S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 673–682 (2019) УДК 510.67
DOI 10.33048/semi.2019.16.043 MSC 03C64

ОБ ОБОГАЩЕНИЯХ МОДЕЛЕЙ СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ БИНАРНЫМИ ПРЕДИКАТАМИ

С.С. БАЙЖАНОВ, Б.Ш. КУЛПЕШОВ

Abstract. Here questions of preservation of properties at expanding countably categorical weakly o-minimal structures non-being 1-indiscernible by an arbitrary binary predicate are studied. A criterion for preserving the countable categoricity of a weakly o-minimal expansion of convexity rank 1 is obtained.

Keywords: weak o-minimality, countable categoricity, expansion of models, equivalence-generating formula.

1. Введение

В настоящей работе исследуется вопрос сохранения счетной категоричности при слабо о-минимальном обогащении счетно категоричной слабо о-минимальной структуры, не являющейся 1-неразличимой, произвольным бинарным предикатом. Найден критерий сохранения счетной категоричности для слабо о-минимального обогащения ранга выпуклости 1 такой структуры.

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду в данной статье мы рассматриваем L-структуры и предполагаем, что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. Настоящая работа касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз, когда $a < c < b$,

Baizhanov, S.S., Kulpeshov, B.Sh., On expansions of models of weakly o-minimal theories by binary predicates.

Работа поддержана Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант AP05132546).

Поступила 15 января 2019 г., опубликована 20 мая 2019 г.

мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется такая линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$, в которой любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вспомним, что такая структура M называется *о-минимальной*, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M. Таким образом, слабая о-минимальность является обобщением о-минимальности. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных (не о-минимальных) структур.

Пусть A, B — произвольные подмножества линейно упорядоченной структуры M. Тогда выражение $A < B$ означает, что $a < b$ всякий раз, когда $a \in A$ и $b \in B$. Выражение $A < b$ означает, что $A < \{b\}$. Через A^+ (и соответственно A^-) будем обозначать множество элементов b рассматриваемой структуры с условием $A < b$ $(b < A)$. Через $S_1^M(\emptyset)$ будем обозначать множество всех 1-типов теории $Th(M)$.

Определение 1. [2] Пусть T — слабо о-минимальная теория, M — достаточно насыщенная модель теории T, и пусть $\phi(x)$ — произвольная M-определимая формула с одной свободной переменной.
Ранг выпуклости формулы $\phi(x)$ $(RC(\phi(x)))$ определяется следующим образом:
1) $RC(\phi(x)) \geq 1$, если $\phi(M)$ бесконечно.
2) $RC(\phi(x)) \geq \alpha+1$, если существуют параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$ и бесконечное число элементов $b_i, i \in \omega$, такие, что:

- Для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$
- Для каждого $i \in \omega \quad RC(E(x, b_i)) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ — выпуклое подмножество множества $\phi(M)$

3) $RC(\phi(x)) \geq \delta$, если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный).
Если $RC(\phi(x)) = \alpha$ для некоторого α, то мы говорим что $RC(\phi(x))$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(\phi(x)) = \infty$.

В частности, теория имеет ранг выпуклости 1, если не существует определимого (с параметрами) отношения эквивалентности с бесконечным числом выпуклых бесконечных классов.

Рангом выпуклости 1-типа p (обозначаем через $RC(p)$) называется инфимум множества $\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$, т.е. $RC(p) := \inf\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$.

Ранее в работах [3]–[7] нами был исследован вопрос сохранения как счетной категоричности, так и ранга выпуклости при обогащениях моделей счетно категоричных слабо и вполне о-минимальных теорий унарными предикатами. В работе [8] исследован вопрос сохранения как счетной категоричности, так и слабой о-минимальности при обогащениях моделей 1-неразличимых счетно категоричных слабо о-минимальных теорий отношениями эквивалентности. В работе [9] был исследован вопрос сохранения счетной категоричности при слабо о-минимальном обогащении моделей 1-неразличимых счетно категоричных слабо о-минимальных теорий произвольным бинарным предикатом. В настоящей работе мы исследуем вопрос сохранения счетной категоричности при слабо о-минимальном обогащении моделей счетно категоричных слабо о-минимальных теорий, не являющихся 1-неразличимыми, произвольным бинарным предикатом.

