)$. Для любого числа $e \in N$ верны следующие утверждения:*

$$e \circledR_p s, \Phi \iff e \in \mathtt{E}^+(s, \Phi, t) \text{ для некоторой } t \in S^+(\mathbb{N}, s, \Phi),$$
$$e \circledR_n s, \Phi \iff e \in \mathtt{E}^-(s, \Phi, t) \text{ для некоторой } t \in S^-(\mathbb{N}, s, \Phi).$$

Более того, если выполнено условие слева, то t однозначно определена по e, s и Φ.

Можно считать, что цель этой статьи заключается в доказательстве аналога теоремы 5.4, где вместо эффективных теоретико-множественных стратегий рассматриваются эффективные теоретико-игровые стратегии.

6. Эффективные теоретико-игровые стратегии

Замечание 6.1. С этого момента все рассуждения будут рассматриваться только в контексте стандартной модели арифметики. Мы поступаем так, потому что реализуемость определена как раз для этой модели. Однако все результаты естественным образом распространяются на любую коструктивную модель, как и само определение реализуемости. Для краткости будем в дальнейшем писать $\mathsf{G}(s, \Phi)$ вместо $\mathsf{G}(\mathbb{N}, s, \Phi)$.

Мы рассмотрели два подхода к определению стратегий — *стандартный* и *формальный теоретико-множественный.* Также в [3], среди всех формальных стратегий, были выделены эффективные, а затем было показано, что коды эффективных формальных стратегий — это в точности реализации по Нельсону.

В этой главе мы определим *стандартные эффективные* стратегии, а также покажем, что множества таких стратегий и всех реализаций по Нельсону эффективно сводимы друг к другу.

Замечание 6.2. Зафиксируем $\mathrm{FOL}^{\nrightarrow}$-формулу Φ сигнатуры $\Sigma_{\mathbb{N}}$ и s — конечное означивание в $\mathbb{N}$ с условием $\mathsf{dom}(s) \supseteq \mathsf{Free}(\Phi)$.

Рассмотрим дерево $\langle H, \leq \rangle$, где H — множество всех историй игры $\mathsf{G}(s, \Phi)$, а $\leq$ — отношение из определения 2.1. Несложно заметить, что H — разрешимое множество, а $\leq$ — разрешимое отношение. Ещё заметим, что правила семантической игры гарантируют вычислимость функции определения верификатора $\mathsf{ver(h)}$ для $h \in H$. Из предыдущих выкладок и соотношения

$$H_{\exists} = \{h \in H \colon \mathsf{ver(h)} = \exists\}$$

заключаем, что множество историй $H_{\exists}$ также разрешимо. Аналогичным образом устанавливается разрешимость множества $H_{\forall}$.

Далее определим эффективным образом вхождение Φ_h, полученное разбором Φ в ходе истории $h \in H$, следующим образом:

$$\Phi_h = \begin{cases} \Phi, & \text{если } h = (s, \Phi), \\ \chi_1, & \text{если } h = (s, \Phi, \cdots, \chi_1), \\ \chi_2, & \text{если } h = (s, \Phi, \cdots, \exists x_1 \cdots \exists x_n \chi_2)^\frown((x_1, a_1), \cdots, (x_n, a_n)), \\ & (x_i, a_i) \in Var(\Phi) \times N. \end{cases}$$

Наконец, из соотношения

$$A(h) = \begin{cases} \varnothing, \text{ если } \Phi_h = at, \\ \{\varphi, \psi\}, \text{ если } \Phi_h = \varphi \vee \psi, \\ \{(x, a) \colon a \in N\}, \text{ если } \Phi_h = \exists x \varphi, \\ \{\varphi\}, \text{ если } \Phi_h = \sim \varphi, \end{cases}$$

заключаем, что множество всех действий игры $A = \bigcup_{h \in H} A(h)$ также разрешимо.

Таким образом, множества A, $H_{\exists}$, $H_{\forall}$ кодируются натуральными числами. Зафиксируем некоторую нумерацию этих множеств и перейдем к рассмотрению числового аналога стратегии $\delta_p \colon H_p \to A$.

Определение 6.3. Будем называть стратегию δ_p *эффективной*, если её числовой аналог g_e является частично-рекурсивной функцией. В таком случае за *номер эффективной стратегии* δ_p принимаем число e.

При условии, что игрок p следовал стратегии δ_p на протяжении всей игры, он не сможет дойти до историй из $H_p \backslash H_{\delta_p}$ (*бесполезное множество*). Следовательно, действие δ_p на таких историях не имеет никакого значения для игрока, а вся необходимая информация содержится в ограничении стратегии на полезное множество. Отсюда заключаем, что существуют стратегии, одинаковые содержательно, но различные с формальной точки зрения. В частности, стратегии, у которых совпадает полезное множество и которые согласованы на нём, могут отличаться в плане эффективности. Выделим стратегии, которые на бесполезных множествах ведут себя одинаково, т.е. в каждом классе эквивалентности

$$\delta_1 \sim \delta_2 \Leftrightarrow H_{\delta_1} = H_{\delta_2}$$

выделим некий канонический элемент.

Определение 6.4. Будем называть стратегию σ_p игрока p *полезной*, если для любой истории h из $H_p \backslash H_{\sigma_p}$ выполнено условие:

$$\sigma_p(h) = \mathsf{min}\{A(h)\},$$

где минимум берется по номерам элементов в множестве A.

Определение 6.5. Пусть X — некоторое разрешимое множество и g_e — его характеристическая функция. Тогда натуральное число e будем называть *индексом* множества X.

Предложение 6.6. *Справедливы следующие утверждения:*

- *если δ_p — эффективная стратегия, то H_{δ_p} — разрешимое полезное множество и его индекс эффективно вычисляется по номеру δ_p;*
- *если H_{σ_p} — разрешимое полезное множество для некоторой полезной стратегии σ_p, то σ_p — эффективная стратегия.*

Доказательство. Рассмотрим эффективную стратегию δ_p игрока p и характеристическую функцию соответствующего полезного множества H_{δ_p}:

$$char_{H_{\delta_p}}(h') = \begin{cases} 1, \text{ если для всех } h \lneqq h': \\ h \in H_p \Rightarrow h^\frown \delta_p(h) \leq h', \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Для вычисления функции требуется найти все начальные отрезки h', выбрать среди них принадлежащие H_p и для каждого полученного отрезка h проверить, выполняется ли одно из условий: $h^\frown \delta_p(h) \leq h'$. Все три шага алгоритма эффективны в силу конечного числа начальных отрезков h', разрешимости H_p и $\leq$, а также в силу эффективности δ_p.

