S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 638–647 (2019) УДК 519.17
DOI 10.33048/semi.2019.16.041 MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{39,36,22;1,2,18\}$

А.А. МАХНЕВ, М.М. ХАМГОКОВА

Abstract. Prime divisors of orders of automorphisms and the fixed point subgraphs of automorphisms of prime orders are studied for a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{39,36,22;1,2,18\}$. Let $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ is nonsolvable group, $\bar{G} = G/S(G)$ and $\bar{T}$ is the socle of $\bar{G}$. If Γ is vertex-symmetric then $\bar{T} = L \times M$ and $L, M \cong Z_5, A_5, A_6$ or $PSp(4,3)$.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a,b)$ (через $\lambda(a,b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*).

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathcal{L}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит ровно $s+1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой, и для любого антифлага $(a,l) \in (P,\mathcal{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекаюших l (обозначение $pG_\alpha(s,t)$). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s,t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с $v = (s+1)(1+st/\alpha)$,

Makhnev, A.A., Khamgokova, M.M., On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{39,36,22;1,2,18\}$.

Поступила 21 марта 2019 г., опубликована 17 мая 2019 г.

$k = s(t+1)$, $\lambda = s-1+t(\alpha-1)$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечения графа Γ (см. [1]).

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется e-кодом, если минимальное расстояний между двумя вершинами из C не меньше $2e+1$. Для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $|C| \le p^d_{dd} + 2$. В случае равенства код называется максимальным. Для максимального e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $c_d \ge a_d p^d_{dd}$. В случае равенства код называется локально регулярным. Наконец, для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $|C| \le k_d / \sum_{i=0}^{e} p^d_{id} + 1$. В случае равенства код называется совершенным относительно последней окрестности (см. [2]).

Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код C, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности, то по [2, предложение 5] Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3, c = c_2, p = p^3_{33}$. Гораздо чаще могут встретиться 1-коды, совершенные относительно последней окрестности.

В [3] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов с $\lambda = 2$ и числом вершин, не большим 4096. А.А. Махневым и М.С. Нировой предложена программа изучения автоморфизмов дистанционно регулярных графов из полученного списка.

В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{39, 36, 22; 1, 2, 18\}$. Максимальный порядок клики C из Γ не больше 4. Граф с массивом пересечений $\{39, 36, 22; 1, 2, 18\}$ имеет $v = 1 + 39 + 702 + 858 = 1600$ вершин и спектр $39^1, 9^{416}, -1^{858}, -9^{325}$. Далее, граф Γ_3 является псевдогеометрическим для сети $pG_{21}(39, 21)$. Пусть Γ_3 содержит 40-клику C. Так как $(|C|-1)(a_3+1) = k_3$, то C является кодом, совершенным относительно последней окрестности.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{39, 36, 22; 1, 2, 18\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф,* $p=2$, $\alpha_1(g)=10r+26m+12$ *и* $\alpha_3(g)=80r$ *или* $p=5$, $\alpha_1(g)=65n+10l+10$ *и* $\alpha_3(g)=200l$*;*

(2) Ω *является* n*-кликой, либо* $n=1$, $p=3$, $\alpha_1(g)=15l+24+39m$ *и* $\alpha_3(g)=120l+36$, *либо* $n=2$, $p=2$, $\alpha_1(g)=10l+26m$ *и* $\alpha_3(g)=80l-8$, *либо* $n=4$, $p=2$, $\alpha_1(g)=10l+26m+14$ *и* $\alpha_3(g)=80l-16$ *или* $p=3$, $\alpha_1(g)=10l+39m+1$, l *сравнимо с* -1 *по модулю* 3 *и* $\alpha_3(g)=120l+24$*;*

(3) Ω *состоит из* n *вершин попарно находящихся на расстоянии* 3 *в* Γ, $p=3$, $n\in\{4,7,...,40\}$, $\alpha_3(g)=120l+40-4n$ *и* $\alpha_1(g)=15l+30+39m-6n$

(4) Ω *содержит ребро и является объединением изолированных клик, любые две вершины из разных клик находятся на расстоянии 3 в* Γ*, и либо* $p=3$ *и порядки этих клик равны* 1 *или* 4*, либо* $p=2$ *и порядки этих клик равны* 2 *или* 4*;*

(5) Ω *содержит вершины, находящиеся на расстоянии* 2 *в* Γ*, и* $p\le 3$.

Следствие 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{39,36,22;1,2,18\}$*, и неразрешимая группа* $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа. Если* $\bar T$ *— цоколь группы* $\bar G = G/O_{5'}(G)$*, то* $\bar T = L\times M$*, любая из подгрупп* L, M *изоморфна* Z_5, A_5, A_6 *или* $PSp(4,3)$.