2. Результаты

Определение 2. Пусть M — произвольная структура, $A, B \subseteq M$, M — $|A|^+$-насыщена, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические. Будем говорить, что тип p является *слабо ортогональным* типу q ($p \perp^w q$), если $p(x) \cup q(y)$ имеет единственное расширение до полного 2-типа над A.

Мы также будем писать $p \perp^w_M q$, если типы p и q слабо ортогональны в теории $Th(M)$.

Лемма 1. [10] *Для любой слабо о-минимальной теории отношение не слабой ортогональности* $\not\perp^w$ *является отношением эквивалентности на* $S_1(A)$.

Следующее понятие, связанное с отношением не слабой ортогональности, введено в [11]. Пусть $A \subseteq M$, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ — неалгебраические типы, $p_1 \not\perp^w p_2$. Мы говорим что A–определимая формула $\phi(x, y)$ является (p_1, p_2)*-секатором*, если существует элемент $a \in p_1(M)$ такой, что $\phi(a, M) \cap p_2(M)$ выпукло и $[\phi(a, M) \cap p_2(M)]^- = p_2(M)^-$. Если $\phi_1(x, y)$, $\phi_2(x, y)$ — (p_1, p_2)-секаторы, то мы говорим, что $\phi_1(x, y)$ *меньше чем* $\phi_2(x, y)$, если существует элемент $a \in p_1(M)$ такой, что $\phi_1(a, M) \cap p_2(M) \subset \phi_2(a, M) \cap p_2(M)$.

Очевидно, что если $p_1, p_2 \in S_1(A)$ — неалгебраические типы и $p_1 \not\perp^w p_2$, то существует (p_1, p_2)–секатор и множество всех (p_1, p_2)-секаторов линейно упорядочено. Также очевидно, что для любого (p_1, p_2)-секатора $\phi(x, y)$ функция $f(x) := \sup \phi(x, M)$ не является константой на $p_1(M)$.

Следующие два примера показывают, что при обогащении счетно категоричной слабо о-минимальной структуры ранга выпуклости 1 (p, q)-секатором для неалгебраических типов $p, q \in S_1(\emptyset)$ мы теряем счетную категоричность данного обогащения в случае не слабой ортогональности этих типов.

Пример 1. Пусть $M := \langle M, <, P^1, f^1 \rangle$ — линейно упорядоченная структура, где $M = P(M) \cup \neg P(M)$, $P(M) < \neg P(M)$, при этом обе реализации $P(M)$ и $\neg P(M)$ отождествляем с множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$, упорядоченном как обычно. Для того чтобы различать элементы этих множеств, для любого элемента $a \in P(M)$ условимся обозначать его идентичный элемент в $\neg P(M)$ через a'. Символ f определяет унарную функцию с $\mathrm{Dom}(f) = P(M)$ и $\mathrm{Range}(f) = \neg P(M)$, при этом $f(a) = a'$, откуда f является строго возрастающей биекцией между $P(M)$ и $\neg P(M)$. Может быть доказано, что M — счетно категоричная слабо о-минимальная структура.

Рассмотрим обогащение модели M новым бинарным отношением $R(x, y)$: пусть $M' := \langle M, <, P^1, f^1, R^2 \rangle$, где для любых $a \in P(M')$, $b \in \neg P(M')$

$$R(a, b) \Leftrightarrow b < a' + \sqrt{2}.$$

Нетрудно установить, что M' остается слабо о-минимальной структурой. Рассмотрим следующие формулы:

$$F_1(x, y) := y \le x \wedge \exists t[f(t) = y \wedge R(t, x)] \wedge \neg P(x),$$

$$F_n(x, y) := \exists t[F_{n-1}(t, y) \wedge F_1(x, t)], n \ge 2$$

Очевидно, что для любого $b \in \neg P(M)$
$$F_1(M', b) \subset F_2(M', b) \subset \ldots \subset F_n(M', b) \subset \ldots,$$
т.е. $Th(M')$ не является счетно категоричной.