Теперь пусть полезное множество H_{σ_p} разрешимо. Тогда частичная рекурсивность полезной стратегии σ_p становится очевидной при следующем её определении:

$$\sigma_p(h) = \begin{cases} (x, a), \text{ если } h^\frown(x, a) \in H_{\sigma_p}, \\ \varphi, \text{ если } h^\frown \varphi \in H_{\sigma_p}, \\ \mathsf{min}\{A(h)\}, \text{ иначе и при условии } h \in H_p. \end{cases}$$

□

Таким образом, полезные эффективные стратегии можно рассматривать и как рекурсивные функции, и как разрешимые множества.

6.1. **Преобразования стратегий.** Между рассмотренными подходами к определению стратегий есть одно существенное отличие: теоретико-игровые стратегии не обладают явной композициональной структурой, в отличие от реализаций. Поэтому мы определим конструкции, позволяющие работать с теоретико-игровыми стратегиями в композициональном ключе. В дальнейшем, к множествам всех историй и стратегий, к полезным множествам, а также к множествам H_p будем приписывать начальную историю, чтобы различать принадлежность этих объектов к разным играм. Например, запись $H(s_1, \Phi_1)$ будет обозначать множество всех историй игры $\mathsf{G}(s_1, \Phi_1)$, а для множества всех историй игры $\mathsf{G}(s_2, \Phi_2)$ мы используем обозначение $H(s_2, \Phi_2)$.

Пусть $h \in H(s, \Phi)$ и P — функция очереди из $\mathsf{G}(s, \Phi)$. Определим преобразование

$$[\ ]_h \colon \left\{h' \in H(s, \Phi) \mid h \leq h'\right\} \to H(s_h, \Phi_h)$$

следующим образом:

$$[h^\frown q]_h = (s_h, \Phi_h)^\frown q.$$

При этом истории $h^\frown q$ и $(s_h, \Phi_h)^\frown q$ отличаются только начальными сегментами h и (s_h, Φ_h), а дальше последовательность действий $q = (a_1, \cdots, a_n)$ совпадает.[6]Такое преобразование будем называть *проекцией историй вдоль* h.

Аналогичным образом определим *проекцию стратегий*. Для неё мы также будем использовать обозначение $[\ ]_h$:

$$[\ ]_h \colon \Delta_\exists(s,\Phi) \cup \Delta_\forall(s,\Phi) \to \Delta_{P(h)}(s_h,\Phi_h),$$
$$[\delta_p]_h\big([h^\frown q]_h\big) = \delta_p\,(h^\frown q)\,.$$

Одинаковое обозначение проекций историй и стратегий не приводит к неоднозначности, т.к. области определения у этих преобразований не пересекаются, и из контекста ясно, о какой функции идет речь.

Предложение 6.7. *Пусть заданы* $\mathrm{FOL}^{\nrightarrow}$*-формула* Φ *сигнатуры* $\Sigma_{\mathbb{N}}$*, конечное означивание* s *в* $\mathbb{N}$ *с условием* $\mathsf{dom}(s) \supseteq \mathsf{Free}(\Phi)$*, история* $h \in H(s,\Phi)$ *и стратегия* $\delta \in \Delta_p(s,\Phi)$*. Верны следующие утверждения:*

(1) *проекция истроpий вдоль* h *— биективная функция;*
(2) *числовой аналог проекции историй вдоль* h *— частично-рекурсивная функция;*
(3) $[\mathsf{dom}([\ ]_h) \cap H_p(s,\Phi)]_h = \begin{cases} H_p(s_h,\Phi_h), & \text{если } P(h)=\exists, \\ H_{\overline{p}}(s_h,\Phi_h), & \text{если } P(h)=\forall, \end{cases}$
где $\overline{p} \in \{\exists,\forall\}$ *и* $\overline{p} \neq p$*;*
(4) $[\mathsf{dom}([\ ]_h) \cap H_\delta(s,\Phi)]_h = H_{[\delta]_h}(s_h,\Phi_h)$*, при этом*
$$[\delta]_h \in \Delta_p(s_h,\Phi_h), \ \text{ если } P(h)=\exists,$$
$$[\delta]_h \in \Delta_{\overline{p}}(s_h,\Phi_h), \ \text{ если } P(h)=\forall;$$
(5) *если* H_δ *— разрешимое множество, то* $[H_\delta]_h$ *также разрешимое множество, и его индекс эффективно вычисляется по индексу* H_δ *и истории* h*;*
(6) *если* δ *— эффективная стратегия , то* $[\delta]_h$ *— также эффективная стратегия, и её номер эффективно вычисляется по номеру* δ_p *и истории* h*;*

Утверждения (1) и (2) следуют из построения проекции историй. Утверждения (3) и (4) проверяются разбором случаев, когда $\Phi_h = at$, $\Phi_h = \varphi \vee \psi$, $\Phi_h = \exists x\varphi$, $\Phi_h = \sim\varphi$. Последние два утверждения также следуют из построения проекции.

Замечание 6.8. Номер выигрышной эффективной полезной стратегии Элоизы будем сокращенно называть $\exists$-*newus* — аббревиатурой от английского *number of effective winning useful strategy*. Соответственно, номер выигрышной эффективной полезной стратегии Абеляра назовем $\forall$-*newus*.

Предложение 6.9. *Существуют такие частично-рекурсивные функции* μ_0^+ *и* μ_0^-*, что для любой бесквантроной* $\mathrm{FOL}^{\nrightarrow}$*-формулы* Φ *сигнатуры* $\Sigma_{\mathbb{N}}$*, конечного означивания* s *в* $\mathbb{N}$ *с условием* $\mathsf{dom}(s) \supseteq \mathsf{Free}(\Phi)$*, а также для любого*

[6]Очевидно, что остаточная последовательность q не является историей ни для какой игры, поскольку она состоит только из действий и не содержит начального означивания.

числа $e \in N$*, выполнены следующие эквивалентности:*

$$e Ⓡ_p s, \Phi \iff \mu_0^+(e, s, \Phi) \text{ — } \exists\text{-}newus \text{ в игре } \mathsf{G}(s, \Phi);$$
$$e Ⓡ_n s, \Phi \iff \mu_0^-(e, s, \Phi) \text{ — } \forall\text{-}newus \text{ в игре } \mathsf{G}(s, \Phi).$$

Доказательство. Везде, где есть необходимость, вместо самих объектов подразумеваются их числовые аналоги в соответствующих нумерациях: истории, формулы, переменные и т.д. В частности, будем считать числовые аналоги функций расходящимися на аргументах, на которых они явно не определены. Доказательство будем проводить индукцией по сложности формулы Φ.