В случае $|\bar T:\bar T_a|=40^2$ имеем $O_{5'}(G)=1$ и этот случай реализуется, если либо

(1) $L\cong M\cong PSp(4,3)$, $|L:L_a|=|M:M_a|=40$, либо

(2) $L\cong PSp(4,3)$, $|L:L_a|=40$, $M\cong A_6$ и $|M_a|=9$, либо

(3) $L\cong M\cong A_6$ и $|L_a|=|M_a|=9$.

Сначала приведем один вспомогательный результат.

Лемма 1. *[2, теорема 3.2] [2, теорема 3.2]. Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* (v,k,λ,μ) *и вторым собственным значением* r*. Если* g *— автоморфизм* Γ *и* $\Delta=\mathrm{Fix}(g)$*, то* $|\Delta|\le v\cdot\max\{\lambda,\mu\}/(k-r)$.

По лемме 1 для графа с параметрами $(1600,741,344,342)$ получим $|\Delta|\le 1600344/720=6880/9$.

Лемма 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{39,36,22;1,2,18\}$*. Тогда для чисел пересечений графа* Γ *верны равенства*

(1) $p^1_{11}=2$, $p^1_{12}=36$, $p^1_{22}=270$, $p^1_{23}=396$, $p^1_{33}=462$*;*

(2) $p^2_{11}=2$, $p^2_{12}=15$, $p^2_{13}=22$, $p^2_{22}=312$, $p^2_{23}=374$, $p^2_{33}=462$*;*

(3) $p^3_{12}=18$, $p^3_{13}=21$, $p^3_{22}=306$, $p^3_{23}=378$, $p^3_{33}=458$.

Доказательство. Следует из [3, лемма 4.1.7]. □

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [4]. При этом гаф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X,\mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i\le 1$ класс R_i состоит из пар (u,w) таких, что $d(u,w)=i$. Для $u\in\Gamma$ положим $k_i=|\Gamma_i(u)|$, $v=|\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u,w смежны, если $(u,w)\in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i>0$ и $A_0=I$ — единичная матрица. Тогда $A_iA_j=\sum p^l_{ij}A_l$ для чисел пересечений p^l_{ij}.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j,l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0),...,p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа

Γ кратностей $m_0 = 1, ..., m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом даёт матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. § 3.7 [4]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

Лемма 3. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{39, 36, 22; 1, 2, 18\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Если* $g \in G$, χ_1 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 675, χ_2 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 156, *то* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$, $\chi_1(g) = (44\alpha_0(g) + 8\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/104 - 25/13$. *и* $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/40 - 4$. *Если* $|g| = p$ *— простое число, то* $\chi_1(g) - 675$ *и* $\chi_2(g) - 156$ *делятся на* p.

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 416 & 96 & 64/9 & -32/3 \\ 858 & -22 & -22 & 18 \\ 325 & -75 & 125/9 & -25/3 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = 25(351\alpha_0(g) + 63\alpha_1(g) - \alpha_2(g) - 9\alpha_3(g))/832$. Подставляя $\alpha_2(g) = 1600 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (44\alpha_0(g) + 8\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/104 - 25/13$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (39\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 9\alpha_3(g))/400$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 1600 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/40 - 4$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 1 [5]. □

В леммах 5–7 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1600, 156, 44, 12)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G, $\alpha_i(g) = pw_i$ для $i > 0$ и $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. Ввиду границы Дельсарта максимальный порядок клики K из Γ не больше $1 - k/\theta_d$, поэтому $|K| \le 40$. Ввиду границы Хофмана максимальный порядок коклики C из Γ не больше $-v\theta_d/(k - \theta_d)$, поэтому $|C| \le 40$.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Δ *— пустой граф, то* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 80s$ *или* $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 200t$;

(2) *если* Δ *является* n*-кликой, то либо* $n = 1$, $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 80s - 4$ *или* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 120t + 36$, *или* $p = 13$ *и* $\alpha_1(g) = 520l + 156$, *либо* $p = 3$, $n \in \{4, 7, ..., 40\}$ *и* $\alpha_1(g) = 120t + 40 - 4n$ *или* $p = 37$, $n = 9$ *и* $\alpha_1(g) = 444$;

(3) *если* Δ *является* m*-кокликой,* $m > 1$, *то* $p = 2$, $m \in \{4, 6, ..., 40\}$ *и* $\alpha_1(g) = 80s - 4m$ *или* $p = 3$, $m \in \{4, 7, ..., 40\}$ *и* $\alpha_1(g) = 120t + 40 - 4m$;

(4) *если Δ содержит ребро и является объединением изолированных клик, то* $p = 3$.