Пример 2. Пусть $M := \langle M, <, P^1, R_1^2 \rangle$ — линейно упорядоченная структура, где $M = P(M) \cup \neg P(M)$, $P(M) < \neg P(M)$, при этом обе реализации $P(M)$ и $\neg P(M)$ отождествляем с множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$, упорядоченном как обычно. Для того чтобы различать элементы этих множеств, для любого элемента $a \in P(M)$ также условимся обозначать его идентичный элемент в $\neg P(M)$ через a'. Символ R_1 определяется следующим образом: для любых $a \in P(M)$, $b \in \neg P(M)$
$$R_1(a, b) \Leftrightarrow b < a' + \sqrt{2}.$$

Может быть доказано, что M — счетно категоричная слабо о-минимальная структура.

Также рассмотрим обогащение M' модели M новым бинарным отношением $R_2(x, y)$: пусть $M' := \langle M, <, P^1, R_1^2, R_2^2 \rangle$, где для любых $a \in P(M')$, $b \in \neg P(M')$
$$R_2(a, b) \Leftrightarrow b < a' + 2\sqrt{2}.$$

Нетрудно установить, что M' остается слабо о-минимальной структурой. Рассмотрим следующую формулу:
$$F_1(x, b) := b \leq x \wedge \neg P(x) \wedge \exists t[P(t) \wedge \neg R_1(t, b) \wedge R_2(t, b) \wedge R_2(t, x)]$$

Определяя формулы $F_n(x, y)$ аналогичным образом как в примере 1, получаем, что $Th(M')$ не является счетно категоричной.

Следующий пример показывает, что при обогащении счетно категоричной слабо о-минимальной структуры (p, q)-секатором для неалгебраических типов $p, q \in S_1(\emptyset)$ мы можем потерять как 1-неразличимость этих типов, так и слабую о-минимальность такого обогащения.

Пример 3. [1] Пусть $M = \langle M, <, P^1, f^1 \rangle$ — линейно упорядоченная структура, где M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P и $\neg P$, причем $P(M) < \neg P(M)$. Далее мы отождествляем интерпретацию P с $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, упорядоченным лексикографически, и $\neg P$ с $\mathbb{Q}$, упорядоченным как обычно.

Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с областью определения $\mathrm{Dom}(f) = P(M)$ и областью значений $\mathrm{Range}(f) = \neg P(M)$, и определяется равенством $f((n, m)) = n$ для всех $(n, m) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Известно, что $Th(M)$ — счетно категоричная слабо о-минимальная теория, и
$$E(x, y) := P(x) \wedge P(y) \wedge \exists t[\neg P(t) \wedge f(x) = t \wedge f(y) = t]$$
определяет отношение эквивалентности, разбивающее $P(M)$ на бесконечное число выпуклых классов.

Пусть $p(x) := \{P(x)\}$, $q(x) := \{\neg P(x)\}$. Тогда очевидно, что $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические, $RC(p) = 2, RC(q) = 1, p \not\perp^w q$.

Рассмотрим следующие формулы:
$$\Phi_1(x, y) := \neg P(x) \wedge P(y) \wedge \forall t[E(t, y) \rightarrow f(t) < x]$$

$$\Phi_2(x, y) := \neg P(x) \wedge P(y) \wedge \exists t[t \geq y \wedge f(t) \leq x]$$

Нетрудно понять, что формулы $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ являются (q, p)-секаторами, причем $\Phi_1(b, M) \subset \Phi_2(b, M)$ для любого $b \in q(M)$.

Рассмотрим обогащение M' структуры M бинарным предикатом $R(x, y)$, таким, что для любых $(a, c) \in P(M)$ и $b \in \neg P(M)$ выполняется

$$R(b,(a,c)) \Leftrightarrow f((a,c)) \le b \wedge [f((a,c)) = b \Rightarrow c < b + \sqrt{2}]$$

Тогда для любого $b \in q(M)$ множество $R(b, M)$ выпукло, $R(b, M) \subset q(M)$, $R(b, M)^- = p(M)^-$ и $\Phi_1(b, M) \subset R(b, M) \subset \Phi_2(b, M)$.

Рассмотрим следующую формулу:

$$\theta(x) := P(x) \wedge \exists t[f(x) = t \wedge R(t, x)]$$

Нетрудно видеть, что множество $\theta(M')$ является объединением бесконечного числа $\neg\theta(M')$-отделимых выпуклых множеств, т.е. $p(M')$ не является 1-неразличимым и M' не является слабо о-минимальной.