Пусть Φ — атомарная формула. Зафиксируем некоторый номер a пустой функции и некоторый номер b произвольной непустой функции. Положим

$$\mu_0^+(e, s, \Phi) = \begin{cases} a, & \text{если } e = 0 \text{ и } \mathbb{N}, s \models \Phi, \\ b, & \text{иначе.} \end{cases}$$

и проверим требуемые эквивалентности.

$\Rightarrow$ Пусть $e Ⓡ_p s, \Phi$. Тогда $\mathbb{N}, s \models \Phi$ и $e = 0$. По построению получаем $\mu_0^+(e, s, \Phi) = a$ — $\exists$-*newus* для $\sigma_\exists = \{\varnothing\}$[7] в игре $\mathsf{G}(s, \Phi)$.

$\Leftarrow$ Пусть $e \not{Ⓡ}_p s, \Phi$. Тогда $e \neq 0$ или $\mathbb{N}, s \not\models \Phi$. По построению получаем $\mu_0^+(e, s, \Phi) = b$, но поскольку непустая функция в игре $\mathsf{G}(s, \Phi)$ никак не может быть стратегией, то $\mu_0^+(e, s, \Phi)$ в этом случае не является $\exists$-*newus*.

Для μ_0^- ситуация двойственная — функция возвращает a, если $e = 0$ и $\mathbb{N}, s \not\models \Phi$. В противном случае функция возвращает b. Доказательство требуемых эквивалентностей проводится аналогичным образом.

Пусть $\Phi = \varphi \vee \psi$. Введём обозначение истории, связанной с выбором Элоизы дизъюнктивного члена формулы в игре $\mathsf{G}(s, \varphi \vee \psi)$, а также определим вспомогательную функцию:

$$\langle \varphi, \psi \rangle_s^\chi = (s, \varphi \vee \psi, \chi), \text{ где } \chi \in \{\varphi, \psi\},$$
$$g_{\theta_1(n, \varphi, \psi, \chi)}(h) = \begin{cases} \chi, & \text{если } h = (s, \varphi \vee \psi), \chi \in \{\varphi, \psi\} \\ g_n\big([h]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\chi}\big), & \text{если } \langle \varphi, \psi \rangle_s^\chi \le h, \\ \mathsf{min}\{A(h)\}, & \text{если } \langle \varphi, \psi \rangle_s^{\overline{\chi}} \le h, \overline{\chi} \neq \chi. \end{cases}$$

В качестве аргументов выступают число $n \in N$, FOL$^{\nrightarrow}$-формулы φ, ψ, χ, история $h \in H_\exists(s, \varphi \vee \psi)$. Заметим, что существование общерекурсивной функции θ_1 гарантируется s-m-n-теоремой. Определим функцию μ_0^+ на формулах-дизъюнкциях:

$$\mu_0^+(e, s, \varphi \vee \psi) = \begin{cases} \theta_1\big(\mu_0^+(r_e, s, \varphi), \varphi, \psi, \varphi\big), & \text{если } l_e = 1, \\ \theta_1\big(\mu_0^+(r_e, s, \psi), \varphi, \psi, \psi\big), & \text{если } l_e = 2, \end{cases}$$

и докажем требуемые эквивалентности.

$\Rightarrow$ Пусть $e Ⓡ_p s, \varphi \vee \psi$. Рассмотрим случай, когда $l_e = 1$ и $r_e Ⓡ_p s, \varphi$. Тогда по индукционному предположению $\mu_0^+(r_e, s, \varphi)$ — $\exists$-*newus* в игре $\mathsf{G}(s, \varphi)$. С другой

[7] Множество нетерминальных историй в такой игре пустое, поэтому и сама стратегия является пустой.

стороны, в силу построения $\mu_0^+\big([1,r_e],s,\varphi\vee\psi\big)$,

$$g_{\mu_0^+(e,s,\varphi\vee\psi)}(h)=\begin{cases}\varphi,\ \text{если}\ h=(s,\varphi\vee\psi),\\ g_{\mu_0^+(r_e,s,\varphi)}\big([h]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}\big)\ \text{если}\ \langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi\leq h,\\ \mathsf{min}\{A(h)\},\ \text{если}\ \langle\varphi,\psi\rangle_s^\psi\leq h.\end{cases}$$

Легко проверить, что полученная функция является числовым аналогом выигрышной стратегии Элоизы в игре $\mathsf{G}(s,\varphi\vee\psi)$. При этом на бесполезном множестве стратегия определена так, чтобы она была эффективной. Следовательно, $\mu_0^+(e,s,\varphi\vee\psi)$ является $\exists$-$newus$. Случай, когда $l_e=2$, разбирается аналогично.

$\Leftarrow$ Пусть $e\not{\circledR}_p s,\varphi\vee\psi$ и $l_e=1$. Тогда $r_e\not{\circledR}_p s,\varphi$, и по индукционному предположению $\mu_0^+(r_e,s,\varphi)$ не является $\exists$-$newus$ в $\mathsf{G}(s,\varphi)$. Соответственно, функция $\mu_0^+(e,s,\varphi\vee\psi)=\theta_1\left(\mu_0^+(r_e,s,\varphi),\varphi,\psi,\varphi\right)$ никак не может быть $\exists$-$newus$ в $\mathsf{G}(s,\varphi\vee\psi)$ по построению. Случай, когда $l_e=2$, рассматривается аналогично, а если $l_e\not\in\{1,2\}$, то функция $\mu_0^+(e,s,\varphi\vee\psi)$ вовсе расходится.

Опеределим ещё одну вспомогательную функцию:

$$g_{\theta_2(n,m,\varphi,\psi)}(h)=\begin{cases}g_n\big([h]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}\big),\ \text{если}\ \langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi\leq h,\\ g_m\big([h]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\psi}\big),\ \text{если}\ \langle\varphi,\psi\rangle_s^\psi\leq h.\end{cases}$$

Параметры функции обладают тем же смыслом, что и параметры для θ_1, но с условием $h\in H_\forall(s,\varphi\vee\psi)$ и с добавлением ещё одного — числа $m\in N$. Как и в случае с θ_1, s-m-n-теорема гарантирует существование общерекурсивной функции θ_2. Общерекурсивность вводимых впоследствии вспомогательных функций также вытекает из s-m-n-теоремы, и мы уже не будем ссылаться на неё явным образом. Далее, положим

$$\mu_0^-(e,s,\varphi\vee\psi)=\theta_2\left(\mu_0^-(l_e,s,\varphi),\mu_0^-(r_e,s,\psi),\varphi,\psi\right),$$

и также проверим требуемые эквивалентности.