Доказательство. Пусть Δ — пустой граф. Так как $v = 2^6 \cdot 25$, то p равно 2 или 5.

В случае $p = 2$ имеем $\chi_1(g) = \alpha_1(g)/40 - 4$ и $\alpha_1(g) = 80s$.

В случае $p = 5$ имеем $\chi_1(g) = \alpha_1(g)/40 - 4$ и $\alpha_1(g) = 200t$.

Пусть Δ является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 156 и 1443, поэтому $p \in \{2, 3, 13\}$. В случае $p = 2$ имеем $\chi_1(g) = (4+\alpha_1(g))/40 - 4$ и $\alpha_1(g) = 80s - 4$.

В случае $p = 3$ имеем $\chi_1(g) = (4+\alpha_1(g))/40 - 4$ и число $(4+3w_1)/40$ сравнимо с 1 по модулю 3. Отсюда $4 + 3w_1 = 120t + 40$ и $\alpha_1(g) = 120t + 36$.

В случае $p = 13$ имеем $\chi_1(g) = (4 + 13w_1)/40 - 4$ и число $(4 + 13w_1)/40$ сравнимо с 4 по модулю 13. Отсюда $4 + 13w_1 = 520l + 160$ и $\alpha_1(g) = 520l + 156$.

Если $n > 1$, то для двух вершин $a, b \in \Delta$ элемент g действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b] - \Delta$, $[a] - b^\perp$ и на $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp)$. Отсюда p делит $46 - n$, 111 и 1332, поэтому $p \in \{3, 37\}$.

В случае $p = 3$ имеем $n \in \{4, 7, ..., 40\}$. Далее, $\chi_1(g) = (4n + \alpha_1(g))/40 - 4$ и число $(4n + \alpha_1(g))/40$ сравнимо с 1 по модулю 3. Отсюда $4n + 3w_1 = 120t + 40$ и $\alpha_1(g) = 120t + 40 - 4n$.

В случае $p = 37$ имеем $n = 9$. Далее, $\chi_1(g) = (36 + \alpha_1(g))/40 - 4$ и число $(36 + \alpha_1(g))/40$ сравнимо с 12 по модулю 37. Отсюда $\alpha_1(g) = 444$.

Пусть Δ является m-кокликой, $m > 1$. Для двух вершин $a, b \in \Delta$ элемент g действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b]$, $[a] - b^\perp$ и на $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp \cup \Delta)$. Отсюда p делит 12, 144 и $1300 - m$, поэтому $p \in \{2, 3\}$.

В случае $p = 2$ имеем $m \in \{4, 6, ..., 40\}$. Далее, $\chi_1(g) = (4m + \alpha_1(g))/40 - 4$ и число $(4m + \alpha_1(g))/40$ четно. Отсюда $\alpha_1(g) = 80s - 4m$.

В случае $p = 3$ имеем $m \in \{4, 7, ..., 40\}$. Далее, $\chi_1(g) = (4m + \alpha_1(g))/40 - 4$ и число $(4m+\alpha_1(g))/40$ сравнимо с 1 по модулю 3. Отсюда $\alpha_1(g) = 120t+40-4m$.

Пусть Δ содержит ребро и является объединением изолированных клик. Тогда p делит 12 и 111, поэтому $p = 3$. □

Лемма 5. *Если $[a] \subset \Delta$ для некоторой вершины a, то для любой вершины $u \in \Gamma_2(a) - \Delta$ орбита $u^{\langle g \rangle}$ является кликой или кокликой и верно одно из утверждений:*

(1) *если на $\Gamma - \Delta$ кокликовых орбит нет, то $\alpha_1(g) = 1600 - \alpha_0(g)$, $\alpha_0(g) = 40l$, $l = 4$, $p = 2, 3$ или $l = 5$, $p = 5, 7$, или $l = 6$, $p = 2$, или $l = 7$, $p = 3, 11$, или $l = 8$, $p = 2$, или $l = 10$, $p = 2, 3, 5$, или $l = 12$, $p = 2, 7$, или $l = 13$, $p = 3$, или $l = 14$, $p = 2$;*

(2) *если на $\Gamma - \Delta$ есть кокликовая орбита, то $p \le 3$, а в случае $a^\perp = \Delta$ имеем $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 120l + 12$.*

Доказательство. Пусть $[a] \subset \Delta$ для некоторой вершины a. Тогда для любой вершины $u \in \Gamma_2(a) - \Delta$ орбита $u^{\langle g \rangle}$ не содержит геодезических 2-путей и является кликой или кокликой.