В работе [12] были полностью описаны счетно категоричные слабо о-минимальные теории конечного ранга выпуклости:

Теорема 1. [12] *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, $M \models T$, $|M| = \aleph_0$. Тогда*
(i) существует конечное множество $C = \{c_0, \dots, c_n\} \subseteq M(M\cup \{-\infty, +\infty\}$, если M не имеет первого или последнего элементов), состоящее из всех $\emptyset$–определимых элементов в M (с возможными исключениями для $-\infty$, $+\infty$), такое что $M \models c_i < c_j$ для всех $i < j \le n$ и для каждого $j \in \{1, \dots, n\}$ либо $M \models \neg(\exists x)c_{j-1} < x < c_j$ либо $I_j = \{\ x \in M : M \models c_{j-1} < x < c_j\ \}$ является плотным линейным порядком без концевых точек и существуют $k_j \in \omega$ и $p_1^j, \dots, p_{k_j}^j \in S_1(\emptyset)$ так что $I_j = \bigcup_{s=1}^{k_j} p_s^j(M)$;
(ii) для каждого неалгебраического $p \in S_1(\emptyset)$ существует натуральное число $n_p \ge 1$ такой, что $RC(p) = n_p$, т.е. существуют $\emptyset$-определимые отношения эквивалентности $E_1^p(x, y)$, $E_2^p(x, y)$, …, $E_{n_p-1}^p(x, y)$ такие, что

- *$E_{n_p-1}^p$ разбивает $p(M)$ на бесконечное число $E_{n_p-1}^p$-классов, каждый $E_{n_p-1}^p$-класс выпуклый и открытый, так что индуцированный порядок на классах является плотным линейным порядком без концевых точек*
- *для каждого $i \in \{1, \dots, n_p-2\}$ E_i^p разбивает каждый E_{i+1}^p-класс на бесконечное число E_i^p-классов, каждый E_i^p-класс выпуклый и открытый, так что E_i^p-подклассы каждого E_{i+1}^p-класса плотно упорядочены без концевых точек*

(iii) для любых неалгебраических $p, q \in S_1(\emptyset)$ таких, что $p \not\perp^w q$
(1) если $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) \ne \emptyset$ для некоторого $a \in p(M)$, то существует единственная $\emptyset$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$ так что
в случае $RC(p) = RC(q)$ f — локально монотонная биекция на $p(M)$,
в случае $RC(p) > RC(q)$ f — локально константа на $p(M)$, т.е. f — константа на каждом $E_{n_p-n_q}^p$-классе и локально монотонная на $p(M)/E_{n_p-n_q}^p$;
(2) если $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) = \emptyset$ для всех $a \in p(M)$, то
в случае $RC(p) = RC(q)$ существуют в точности $2n_p - 1$ (p, q)-секаторов $S_1(x, y)$, …, $S_{2n_p-1}(x, y)$ таких, что $S_1(a, M) \subset \ldots \subset S_{2n_p-1}(a, M)$ для всех $a \in p(M)$, $f(x) := \sup S_{n_p}(x, M)$ — локально монотонная на $p(M)$, где $S_{n_p}(x, y)$ — базисный (p, q)-секатор, и

$$S_i(x, y) \equiv \forall t[E_{n_p-i}^p(x, t) \to S_{n_p}(t, y)], \quad 1 \le i \le n_p - 1$$

$$S_j(x,y) \equiv \exists t[E^p_{j-n_p}(x,t) \wedge S_{n_p}(t,y)], \quad n_p+1 \leq j \leq 2n_p-1$$

в случае $RC(p) > RC(q)$ существуют в точности $2n_q-1$ (p,q)-секаторов $S_1(x,y)$, $\ldots$, $S_{2n_q-1}(x,y)$ таких, что $S_1(a,M) \subset \ldots \subset S_{2n_q-1}(a,M)$ для всех $a \in p(M)$, $f(x) := \sup S_{n_q}(x,M)$ — константа на каждом $E^p_{n_p-n_q}$-классе и локально монотонная на $p(M)/\ E^p_{n_p-n_q}$, где $S_{n_q}(x,y)$ — базисный (p,q)-секатор, и

$$S_i(x,y) \equiv \forall t[E^p_{n_p-i}(x,t) \to S_{n_q}(t,y)], \quad 1 \leq i \leq n_q-1$$

$$S_j(x,y) \equiv \exists t[E^p_{n_p-2n_q+j}(x,t) \wedge S_{n_q}(t,y)], \quad n_q+1 \leq j \leq 2n_q-1$$