$\Rightarrow$ Пусть $e\circledR_n s,\varphi\vee\psi$. Тогда по определению реализуемости $l_e\circledR_n s,\varphi$ и $r_e\circledR_n s,\psi$. По индукционному предположению $\mu_0^-(l_e,s,\varphi)$ и $\mu_0^-(r_e,s,\psi)$ являются $\forall$-$newus$ в играх $\mathsf{G}(s,\varphi)$ и $\mathsf{G}(s,\psi)$ соответственно. С другой стороны, в силу построения $\mu_0^-(e,s,\varphi\vee\psi)$, имеем:

$$g_{\mu_0^-(e,s,\varphi\vee\psi)}(h)=\begin{cases}g_{\mu_0^-(l_e,s,\varphi)}\big([h]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}\big),\ \text{если}\ \langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi\leq h,\\ g_{\mu_0^-(r_e,s,\psi)}\big([h]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\psi}\big),\ \text{если}\ \langle\varphi,\psi\rangle_s^\psi\leq h.\end{cases}$$

Легко проверить, что полученная функция является числовым аналогом выигрышной стратегии Абеляра в игре $\mathsf{G}(s,\varphi\vee\psi)$, следовательно, $\mu_0^-(e,s,\varphi\vee\psi)$ является $\forall$-$newus$.

$\Leftarrow$ Пусть $e\not{\circledR}_n s,\varphi\vee\psi$. Тогда $l_e\not{\circledR}_n s,\varphi$ или $r_e\not{\circledR}_n s,\psi$. Если $l_e\not{\circledR}_n s,\varphi$, то по индукционному предположению $\mu_0^-(l_e,s,\varphi)$ не является $\forall$-$newus$ в игре $\mathsf{G}(s,\varphi)$, следовательно, функция $\mu_0^-(e,s,\varphi\vee\psi)$ по построению никак не может быть $\forall$-$newus$ в игре $\mathsf{G}(s,\varphi\vee\psi)$. Случай, когда $r_e\not{\circledR}_n s,\psi$, доказывается также.

Пусть $\Phi=\sim\varphi$. Определим $\langle\varphi\rangle_s^\sim=(s,\sim\varphi,\varphi)$ и введём ещё одну вспомогательную функцию, определённую на $H_\exists(s,\sim\varphi)$:

$$g_{\theta_3(m,\varphi)}(h)=g_m([h]_{\langle\varphi\rangle_s^\sim}).$$

Теперь положим

$$\mu_0^+(e,s,\sim\varphi) = \theta_3(\mu_0^-(e,s,\varphi),\varphi),$$
$$\mu_0^-(e,s,\sim\varphi) = \theta_3(\mu_0^+(e,s,\varphi),\varphi).$$

Требуемые эквивалентности следуют непосредственно из построения $\mu_0^\pm$ и тривиального индукционного перехода. $\square$

Теорема 6.10. *Существуют такие частично-рекурсивные функции μ^+ и μ^-, что для любой $\mathrm{FOL}^{\nrightarrow}$-формулы Φ сигнатуры $\Sigma_{\mathbb{N}}$, конечного означивания s в $\mathbb{N}$ с условием $\mathsf{dom}(s) \supseteq \mathsf{Free}(\Phi)$, а также для любого числа $e \in N$, выполнены следующие эквивалентности:*

$$e{\circledR}_p s,\Phi \iff \mu^+(e,s,\Phi) - \exists\text{-}\mathit{newus}\ \text{в игре}\ \mathsf{G}(s,\Phi);$$
$$e{\circledR}_n s,\Phi \iff \mu^-(e,s,\Phi) - \forall\text{-}\mathit{newus}\ \text{в игре}\ \mathsf{G}(s,\Phi).$$

Доказательство. Как и ранее, вместо самих объектов подразумеваем их числовые аналоги в соответствующих нумерациях. Построение искомых функций будем проводить индукцией по *кванторной сложности* формулы Φ, т.е. по максимальной длине цепочки вложенных в Φ кванторов. Более точно — при помощи возвратной рекурсии будет определена вычислимая последовательность функций

$$\mu_0^\pm,\cdots,\mu_n^\pm,\cdots,$$

а искомые частично-рекурсивные функции определим соотношением

$$\mu^\pm(e,s,\Phi) = \mu^\pm_{d(\Phi)}(e,s,\Phi),$$

где $d(\Phi)$ — кванторная сложность формулы Φ.

Функции $\mu_0^\pm$ построены в предложении 6.9. Далее предположим, что функции $\mu^\pm_{n-1}$ определены при $n>0$. Для формул с $d(\Phi)\le n-1$ положим

$$\mu_n^\pm(e,s,\Phi) = \mu^\pm_{n-1}(e,s,\Phi)$$

и перейдем к определению функций $\mu_n^\pm$ для формул $\varphi\vee\psi$ и $\sim\varphi$ кванторной сложности n:

$$\mu_n^+(e,s,\varphi\vee\psi) = \begin{cases}\theta_1\big(\mu_n^+(r_e,s,\varphi),\varphi,\psi,\varphi\big), & \text{если } l_e=1,\\ \theta_1\big(\mu_n^+(r_e,s,\psi),\varphi,\psi,\psi\big), & \text{если } l_e=2,\end{cases}$$
$$\mu_n^-(e,s,\varphi\vee\psi) = \theta_2\left(\mu_n^-(l_e,s,\varphi),\mu_n^-(r_e,s,\psi),\varphi,\psi\right),$$

$$\mu_n^+(e,s,\sim\varphi) = \theta_3(\mu_n^-(e,s,\varphi),\varphi),$$
$$\mu_n^-(e,s,\sim\varphi) = \theta_3(\mu_n^+(e,s,\varphi),\varphi).$$

Требуемые эквивалентности проверяем как в предложении 6.9, но при этом естественно заменяя нижние индексы на n.