В случае $p \ge 13$ подграф $[a] \cap [u]$ является 12-кликой и для двух вершин $b, c \in [a] \cap [u]$ подграф $[b] \cap [c]$ содержит a, 10 вершин из $[a] \cap [u]$ и p вершин из $u^{\langle g \rangle}$, поэтому $p \le 31$.

Если на $\Gamma - \Delta$ кокликовых орбит нет, то $\alpha_1(g) = v - |\Delta|$ и для вешины $u' \in u^{\langle g \rangle} - \{u\}$ подграф $[u] \cap [u']$ содержит $p - 2$ вершины из $u^{\langle g \rangle}$ и 12 вершин из Δ. Далее, $\chi_1(g) = (3\alpha_0(g) + 1600)/40 - 4$, $\chi_1(g) - 156$ делится на p и p делит

$3\alpha_0(g)/40-120$. Положим $\alpha_0(g)=40l$. Тогда $4\le l\le 14$, p делит $40(40-l)$ и $3(40-l)$. Таким образом, либо $l=4$, $p=2,3$, либо $l=5$, $p=5,7$, либо $l=6$, $p=2,17$, либо $l=7$, $p=3,11$, либо $l=8$, $p=2$, либо $l=9$, $p=31$, либо $l=10$, $p=2,3,5$, либо $l=11$, $p=29$, либо $l=12$, $p=2,7$, либо $l=13$, $p=3$, либо $l=14$, $p=2,13$. В случае $p\ge 13$ подграф $[a]\cap[u]$ является 12-кликой и $p\le 23$.

Пусть $p=17$ и $b\in\Delta-a^{\perp}$. Тогда $|\Delta(b)-a^{\perp}|\le 82$ и $|[b]-\Delta|\ge 68$. Для $w\in[b]-\Delta$ имеем $[a]\cap[w]=[a]\cap[b]$ (иначе $w^{\langle g\rangle}$ содержится в $[b]\cap[c]$ для вершины $c\in[a]\cap[w]-[b]$). Противоречие с тем, что для двух вершин $c,d\in[a]\cap[w]$ подграф $[c]\cap[d]$ содержит 68 вершин из $[b]-\Delta$.

Пусть $p=13$. Тогда $|\Delta-a^{\perp}|=403$. Если $b\in\Delta-a^{\perp}$ и $|[b]-\Delta|=13$, то для $w\in[b]-\Delta$ имеем $[a]\cap[w]=[a]\cap[b]$ (иначе $w^{\langle g\rangle}$ содержится в $[b]\cap[c]$ для вершины $c\in[a]\cap[w]-[b]$). Далее, $[b]\cap[w]$ содержит 12 вершин из $w^{\langle g\rangle}$ и 32 вершины из $\Delta(b)$. Отсюда для $w'\in w^{\langle g\rangle}-\{w\}$ подграф $[w]\cap[w']$ содержит b, 32-клику из $\Delta(b)$ и 11 вершин из $w^{\langle g\rangle}$. Противоречие с тем, что порядок клики в Γ не больше 40.

Если $b\in\Delta-a^{\perp}$ и $|[b]-\Delta|=26$, то $[b]-\Delta=u^{\langle g\rangle}\cup w^{\langle g\rangle}$. Как и выше, $[a]\cap[u]=[a]\cap[w]=[a]\cap[b]$, поэтому подграф $\{b\}\cup([a]\cap[b])\cup u^{\langle g\rangle}\cup w^{\langle g\rangle}$ является 39-кликой. Если $e\in[u]\cap\Delta(b)-[w]$, то $[e]\cap[w]$ содержит 13 вершин из $u^{\langle g\rangle}$, противоречие. Значит, $\{b\}\cup([u]\cap\Delta(b))\cup u^{\langle g\rangle}\cup w^{\langle g\rangle}$ является 46-кликой, противоречие. Если $b\in\Delta-a^{\perp}$ и $|[b]-\Delta|\ge 39$, то для двух вершин $c,d\in[a]\cap[b]$ подграф $[c]\cap[d]$ содержит a,b и 39 вершин из $[b]-\Delta$, противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть на $\Gamma-\Delta$ имеется кокликовая орбита $u^{\langle g\rangle}$. Тогда $[u]$ содержит по одной внршине в 144 $\langle g\rangle$-орбитах длины p и $145p\le|\Gamma-\Delta|\le 1444$, поэтому $p\le 7$. Покажем, что $p\le 3$.