так что T допускает элиминацию кванторов до языка

$$\{=,<\} \cup \{c_i : i \leq n\} \cup \{U_s(x) : s \leq r = \sum_{j=1}^{n} k_j\} \cup$$

$$\{E^{p_s}_l(x,y) : RC(p_s) = n_{p_s}, 1 \leq l \leq n_{p_s}-1 \text{ и } s \leq r\} \cup$$

$$\{f_{i,j} : \mathrm{dcl}(\{a\}) \cap p_j(M) \neq \emptyset \text{ для некоторого } a \in p_i(M), RC(p_i) \geq RC(p_j)\} \cup$$

$$\{S_{i,j}(x,y) : p_i \not\perp^w p_j, \mathrm{dcl}(\{a\}) \cap p_j(M) = \emptyset \text{ для всех } a \in p_i(M), RC(p_i) \geq RC(p_j),$$

$$S_{i,j}(x,y) - \text{ базисный } (p_i,p_j)\text{-секатор}\}$$

где $U_s(x)$ изолирует тип p_s для каждого $s \leq r$.
Более того, любому упорядочению с выделенными элементами как в (i)-(iii) соответствует счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости как выше.

Поскольку в слабо о-минимальной теории ранга выпуклости 1 не существует отношений эквивалентности с бесконечными выпуклыми классами, то в качестве следствия получаем:

Следствие 1. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1, $M \models T$, $|M| = \aleph_0$. Тогда*
(i) существует конечное множество $C = \{c_0, \ldots, c_n\} \subseteq M(M\cup \{-\infty, +\infty\}$, если M не имеет первого или последнего элементов), состоящее из всех $\emptyset$–определимых элементов в M (с возможными исключениями для $-\infty$, $+\infty$), такое что $M \models c_i < c_j$ для всех $i < j \leq n$ и для каждого $j \in \{1, \ldots, n\}$ либо $M \models \neg(\exists x)c_{j-1} < x < c_j$ либо $I_j = \{\ x \in M : M \models c_{j-1} < x < c_j\ \}$ является плотным линейным порядком без концевых точек и существуют $k_j \in \omega$ и $p^j_1, \ldots, p^j_{k_j} \in S_1(\emptyset)$ так что $I_j = \bigcup_{s=1}^{k_j} p^j_s(M)$;
(ii) для любых неалгебраических $p, q \in S_1(\emptyset)$ таких, что $p \not\perp^w q$

если $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) \neq \emptyset$ для некоторого $a \in p(M)$, то существует единственная $\emptyset$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся строго монотонной биекцией на $p(M)$,

если $\mathrm{dcl}(\{a\}) \cap q(M) = \emptyset$ для всех $a \in p(M)$, то существует единственный (p,q)-секатор $S(x,y)$, такой, что $f(x) := \sup S(x,M)$ — строго монотонная на $p(M)$,

так что T допускает элиминацию кванторов до языка

$$\{=,<\} \cup \{c_i : i \leq n\} \cup \{U_s(x) : s \leq r = \sum_{j=1}^{n} k_j\} \cup \{f_{i,j} : \mathrm{dcl}(\{a\}) \cap p_j(M) \neq \emptyset$$

$$\text{для некоторого } a \in p_i(M)\} \cup \{S_{i,j}(x,y) : p_i \not\perp^w p_j, \mathrm{dcl}(\{a\}) \cap p_j(M) = \emptyset$$

$$\text{для всех } a \in p_i(M), \text{ где } S_{i,j}(x,y) - (p_i,p_j)\text{-секатор}\}$$

где $U_s(x)$ изолирует тип p_s для каждого $s \le r$.
Более того, любому упорядочению с выделенными элементами как в (i)-(ii) соответствует счетно категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1 как выше.

Пусть M — счетно категоричная слабо о-минимальная структура ранга выпуклости 1, $p, q \in S_1^M(\emptyset)$ — неалгебраические. Пусть M' — обогащение структуры M бинарным предикатом $R(x,y)$, так что для любого $a \in p(M)$ множество $R(a,M)$ выпукло, $R(a,M) \subset q(M)$ и $R(a,M)^- = q(M)^-$. Предположим также дополнительно, что M' — слабо о-минимальная структура и $p, q \in S_1^{M'}(\emptyset)$. Найдем необходимые и достаточные условия счетной категоричности теории $Th(M')$.