Пусть $\Phi=\exists x\varphi$. Определим $\langle x,\varphi\rangle_s^i = (s,\exists x\varphi,(x,i))$ и введём ещё одну вспомогательную функцию, определённую на $H_\exists(s,\exists x\varphi)$:

$$g_{\theta_4(i,m,x,\varphi)}(h) = \begin{cases}(x,i), & \text{если } h=(s,\exists x\varphi),\\ g_m\big([h]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}\big), & \text{если } \langle x,\varphi\rangle_s^i \le h,\\ \mathsf{min}\{A(h)\}, & \text{если } \langle x,\varphi\rangle_s^{\bar i}\le h, \bar i\ne i.\end{cases}$$

Теперь положим

$$\mu_n^+(e,s,\exists x\varphi)=\theta_4\left(l_e,\mu_{n-1}^+(r_e,\langle s\rangle_x^{l_e},\varphi),x,\varphi\right)$$

и проверим требуемые эквивалентности.

$\Rightarrow$ Пусть $e\circledR_p s,\exists x\varphi$. Тогда по определению реализуемости $r_e\circledR_p\langle s\rangle_x^{l_e},\varphi$, и по индукционному предположению $\mu_n^+\left(r_e,\langle s\rangle_x^{l_e},\varphi\right)$ является $\exists$-*newus* в игре $\mathsf{G}\left(\langle s\rangle_x^{l_e},\varphi\right)$. С другой стороны, в силу построения $\mu_n^+(e,s,\exists x\varphi)$,

$$g_{\mu_n^+(e,s,\exists x\varphi)}(h)=\begin{cases}(x,l_e), \text{ если } h=(s,\exists x\varphi),\\ g_{\mu_{n-1}^+(r_e,\langle s\rangle_x^{l_e},\varphi)}\left([h]_{\langle x,\varphi\rangle_s^{l_e}}\right), \text{ если } \langle x,\varphi\rangle_s^{l_e}\le h,\\ \mathsf{min}\{A(h)\}, \text{ если } \langle x,\varphi\rangle_s^{\bar{i}}\le h, \bar{i}\ne l_e.\end{cases}$$

Легко проверить, что полученная функция является числовым аналогом выигрышной стратегии Элоизы в игре $\mathsf{G}(s,\exists x\varphi)$, следовательно, $\mu_n^+(e,s,\exists x\varphi)$ является $\exists$-*newus*.

$\Leftarrow$ Пусть $e\not\circledR_p s,\exists x\varphi$. Тогда $r_e\not\circledR_p\langle s\rangle_x^i,\varphi$ при любом $i\in N$, и по индукционному предположению $\mu_n^+\left(r_e,\langle s\rangle_x^i,\varphi\right)$ не является $\exists$-*newus* в игре $\mathsf{G}\left(\langle s\rangle_x^i,\varphi\right)$ ни при каком i. Соответственно, функция $\mu_n^+(e,s,\exists x\varphi)$ никак не может быть $\exists$-*newus* в игре $\mathsf{G}(s,\exists x\varphi)$ по построению.

Определим последнюю вспомогательную функцию на $H_\forall(s,\exists x\varphi)$

$$g_{\theta_5(n,m,x,\varphi)}(h)=g_{g_n(g_m(i),\langle s\rangle_x^i,\varphi)}\left([h]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}\right), \text{ если } \langle x,\varphi\rangle_s^i\le h,$$

где $g_n\left(g_m(i),\langle s\rangle_x^i,\varphi\right)$ обозначает частично-рекурсивную функцию с номером n от трёх аргументов. Теперь положим

$$\mu_n^-(e,s,\exists x\varphi)=\ \theta_5(M^\varphi,e,x,\varphi),$$

где M^φ — номер следующей функции:

$$g_{M^\varphi}(e,s,\chi)=\begin{cases}\mu_{n-1}^-(e,s,\chi), \text{ если } d(\chi)\le d(\varphi),\\ \uparrow \text{ иначе.}\end{cases}$$

Доказательство эквивалентностей теоремы для μ_n^- следует из соотношения:

$$g_{\mu_n^-(e,s,\exists x\varphi)}(h)=g_{\mu_{n-1}^-(g_e(i),\langle s\rangle_x^i,\varphi)}\left(\left[h\right]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}\right), \langle x,\varphi\rangle_s^i\le h.$$

Во-первых, все истории Абеляра в игре $\mathsf{G}(s,\exists x\varphi)$ имеют вид $\langle x,\varphi\rangle_s^i{}^\frown q$, поэтому стратегия определена исключительно на историях такого вида. Во-вторых, чтобы вычислить действие на $(s,\exists x\varphi,(x,i),\cdots)$, достаточно вычислить действие стратегии для маленькой игры $\mathsf{G}\left(\langle s\rangle_x^i,\varphi\right)$ на проекции истории $(s,\exists x\varphi,(x,i),\cdots)$ вдоль $\langle x,\varphi\rangle_s^i$. Последнее равенство как раз отражает эту идею.

Таким образом, функции $\mu_n^\pm$ определены, а также для них доказаны эквивалентности из формулировки теоремы. Ясно, что последовательности функций μ_n^+ и μ_n^-, $n\in N$, вычислимы, поэтому искомые функции $\mu^\pm$ вычислимы и определены для формул любой кванторной сложности, то есть вообще для всех формул. Требуемые эквивалентности для функций $\mu^\pm$ немедленно следуют из доказанных ранее эквивалентностей для функций $\mu_n^\pm$. □

Предложение 6.11. *Пусть X — множество номеров пустой функции. Существуют такие вычислимые с оракулом X функции τ_0^+ и τ_0^-, что для любой бесквантроной* FOL$^{\rightsquigarrow}$*-формулы Φ сигнатуры $\Sigma_{\mathbb{N}}$, конечного означивания s в*

$\mathbb{N}$ *с условием* $\mathsf{dom}(s) \supseteq \mathsf{Free}(\Phi)$, *а также для любого числа* $e \in N$, *выполнены следующие эквивалентности:*

$$e \text{ — } \exists\text{-}newus \text{ в игре } \mathsf{G}(s,\Phi) \iff \tau_0^+(e,s,\Phi)\circledR_p s,\Phi;$$
$$e \text{ — } \forall\text{-}newus \text{ в игре } \mathsf{G}(s,\Phi) \iff \tau_0^-(e,s,\Phi)\circledR_n s,\Phi.$$

Доказательство. Пусть Φ — атомарная формула. Положим

$$\tau_0^+(e,s,\Phi) = \begin{cases} 0, & \text{если } e \in X \text{ и } \mathbb{N}, s \models \Phi, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

и перейдем к доказательству эквивалентностей.

$\Rightarrow$ Пусть e — $\exists$-$newus$ в игре $\mathsf{G}(s,\Phi)$. С необходимостью $g_e = \varnothing$ и $\mathbb{N}, s \models \Phi$. Тогда $\tau_0^+(e,s,\Phi) = 0$, и по определению реализуемости $\tau_0^+(e,s,\Phi)\circledR_p s,\Phi$.