Пусть $c\in[a]\cap[u]$ и $[c]\cap[u]$ содержит γ вершин из $[a]\cap[u]$. Тогда $[c]\cap[u]$ содержит $44-\gamma$ вершин вне Δ (лежащих в разных $\langle g\rangle$-орбитах) и $p(44-\gamma)\le|[c]-\Delta|\le 156-45=111$. Отсюда $32p\le 111$.

Если $a^{\perp}=\Delta$, то $\alpha_0(g)=157$, p делит 1443 и $p=3$. Далее, $\chi_1(g)=(628+\alpha_1(g))/40-4$, $(628+\alpha_1(g))/40$ сравнимо с 1 по модулю 3 и $\alpha_1(g)=120l+12$. □

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов с параметрами* $(v',k',44,12)$*;*

(2) $p\le 43$.

Доказательство. Допустим, что Γ содержит собтвенный сильно регулярный подграф Σ с параметрами $(v',k',44,12)$. Тогда $4(k'-12)+32^2=n^2$, поэтому $n=2l$, $k'=l^2-244$, $l\ge 16$, Σ имеет неглавные собственные значения $16+l,16-l$ и кратность $16+l$ равна $(l-17)(l^2-244)(l^2+l-260)/24l$. Если l нечетно, то 8 делит $(l-17)(l^2+l-20)$, l делит $17\cdot 61\cdot 65$ и $l=5,13$. Если же l четно, то 3 делит $(l-2)(l^2-1)(l^2+l-2)$ и $l=16$. В любом случае имеем противоречие.

Если $p\ge 47$, то Δ — сильно регулярный подграф с параметрами $(v',k',44,12)$, противоречие. □

Из лемм 5–7 следует теорема 2.

В леммах 8–9 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G, $\alpha_i(g) = pw_i$ для $i > 0$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 7. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то $p = 2$, $\alpha_1(g) = 10r + 26m + 12$ и $\alpha_3(g) = 80r = 1600 - \alpha_1(g)$ или $p = 5$, $\alpha_1(g) = 65n + 10l + 10$ и $\alpha_3(g) = 200l$;*

(2) *если Ω является n-кликой, то либо $n = 1$, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 15l + 24 + 39m$ и $\alpha_3(g) = 120l + 36$, либо $n = 2$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 10l + 26m$ и $\alpha_3(g) = 80l - 8$, либо $n = 4$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 10l + 26m + 14$ и $\alpha_3(g) = 80l - 16$ или $p = 3$, $\alpha_1(g) = 10l + 39m + 1$, l сравнимо с -1 по модулю 3 и $\alpha_3(g) = 120l + 24$;*

(3) *если Ω состоит из n вершин попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, то $p = 3$, $n \in \{4, 7, ..., 40\}$, $\alpha_3(g) = 120l + 40 - 4n$ и $\alpha_1(g) = 15l + 30 + 39m - 6n$*

(4) *если Ω содержит ребро и не содержит вершин, находящихся на расстоянии 2 в Γ, то Ω является объединением изолированных клик, и любые две вершины из разных клик находятся на расстоянии 3 в Γ, либо $p = 3$ и порядки этих клик равны 1 или 4, либо $p = 2$ и порядки этих клик равны 2 или 4.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф и $\alpha_i(g) = pw_i$ для $i \geq 1$. Так как $v = 1600$, то p равно 2 или 5.

Пусть $p = 2$. Тогда $w_1 + w_2 + w_3 = 800$ и $\chi_2(g) = w_3/20 - 4$. Отсюда $w_3 = 40r$. Далее, число $\chi_1(g) = (2w_1 - 10r - 25)/13$ нечетно, поэтому $w_1 = 13m + 6 + 5r$. Наконец, $\alpha_2(g) = 0$ (если $d(u, u^g) = 2$, то единственная вершина из $[u] \cap [u^g]$ попадает в Ω. Поэтому $\alpha_1(g) = 10r + 26m + 12 = 1600 - 80r$.

Пусть $p = 5$. Тогда $w_1 + w_2 + w_3 = 320$ и $\chi_2(g) = w_3/8 - 4$. Отсюда $w_3 = 40l$. Наконец, $\chi_1(g) = (5w_1 - 25l - 25)/13$, поэтому $w_1 = 13n + 5l + 5$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 39 и 315, поэтому $p = 3$. Имеем $\chi_1(g) = (8\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 156)/104$, $\chi_2(g) = (4 + \alpha_3(g))/40 - 4$. Поэтому число $(4 + \alpha_3(g))/40$ сравнимо с 1 по модулю 3, $\alpha_3(g) = 120l + 36$ и число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 15l - 24)/13$ делится на 3. Отсюда $\alpha_1(g) = 15l + 24 + 39m$.