Теорема 2. *Пусть M — счетно категоричная слабо о-минимальная структура ранга выпуклости 1, $p, q \in S_1^M(\emptyset)$ — неалгебраические. Предположим, что M' — слабо о-минимальное обогащение ранга выпуклости 1 структуры M бинарным предикатом $R(x,y)$, так что $p, q \in S_1^{M'}(\emptyset)$, для любого $a \in p(M')$ $R(a,M')$ выпукло, $R(a,M') \subset q(M')$ и $R(a,M')^- = q(M')^-$. Тогда $Th(M')$ счетно категорична тогда и только тогда, когда $p \perp_M^w q$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Предположим, что $Th(M')$ счетно категорична. В силу счетной категоричности $Th(M')$ существуют $\emptyset$-определимые формулы $U_p(x)$ и $U_q(x)$, так что $U_p(M') = p(M')$ и $U_q(M') = q(M')$.

Заметим, что поскольку $Th(M)$ является счетно категоричной слабо о-минимальной теорией ранга выпуклости 1, то в силу следствия 1 для любых $p, q \in S_1^M(\emptyset)$ либо эти типы слабо ортогональны, либо между ними существует единственная $\emptyset$-определимая биекция и других отношений нет, либо существует единственный (p,q)-секатор и других отношений нет.

Допустим противное: типы p и q не слабо ортогональны в структуре M. Следовательно, существует (p,q)-секатор $R_1(x,y)$, т.е. для любого $a \in p(M')$ множество $R_1(a,M')$ выпукло, $R_1(a,M') \subset q(M')$ и $R_1(a,M')^- = q(M')^-$.

Поскольку теория $Th(M)$ имеет ранг выпуклости 1, то функция $f_1(x) := \sup R_1(x,M)$ является строго монотонной на $p(M)$. Не умаляя общности, предположим что f_1 — строго возрастающая на $p(M)$.

Пусть $f_2(x) := \sup R(x,M')$. Поскольку $Th(M')$ также имеет ранг выпуклости 1, $p, q \in S_1^{M'}(\emptyset)$, то f_2 также является строго монотонной на $p(M')$.

Случай 1. f_2 является строго возрастающей на $p(M')$.

Не умаляя общности, предположим, что для некоторого $a \in p(M')$ выполняется $f_1(a) < f_2(a)$. Тогда для любого $a \in p(M')$ имеет место $f_1(a) < f_2(a)$.

Рассмотрим следующие формулы:

$$F_1(x,y) := y \le x \wedge \neg U_q(x) \wedge \exists t[U_p(t) \wedge \neg R_1(t,y) \wedge R(t,y) \wedge R(t,x)]$$

$$F_n(x,y) := \exists t[F_{n-1}(t,y) \wedge F_1(x,t)], n \ge 2$$

Тогда для любого $b \in \neg U_q(M')$ имеет место

$$F_1(M',b) \subset F_2(M',b) \subset \ldots \subset F_n(M',b) \subset \ldots,$$

т.е. $Th(M')$ не является счетно категоричной, что противоречит нашему предположению.

Случай 2. f_2 является строго убывающей на $p(M')$.

Тогда существуют $a, a' \in p(M')$ такие, что $f_1(a) < f_2(a)$ и $f_1(a') > f_2(a')$. Последнее противоречит тому, что $p \in S_1^{M'}(\emptyset)$.

($\Leftarrow$) Пусть $p \perp_M^w q$. Поймем, что $Th(M')$ — счетно категорична.

Случай 1. Для некоторого $a \in p(M')$ множество $R(a, M')$ имеет правую концевую точку.

Тогда рассмотрим следующую формулу:

$$\theta(x) := U_q(x) \wedge \exists u(U_p(u) \wedge \forall y[R(u,y) \to y \leq x] \wedge \forall t[\neg R(u,t) \to t \geq x])$$

Очевидно, что $\theta(M') \subseteq q(M')$. По условию $\theta(M') \neq \emptyset$, откуда получаем, что $\theta(M') = q(M')$. Таким образом, для любого $a \in p(M')$ множество $R(a, M')$ имеет правую концевую точку.