$\Leftarrow$ Пусть $\tau_0^+(e,s,\Phi)\circledR_p s,\Phi$. Тогда по определению реализуемости $\tau_0^+(e,s,\Phi) = 0$, откуда заключаем $g_e = \varnothing$, $\mathbb{N}, s \models \Phi$ и e — $\exists$-$newus$ в игре $\mathsf{G}(s,\Phi)$.

Построение τ_0^- для атомарных формул и доказательство теоремы проводится двойственным образом.

Пусть $\Phi = \varphi \vee \psi$. Положим

$$\tau_0^+(e,s,\varphi\vee\psi) = \begin{cases} \big[1, \tau_0^+\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}, s, \varphi\big)\big], & \text{если } g_e\big((s,\varphi\vee\psi)\big) = \varphi, \\ \big[2, \tau_0^+\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\psi}, s, \psi\big)\big], & \text{если } g_e\big((s,\varphi\vee\psi)\big) = \psi, \end{cases}$$

и перейдём к доказательству требуемых эквивалентностей.

$\Rightarrow$ Пусть e — $\exists$-$newus$ в игре $\mathsf{G}(s,\varphi\vee\psi)$. Рассмотрим случай, когда $g_e\big((s,\varphi\vee\psi)\big) = \varphi$. Тогда $[e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}$ — $\exists$-$newus$ в игре $\mathsf{G}(s,\varphi)$ и по индукционному предположению $\tau_0^+\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}, s, \varphi\big)\circledR_p s,\varphi$. Далее, в силу определения реализуемости и построения $\tau_0^+(e,s,\varphi\vee\psi)$, заключаем $\tau_0^+(e,s,\varphi\vee\psi)\circledR_p s,\varphi\vee\psi$. Случай, когда $g_e\big((s,\varphi\vee\psi)\big) = \psi$, доказывается аналогичным образом.

$\Leftarrow$ Пусть $\tau_0^+(e,s,\varphi\vee\psi)\circledR_p s,\varphi\vee\psi$. Тогда по определению реализуемости

$$l_{\tau_0^+(e,s,\varphi\vee\psi)} = 1 \text{ и } r_{\tau_0^+(e,s,\varphi\vee\psi)}\circledR_p s,\varphi, \text{ или}$$
$$l_{\tau_0^+(e,s,\varphi\vee\psi)} = 2 \text{ и } r_{\tau_0^+(e,s,\varphi\vee\psi)}\circledR_p s,\psi.$$

Рассмотрим случай, когда $l_{\tau_0^+(e,s,\varphi\vee\psi)} = 1$. Тогда по построению

$$\tau_0^+(e,s,\varphi\vee\psi) = \Big[1, \tau_0^+\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}, s, \varphi\big)\Big] \text{ и } \tau_0^+\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}, s, \varphi\big)\circledR_p s,\varphi.$$

В силу индукционного предположения $\tau_0^+\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}, s, \varphi\big)$ — $\exists$-$newus$ в игре $\mathsf{G}(s,\varphi)$. Тогда функция

$$f(h) = \begin{cases} \varphi, & \text{если } h = (s,\varphi\vee\psi), \\ g_{[e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}}\big([h]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}\big), & \text{если } \langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi \le h, \\ \mathsf{min}\{A(h)\}, & \text{если } \langle\varphi,\psi\rangle_s^\psi \le h, \end{cases}$$

где $h \in H_\exists(s,\varphi\vee\psi)$, является эффективной выигрышной стратегией в игре $\mathsf{G}(s,\varphi\vee\psi)$. Но с другой стороны, $f(h) = g_e(h)$ для любой истории $h \in H_\exists(s,\varphi\vee\psi)$. В самом деле, из построения $\tau_0^+(e,s,\varphi\vee\psi)$ следует $g_e\big((s,\varphi\vee\psi)\big) = \varphi$, а из определения проекции стратегий следует

$$f\big(\langle\varphi,\psi\rangle_s^{\varphi\frown} q\big) = g_{[e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}}\Big(\big[\langle\varphi,\psi\rangle_s^{\varphi\frown} q\big]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}\Big) = g_e\big(\langle\varphi,\psi\rangle_s^{\varphi\frown} q\big).$$

Таким образом, e — $\exists$-$newus$ в игре $\mathsf{G}(s,\varphi\vee\psi)$.

Далее положим

$$\tau^-(e,s,\varphi\vee\psi)=\Big[\tau_0^-\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi},s,\varphi\big),\tau_0^-\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\psi},s,\psi\big)\Big]$$

и также докажем эквивалентности.

$\Rightarrow$ Пусть e — $\forall$-*newus* в игре $\mathsf{G}(s,\varphi\vee\psi)$. Тогда $[e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}$ — $\forall$-*newus* в игре $\mathsf{G}(s,\varphi)$, а $[e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\psi}$ — $\forall$-*newus* в игре $\mathsf{G}(s,\psi)$. По индукционному предположению

$$\tau_0^-\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi},s,\varphi\big)Ⓡ_n s,\varphi \text{ и } \tau_0^-\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\psi},s,\psi\big)Ⓡ_n s,\psi.$$

Теперь, из определения реализуемости и построения $\tau_0^-(e,s,\varphi\vee\psi)$, непосредственно заключаем $\tau_0^-\big(e,s,\varphi\vee\psi\big)Ⓡ_n s,\varphi\vee\psi$.

$\Leftarrow$ Пусть $\tau_0^+(e,s,\varphi\vee\psi)Ⓡ_n s,\varphi\vee\psi$. Тогда по определению реализуемости

$$l_{\tau_0^-(e,s,\varphi\vee\psi)}Ⓡ_n s,\varphi \text{ и } r_{\tau_0^-(e,s,\varphi\vee\psi)}Ⓡ_n s,\psi.$$

Из построения $\tau_0^-(e,s,\varphi\vee\psi)$ следует

$$\tau_0^-\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi},s,\varphi\big)Ⓡ_n s,\varphi \text{ и } \tau_0^-\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\psi},s,\psi\big)Ⓡ_n s,\psi.$$

В силу индукционного предположения $\tau_0^-\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi},s,\varphi\big)$ — $\forall$-*newus* в игре $\mathsf{G}(s,\varphi)$, а $\tau_0^-\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\psi},s,\psi\big)$ — $\forall$-*newus* в игре $\mathsf{G}(s,\psi)$. Тогда функция

$$f(h)=\begin{cases} g_{[e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}}\big([h]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}\big), & \text{если } \langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi\le h,\\ g_{[e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\psi}}\big([h]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\psi}\big), & \text{если } \langle\varphi,\psi\rangle_s^\psi\le h,\end{cases}$$