Если $n > 1$, то p делит $4 - n$ и 36, поэтому либо $n = 2$, $p = 2$, либо $n = 4$, $p = 2, 3$. В первом случае число $\chi_2(g) = (8 + \alpha_3(g))/40 - 4$ четно и $\alpha_3(g) = 80l - 8$. Далее, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 10l)/13 - 1$ нечетно и $\alpha_1(g) = 10l + 26m$. Во втором случае $\chi_2(g) = (16 + \alpha_3(g))/40 - 4$, либо $p = 2$ и $\alpha_3(g) = 80l - 16$, либо $p = 3$ и $\alpha_3(g) = 120l + 24$. Далее, $\chi_1(g) = (176 + 8\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/104 - 25/13$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 10l + 26m + 14$, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 10l + 39m + 1$, l сравнимо с -1 по модулю 3.

Пусть Ω состоит из n вершин, попарно находящихся на расстоянии 3. Так как $p^3_{13} = 3$, $p^3_{33} = 44$, то p делит 3 и $46 - n$. Отсюда $p = 3$ и $n \in \{4, 7, ..., 40\}$. Имеем $\chi_2(g) = (4n + \alpha_3(g))/40 - 4$ и число $(4n + \alpha_3(g))/40$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\alpha_3(g) = 120l + 40 - 4n$. Далее, число $\chi_1(g) = (6n + \alpha_1(g) - 15l - 30)/13$ делится на 3 и $\alpha_1(g) = 15l + 30 + 39m - 6n$.

Пусть Ω содержит ребро и не содержит вершин, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Тогда Ω является объединением изолированных клик, и любые две вершины из разных клик находятся на расстоянии 3 в Γ. Так как $p^3_{13} = 3$, то порядки этих клик равны 1, 2 или 4, причем $p = 3$, если порядок некоторой клики равен 1. Если Ω содержит изолированную клику K порядка 2, то $p = 2$.

Допустим, что порядок каждой изолированной клики из Ω равен 4. Тогда p делит $44 - 4t$ и снова $p = 2$. $\square$

Лемма 8. *Если Ω содержит вершины a, b на расстоянии 2 в Γ, то $p \leq 3$.*

Доказательство. Пусть Ω содержит вершины a, b на расстоянии 2 в Γ и Ω_0 — содержащая a, b связная компонента графа Ω.

Допустим, что диаметр графа Ω_0 равен 2. Тогда по [**?**, теорема 1.17.1] верно одно из утверждений:

(i) $\Omega_0 \subseteq a^{\perp}$ и $\Omega_0(a)$ является объединением изолированных клик;

(ii) Ω_0 — сильно регулярный граф;

(iii) Ω_0 — бирегулярный граф со степенями вершин α, β, $\alpha < \beta$, если A и B — множества вершин из Ω_0 степеней α и β, то A — коклика, прямые между A и B имеют порядок 2, прямые из B имеют порядок $l = \beta - \alpha + 2 > 2$, и $|\Omega_0| = \alpha\beta + 1$.

В случае (i) с учетом равенства $p^1_{33} = 12$ число p равно 2 или 3. Если $p = 3$, то $\Omega_0(a)$ является объединением изолированных 3-клик, а если $p = 2$, то $\Omega_0(a)$ является объединением изолированных вершин или 3-клик. Так как $p^2_{22} = 1229$, то $p = 2$.

В случае (ii) либо $p = 2$ и Ω_0 — пятиугольник, граф Петерсена или граф Хофмана-Синглтона, либо $p > 2$ и Ω_0 — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 2, 1)$. Заметим, что Ω_0 не является пятиугольником, так как число $39 - 2$ нечетно. Если Ω_0 является графом Хофмана-Синглтона, то число ребер между Ω_0 и $\Gamma - \Omega_0$ равно $50 \cdot 32$, $\Gamma - \Omega_0$ содержит 350 вершин, смежных с ребрами из Ω_0, 900 вершин, смежных с единственной вершиной из Ω_0 и 300 вершин, несмежных с вершинами из Ω_0. Отсюда $\alpha_3(g) \leq 300$ и $\alpha_2(g) \geq 900$. Далее, число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/40 + 46$ четно, $\alpha_3(g) = 80l$, число $\chi_1(g) = (250 + \alpha_1(g) - 10l)/13$ нечетно, противоречие.