Следовательно, функция $f_2(x) := \sup R(x, M')$ является строго монотонной биекцией между $p(M')$ и $q(M')$.

Случай 2. Для некоторого $a \in p(M')$ множество $R(a, M')$ не имеет правой концевой точки.

Тогда рассмотрим следующую формулу:

$$\psi(x) := U_p(x) \wedge \forall y_1(R(x,y_1) \to \exists t_1[y_1 < t_1 \wedge R(x,t_1)]) \wedge$$
$$\wedge \forall y_2[\neg R(x,y_2) \to \exists t_2[t_2 < y_2 \wedge \neg R(x,t_2)])$$

Очевидно, что $\psi(M') \subseteq p(M')$. По условию $\psi(M') \neq \emptyset$, откуда получаем, что $\psi(M') = p(M')$. Таким образом, для любого $a \in p(M')$ множество $R(a, M')$ не имеет правой концевой точки.

Следовательно, формула $R(x, y)$ является единственным (p, q)-секатором.

В обоих случаях $Th(M')$ допускает элиминацию кванторов до языка

$$\{=, <\} \cup \{c_i : i \leq n\} \cup \{U_s(x) : s \leq r\} \cup$$
$$\cup \{f_{i,j} : \mathrm{dcl}(\{a\}) \cap p_j(M') \neq \emptyset \text{ для некоторого } a \in p_i(M')\} \cup$$
$$\cup \{R_{i,j}(x,y) : p_i \not\perp_{M'}^w p_j, \mathrm{dcl}(\{a\}) \cap p_j(M') = \emptyset \text{ для всех } a \in p_i(M')\}$$

где $\{c_0, \ldots, c_n\}$ — множество всех $\emptyset$-определимых элементов структуры M'; $U_s(x)$ изолирует неалгебраический 1-тип p_s для каждого $s \leq r$; $f_{i,j}$ — единственная $\emptyset$-определимая биекция между $p_i(M')$ и $p_j(M')$, являющаяся строго монотонной; $R_{i,j}(x, y)$ — единственный (p_i, p_j)-секатор. Тогда в силу следствия 1 теория $Th(M')$ является счетно категоричной. □

Определение 3. [13] Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, M — $|A|^+$-насыщена, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический.
(1) A-определимая формула $F(x, y)$ называется *p-стабильной*, если существуют α, γ_1, $\gamma_2 \in p(M)$ такие, что $F(M, \alpha) \setminus \{\alpha\} \neq \emptyset$ и $\gamma_1 < F(M, \alpha) < \gamma_2$.
(2) p-стабильная формула $F(x, y)$ называется *выпуклой вправо (влево)*, если существует $\alpha \in p(M)$ такой, что $F(M, \alpha)$ выпукло, α — левая (правая) концевая точка множества $F(M, \alpha)$ и $\alpha \in F(M, \alpha)$.

Пусть $F_1(x, y), F_2(x, y)$ — p-стабильные выпуклые вправо (влево) формулы. Будем говорить, что $F_2(x, y)$ *больше чем* $F_1(x, y)$, если существует $\alpha \in p(M)$ такой, что $F_1(M, \alpha) \subset F_2(M, \alpha)$.

Определение 4. [14] Будем говорить, что p–стабильная выпуклая вправо (влево) формула $F(x, y)$ является *эквивалентность-генерирующей*, если для любых $\alpha, \beta \in p(M)$ таких, что $M \models F(\beta, \alpha)$, имеет место следующее:

$$M \models \forall x(x \geq \beta \to (F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)))$$

$$(M \models \forall x(x \leq \beta \to (F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)))) .$$

Лемма 2. [14] *Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический, M — $|A|^+$–насыщена. Предположим, что $F(x, y)$ — p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула, являющаяся эквивалентность-генерирующей. Тогда*

1) $G(x, y) := F(y, x)$ — p-стабильная выпуклая влево (вправо) формула, являющаяся также эквивалентность-генерирующей.

2) $E(x, y) := F(x, y) \vee F(y, x)$ — отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Предложение 1. [14] *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический. Тогда любая p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула является эквивалентность-генерирующей.*

Следующий пример показывает, что при обогащении счетно категоричной слабо о-минимальной структуры ранга выпуклости, большего 1, (p, q)-секатором для неалгебраических типов $p, q \in S_1(\emptyset)$ данное обогащение может сохранить счетную категоричность даже в случае не слабой ортогональности этих типов.