где $h\in H_\forall(s,\varphi\vee\psi)$, является эффективной выигрышной стратегией в игре $\mathsf{G}(s,\varphi\vee\psi)$. Но с другой стороны, $f(h)=g_e(h)$ для любой истории $h\in H_\forall(s,\varphi\vee\psi)$, поскольку

$$f\big(\langle\varphi,\psi\rangle_s^{\varphi\frown}q\big)=g_{[e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}}\Big(\big[\langle\varphi,\psi\rangle_s^{\varphi\frown}q\big]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\varphi}\Big)=g_e\big(\langle\varphi,\psi\rangle_s^{\varphi\frown}q\big),$$
$$f\big(\langle\varphi,\psi\rangle_s^{\psi\frown}q\big)=g_{[e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\psi}}\Big(\big[\langle\varphi,\psi\rangle_s^{\psi\frown}q\big]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^\psi}\Big)=g_e\big(\langle\varphi,\psi\rangle_s^{\psi\frown}q\big).$$

Таким образом, e — $\forall$-*newus* в игре $\mathsf{G}(s,\varphi\vee\psi)$.

Рассмотрим последний случай бескванторных формул $\Phi=\sim\varphi$ и определеим для них τ_0^+ и τ_0^-:

$$\tau_0^+(e,s,\sim\varphi)=\tau_0^-(e,s,\varphi),$$
$$\tau_0^-(e,s,\sim\varphi)=\tau_0^+(e,s,\varphi).$$

Требуемые эквивалентности следуют непосредственно из построения $\tau_0^\pm$ и тривиального индукционного перехода. □

Теорема 6.12. *Пусть X — множество номеров пустой функции. Существуют такие вычислимые с оракулом X функции τ^+ и τ^-, что для любой* FOL$^{\nrightarrow}$*-формулы Φ сигнатуры $\Sigma_\mathbb{N}$, конечного означивания s в $\mathbb{N}$ с условием* $\mathsf{dom}(s)\supseteq\mathsf{Free}(\Phi)$*, а также для любого числа $e\in N$, выполнены следующие эквивалентности:*

$$e \text{ — } \exists\text{-}newus \text{ в игре } \mathsf{G}(s,\Phi) \iff \tau^+(e,s,\Phi)Ⓡ_p s,\Phi;$$
$$e \text{ — } \forall\text{-}newus \text{ в игре } \mathsf{G}(s,\Phi) \iff \tau^-(e,s,\Phi)Ⓡ_n s,\Phi.$$

Доказательство. Поступим также, как в теореме 6.10, т.е. при помощи возвратной рекурсии определим вычислимую последовательность функций

$$\tau_0^{\pm}, \cdots, \tau_n^{\pm}, \cdots,$$

а искомые функции определим соотношением

$$\tau^{\pm}(e, s, \Phi) = \tau^{\pm}_{d(\Phi)}(e, s, \Phi).$$

Функции $\tau_0^{\pm}$ построены в предложении 6.11. Далее предположим, что функции $\tau^{\pm}_{n-1}$ определены при $n > 0$. Для формул с $d(\Phi) \leq n-1$ положим

$$\tau_n^{\pm}(e, s, \Phi) = \tau^{\pm}_{n-1}(e, s, \Phi)$$

и перейдем к определению функций $\tau_n^{\pm}$ для формул $\varphi \vee \psi$ и $\sim \varphi$ кванторной сложности n:

$$\tau_n^+(e, s, \varphi \vee \psi) = \begin{cases} \big[1, \tau_n^+\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^{\varphi}}, s, \varphi\big)\big], \text{ если } g_e\big((s, \varphi \vee \psi)\big) = \varphi, \\ \big[2, \tau_n^+\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^{\psi}}, s, \psi\big)\big], \text{ если } g_e\big((s, \varphi \vee \psi)\big) = \psi, \end{cases}$$

$$\tau_n^-(e, s, \varphi \vee \psi) = \Big[\tau_0^-\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^{\varphi}}, s, \varphi\big), \tau_0^-\big([e]_{\langle\varphi,\psi\rangle_s^{\psi}}, s, \psi\big)\Big],$$

$$\tau_n^+(e, s, \sim \varphi) = \tau_n^-(e, s, \varphi),$$
$$\tau_n^-(e, s, \sim \varphi) = \tau_n^+(e, s, \varphi).$$

Требуемые эквивалентности проверяем как в предложении 6.11, но при этом естественно заменяя нижние индексы на n.

Пусть $\Phi = \exists x\varphi$. Положим

$$\tau_n^+(e, s, \exists x\varphi) = \Big[i, \tau^+_{n-1}\big([e]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}, \langle s\rangle_x^i, \varphi\big)\Big], \text{ где } i = g_e\big((s, \exists x\varphi)\big)$$

и снова проверим эквивалентности.

$\Rightarrow$ Пусть e — $\exists$-*newus* в $\mathsf{G}(s, \exists x\varphi)$ и $i = g_e\big((s, \exists x\varphi)\big)$. Тогда $[e]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}$ — $\exists$-*newus* в игре $\mathsf{G}\big(\langle s\rangle_x^i, \varphi\big)$. По индукционному предположению

$$\tau_n^+\big([e]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}, \langle s\rangle_x^i, \varphi\big) \circledR_p \langle s\rangle_x^i, \varphi,$$

следовательно, по определению реализуемости и по построению τ_n^+ заключаем $\tau_n^+(e, s, \varphi) \circledR_p s, \exists x\varphi$.

$\Leftarrow$ Пусть $\tau_n^+(e, s, \exists x\varphi) \circledR_p s, \exists x\varphi$. Тогда из построения τ_n^+ и из определения реализуемости следует

$$\tau_n^+(e, s, \exists x\varphi) = \Big[i, \tau_n^+\big([e]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}, \langle s\rangle_x^i, \varphi\big)\Big]$$

для некоторого числа $i \in N$. По индукционному предположению $[e]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}$ — $\exists$-*newus* в игре $\mathsf{G}\big(\langle s\rangle_x^i, \varphi\big)$. Тогда функция

$$f(h) = \begin{cases} i, \text{ если } h = (s, \exists x\varphi), \\ g_{[e]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}}\big([h]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}\big), \text{ если } \langle x, \varphi\rangle_s^i \leq h, \\ \min\{A(h)\}, \text{ если } \langle x, \varphi\rangle_s^{\bar{i}} \leq h, \bar{i} \neq i, \end{cases}$$

где $h \in H_{\exists}(s, \exists x\varphi)$, будет являться эффективной выигрышной стратегией в игре $\mathsf{G}(s, \exists x\varphi)$. Но поскольку $i = g_e\big((s, \exists x\varphi)\big)$ и

$$g_{[e]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}}\big([h]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}\big) = g_e(h),$$

получаем $f(h) = g_e(h)$ при любых $h \in H_\exists(s, \exists x\varphi)$. Следовательно, e — $\exists$-*newus* в $\mathsf{G}(s, \exists x\varphi)$.