Итак, Ω_0 является графом Петерсена.

Пусть $p > 2$. Тогда $\Omega(a)$ состоит из e изолированных треугольников и либо $e = 1$, $p = 3$, либо $e = 2$, $p = 3, 11$, либо $e = 3$, $p = 3, 5$, либо $e = 4$, $p = 3$, либо $e = 5$, $p = 3$, либо $e = 6$, $p = 3, 7$, либо $e = 7$, $p = 3$, либо $e = 8$, $p = 3, 5$, либо $e \geq 9$, $p = 3$.

В случае $p = 11$ граф Ω является регулярным графом степени 6, $|\Omega \cap \Gamma_2(a)| = 18$, $|\Omega \cap \Gamma_3(a)| = 24$ и $|\Gamma_3(a) - \Omega|$ не делится на 11.

В случае $p = 7$ граф Ω является регулярным графом степени 18, $|\Omega \cap \Gamma_2(a)| = 270$ и $|\Omega \cap \Gamma_3(a)| = 270 \cdot 4/15 = 64$ и $|\Gamma_3(a) - \Omega|$ не делится на 7.

В случае $p = 5$ граф Ω содержит вершины степеней 9 и 24. Допустим, что $|\Omega(a)| = 24$, $\Omega(a)$ содержит β вершин степени 24 в Ω и $\Omega_3(a)$ содержит γ вершин степени 24 в Ω. Тогда число $21\beta + 6(24 - \beta) = |\Omega \cap \Gamma_2(a)|$ сравнимо с 4 по модулю 5 и $4|\Omega \cap \Gamma_2(a)| = 21\gamma + 6|\Omega \cap \Gamma_3(a)| - \gamma)$. Отсюда $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = (144 + 15\beta)$ и $576 + 60\beta = 15gamma + 6|\Omega \cap \Gamma_3(a)|$, противоречие с тем, что $|\Omega \cap \Gamma_3(a)|$ делится на 5.

Значит, Ω — вполне регулярный граф с параметрами $(v', 9, 2, 1)$, $54 = |\Omega \cap \Gamma_2(a)|$ и $|\Omega \cap \Gamma_3(a)| = 36$. Снова имеем противоречие с тем, что $|\Omega \cap \Gamma_3(a)|$ делится на 5. Лемма доказана. $\square$

Из лемм 8-9 следует теорема 1.

До конца работы будем предполагать, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$ и неразрешимая группа $G =$

$\mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа. Для вершины $a \in \Gamma$ получим $|G : G_a| = 1600$. Ввиду теоремы 1 имеем $p \in \{2, 3, 5\}$. Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/O_{5'}(G)$.

Лемма 9. *Если f — элемент порядка 5 из G, g — элемент порядка $p < 5$ из $C_G(f)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, $p = 2$, $\alpha_3(g) = 80r$, $r \leq 19$, $\alpha_1(g) = 10r + 26m + 12 = 1600 - 80r$, и $m \in \{-7, -2, 3, 8, ..., 58\}$;*

(2) *Ω состоит из n вершин попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, $p = 3$, $n \in \{10, 25, 40\}$, $\alpha_3(g) = 120l + 40 - 4n$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 135l - 10n + 39m + 70 \leq 1600$ и m делится на 5;*

(3) *$p = 3$, $\alpha_3(g) = 120s$, $\alpha_0(g) = 30t + 10$, $\alpha_1(g) = 39l - 165t + 15s - 30$ или $\alpha_3(g) = 120s + 60$, $\alpha_0(g) = 30t - 5$, $\alpha_1(g) = 195l - 165t + 15s + 60$;*

(4) *$p = 2$, $\alpha_3(g) = 80s - 4\alpha_0(g)$ и $\alpha_1(g) = 10s + 26l + 38 - 6\alpha_0(g)$, l сравнимо с 2 по модулю 5.*

Доказательство. Ввиду теоремы 1 граф $\mathrm{Fix}(f)$ пуст, $\alpha_1(f) = 65n + 10l + 10$ и $\alpha_3(f) = 200l$.

Если Ω — пустой граф, то $p = 2$, $\alpha_3(g) = 80r$ и $\alpha_1(g) = 10r + 26m + 12 = 1600 - 80r$ делится на 5. Отсюда $13m + 6$ делится на 5 и $m \in \{-7, -2, 3, 8, ..., 58\}$. Наконец, $26m + 12 = 1600 - 90r$, поэтому m сравнимо с 2 по модулю 3 и $m \in \{-7, 8, 23, 38, 53\}$.