Теперь определим вычислимую функцию T^φ:

$$T^\varphi(e, s, \psi) = \begin{cases} \tau_{n-1}^-(e, s, \psi), \text{ если } d(\psi) \leq d(\varphi), \\ \uparrow \text{ иначе.} \end{cases}$$

и положим $\tau_n^-(e, s, \exists x\varphi)$:

$$g_{\tau_n^-(e,s,\exists x\varphi)}(i) = T^\varphi\big([e]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}, \langle s\rangle_x^i, \varphi\big).$$

$\Rightarrow$ Пусть e — $\forall$-*newus* в $\mathsf{G}(s, \exists x\varphi)$. Тогда, для любого i, $[e]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}$ — $\forall$-*newus* в $\mathsf{G}\big(\langle s\rangle_x^i, \varphi\big)$. По индукционному предположению, для любого i верно

$$\tau_n^-\big([e]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}, \langle s\rangle_x^i, \varphi\big) \circledR_n \langle s\rangle_x^i, \varphi.$$

Но поскольку кванторная сложность $d(\varphi) = n-1$, то $\tau_n^-(\cdots, \varphi) = \tau_{n-1}^-(\cdots, \varphi)$, следовательно, для любого i

$$\tau_{n-1}^-\big([e]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}, \langle s\rangle_x^i, \varphi\big) \circledR_n \langle s\rangle_x^i, \varphi.$$

Наконец, по построению $\tau_n^-(e, s, \exists x\varphi)$ и по определению реализуемости, получаем $\tau_n^-(e, s, \exists x\varphi) \circledR_n s, \exists x\varphi$.

$\Leftarrow$ Пусть $\tau_n^-(e, s, \exists x\varphi) \circledR_n s, \exists x\varphi$. Тогда для любого i

$$g_{\tau_n^-(e,s,\exists x\varphi)}(i) \circledR_n \langle s\rangle_x^i, \varphi$$

и из построения $\tau_n^-(e, s, \exists x\varphi)$ непосредственно следует, что для любого i

$$\tau_{n-1}\big([e]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}, \langle s\rangle_x^i, \varphi\big) \circledR_n \langle s\rangle_x^i, \varphi.$$

По индукционному предположению, для любого i, $[e]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}$ — $\forall$-*newus* в игре $\mathsf{G}\big(\langle s\rangle_x^i, \varphi\big)$. Тогда функция

$$f\big(\langle x,\varphi\rangle_s^i \frown q\big) = g_{[e]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}}\Big(\big[\langle x,\varphi\rangle_s^i \frown q\big]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}\Big),$$

где $h \in H_\forall(s, \exists x\varphi)$, будет являться эффективной выигрышной стратегией. Но последнее соотношение можно продолжить

$$f\big(\langle x,\varphi\rangle_s^i \frown q\big) = g_{[e]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}}\Big(\big[\langle x,\varphi\rangle_s^i \frown q\big]_{\langle x,\varphi\rangle_s^i}\Big) = g_e\big(\langle x,\varphi\rangle_s^i \frown q\big).$$

Отсюда заключаем, что e — $\forall$-*newus* в $\mathsf{G}(s, \exists x\varphi)$.

Таким образом, по аналогии с доказательством теоремы 6.10, определены функции $\tau_n^\pm$ и для них доказаны требуемые эквивалентности. Из построения следует вычислимость последовательностей функций τ_n^+ и τ_n^-, $n \in N$, поэтому искомые функции $\tau^\pm$ вычислимы и определены для формул любой кванторной сложности, то есть вообще для всех формул. Требуемые эквивалентности для функций $\tau^\pm$ также следуют из доказанных ранее эквивалентностей для функций $\tau_n^\pm$. $\square$

7. Заключение

Хинтикка полагает, что конструктивисты при определении GTS для логики IF-FOL [8] потребовали бы от стратегий быть вычислимыми функциями. По сути мы последовали этой идее и аккуратно рассмотрели семантические игры для $\mathrm{FOL}^{\nrightarrow}$ с точки зрения теории вычислимости. При этом было сделано следующее.

- Введено понятие полезной стратегии для семантической игры в $\mathrm{FOL}^{\nrightarrow}$, которое позволяет обойти проблему существования стратегий, одинаковых качественно, но отличных формально.
- Определены эффективные стратегии и полезные эффективные стратегии для семантических игр в $\mathrm{FOL}^{\nrightarrow}$.
- Определена надстройка понятий, позволяющих рассматривать GTS для $\mathrm{FOL}^{\nrightarrow}$ как композициональную семантику.
- Построены алгоритмы, позволяющие по эффективной стратегии получить реализацию по Нельсону, и наоборот.

В дальнейшем планируется распространить результаты с $\mathrm{FOL}^{\nrightarrow}$ на IF-FOL. Таким образом, будет получено сильное подспорье к выводам из [3], т.к. оба подхода — стандартный теоретико-игровой и нестандартный теоретико-множественный — привели к одним и тем же результатам.

References

[1] J. Hintikka, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge: Cambridge University Press, 1996. Zbl 0869.03003

[2] D. Nelson, *Constructible falsity*, Journal of Symbolic Logic, **14**:1 (1949), 16–26. Zbl 0033.24304

[3] S. P. Odintsov, S. O. Speranski and I. Yu. Shevchenko, *Hintikka's independence-friendly logic meets Nelson's realizability*, Studia Logica, First Online: 14.10.2017.

[4] M. J. Osborne, A. Rubinstein, *A Course in Game Theory*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1994. Zbl 1194.91003

[5] A. L. Mann, G. Sandu and M. Sevenster, *Independence-Friendly Logic. A game-theoretic approach*, Cambridge: Cambridge University Press, 2011. Zbl 1218.03002

Igor Yurievich Shevchenko
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: i.yur.shevchenko@gmail.com

[8]IF-FOL — расширение логики первого порядка, являющееся основным объектом изучения в [1] и [3]