Если Ω является n-кликой, то n делится на 5, противоречие.

Если Ω состоит из n вершин попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, то $p = 3$, $n \in \{10, 25, 40\}$, числа $\alpha_3(g) = 120l + 40 - 4n$ и $\alpha_1(g) = 15l + 30 + 39m - 6n$ делятся на 5. Отсюда m делится на 5, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 135l - 10n + 39m + 70 \leq 1600$.

Если $p = 3$, то $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/40 - 4$ и число $(4\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/40$ сравнимо с 1 по модулю 3. Далее, число $\chi_1(g) = (44\alpha_0(g) + 8\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/104 - 25/13$ делится на 3, $\alpha_3(g)$ делится на 60. Если $\alpha_3(g) = 120s$, то $\alpha_0(g) = 30t + 10$, $\alpha_1(g) = 39l - 165t + 15s - 30$. Если же $\alpha_3(g) = 120s + 60$, то $\alpha_0(g) = 30t - 5$, $\alpha_1(g) = 195l - 165t + 15s + 60$.

Если $p = 2$, то $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/40 - 4$, $4\alpha_0(g) + \alpha_3(g) = 80s$. Далее, $\alpha_1(g) = -6\alpha_0(g) + 10s + 26l + 38$ и $13l + 19$ делится на 5, поэтому $l \in \{2, 7, ...\}$. Наконец, $1600 - 5\alpha_0(g) + 80s = -6\alpha_0(g) + 10s + 26l + 38$, $1600 = -70s - \alpha_0(g) + 26l + 38$. □

Лемма 10. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *$\bar{T} = L \times M$, любая из подгрупп L, M изоморфна Z_5, A_5, A_6 или $PSp(4, 3)$;*

(2) *в случае $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 40^2$ имеем $O_{5'}(G) = 1$ и этот случай реализуется, если либо*

(*i*) *$L \cong M \cong PSp(4, 3)$, либо*

(*ii*) *$L \cong PSp(4, 3)$, $|L : L_a| = 40$, $M \cong A_6$ и $|M_a| = 9$, либо*

(*iii*) *$L \cong M \cong A_6$ и $|L_a| = |M_a| = 9$.*

Доказательство. Напомним, что простая $\{2, 3, 5\}$-группа изоморфна A_5, A_6 или $PSp(4, 3)$. Отсюда ввиду теоремы 1 имеем $\bar{T} = L \times M$, любая из подгрупп L, M изоморфна Z_5, A_5, A_6 или $PSp(4, 3)$.

Если $\bar{T} \cong PSp(4, 3)$, то группа $\bar{T}_a$ имеет индекс 40 в $\bar{T}$ и изоморфна $E_9.SL_2(3)$ или $E_{27}.S_4$.

Если $\bar{T} \cong A_6$, то группа $\bar{T}_a$ имеет индекс в $\bar{T}$, делящийся на 10, и делящий 40.

Если $\bar{T} \cong A_5$, то группа $\bar{T}_a$ имеет индекс в $\bar{T}$, делящийся на 10, и делящий 20.

В случае $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 40^2$ имеем $O_{5'}(G) = 1$ и этот случай реализуется, если либо $L \cong M \cong PSp(4,3)$, либо $L \cong PSp(4,3)$, $M \cong A_6$ и $|M_a| = 9$, либо $L \cong M \cong A_6$ и $|L_a| = |M_a| = 9$. Лемма и следствие доказаны. □

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1989. Zbl 0747.05073

[2] A. Jurišić, J. Vidali, *Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3*, Des. Codes Cryptogr., **65** (2012), 29–47. Zbl 1245.05036

[3] A.A. Makhnev, M.S. Nirova, *On distance-regular graphs with* $\lambda = 2$, Jornal of Siberian Federal Univ., **7**:2 (2014), 188–194.

[4] M. Behbahani, C. Lam, *Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms*, Discrete Math., **311**:2–3 (2011), 132–144. Zbl 1225.05248

[5] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts **45**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. Zbl 0922.20003

[6] A.L. Gavrilyuk, A.A. Makhnev, *On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Doklady Mathematics, **81**:3 (2010), 439–442. Zbl 1250.05059

[7] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Sibirean Electr. Math. Reports, **6** (2009), 1–12. Zbl 1289.20021

Alexandr Alekseevich Makhnev
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Meckhanics,
16, S. Kovalevskoy str.,
Ekaterinburg, 620990, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

Madina Mukhadinovna Khamgokova
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
175, Chernyshevsky st.,
Nalchik, 360004, Russia
E-mail address: hamgokova.madina@yandex.ru