Пример 4. Возвращаясь к примеру 3, внесем следующие изменения: отождествим интерпретацию P с $\mathbb{Q}^3$, упорядоченным лексикографически, и пусть частичная унарная функция f определяется равенством $f((n, m, k)) = n$ для всех $(n, m, k) \in \mathbb{Q}^3$.

Очевидно, что M также остается счетно категоричной слабо о-минимальной структурой.

По условию для каждого $b \in q(M)$ существует $a \in \mathbb{Q}$, такой, что $\{a\}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \subseteq P(M)$ и $f((a, \mathbb{Q} \times \mathbb{Q})) = b$.

Рассмотрим обогащение M' структуры M бинарным предикатом $R(x, y)$ таким, что для любых $(a, c, d) \in P(M)$ и $b \in \neg P(M)$ выполняется

$$R(b, (a, c, d)) \Leftrightarrow f((a, \mathbb{Q} \times \mathbb{Q})) \leq b \wedge [f((a, \mathbb{Q} \times \mathbb{Q})) = b \Rightarrow (a, c, d) \in (a, c, \mathbb{Q})]$$

Тогда также имеем, что для любого $b \in q(M)$ множество $R(b, M)$ выпукло, $R(b, M) \subset q(M)$, $R(b, M)^- = p(M)^-$ и $\Phi_1(b, M) \subset R(b, M) \subset \Phi_2(b, M)$.

Может быть доказано, что $Th(M')$ — счетно категоричная слабо о-минимальная теория, и $p, q \in S_1^{M'}(\emptyset)$.

Рассмотрим следующую формулу:

$$F(x, y) := y \leq x \wedge P(y) \wedge P(x) \wedge \exists t[\neg P(t) \wedge R(t, x)]$$

Может быть установлено, что $F(x, y)$ является p-стабильной выпуклой вправо формулой, причем $F(x, y)$ — эквивалентность-генерирующая. Тогда в силу леммы 2 $E'(x, y) := F(x, y) \vee F(y, x)$ определяет отношение эквивалентности, разбивающее $p(M')$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем для любого $a \in p(M')$ имеет место $E'(a, M') \subset E(a, M')$. Откуда получаем, что $RC(p) = 3$, и следовательно $Th(M')$ имеет ранг выпуклости 3.

References

[1] H.D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, *Weakly o-minimal structures and real closed fields*, Transactions of The American Mathematical Society, **352**:12 (2000), 5435–5483. Zbl 0982.03021

[2] B.Sh. Kulpeshov, *Weakly o-minimal structures and some of their properties*, The Journal of Symbolic Logic, **63**:4 (1998), 1511–1528. Zbl 0926.03041

[3] Байжанов С.С., Кулпешов Б.Ш., *Инвариантные свойства при обогащениях моделей вполне о-минимальных теорий*, Известия Национальной Академии наук Республики Казахстан, серия физико-математическая, **311**:1, (2017), 65–71.

[4] Байжанов С.С., Кулпешов Б.Ш., *Обогащение моделей вполне о-минимальных теорий унарными предикатами*, Тезисы докладов ежегодной научной апрельской конференции Института математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, 2017, 16–18.

[5] Байжанов С.С., Кулпешов Б.Ш., *Обогащение моделей счетно категоричных слабо о-минимальных теорий унарными предикатами*, Тезисы международной конференции "Актуальные проблемы чистой и прикладной математики", посвященной 100-летию академика Тайманова А.Д., Алматы, 2017, 13–15.

[6] S.S. Baizhanov, B.Sh. Kulpeshov, *Preserving properties of expansions of models of ordered theories by unary predicates*, Handbook of the 6th World Congress and School on Universal Logic June 16–26, 2018 Vichy, France, Vichy University, 2018, 228–229.

[7] S.S. Baizhanov, B.Sh. Kulpeshov, *Preservation of ω-categoricity in expanding the models of weakly o-minimal theories*, Siberian Mathematical Journal, **59**:2, (2018), 207–216. Zbl 06908369

[8] S.S. Baizhanov, B.Sh. Kulpeshov, *Expanding 1-indiscernible countably categorical weakly o-minimal theories by equivalence relations*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15**, (2018), 106–114. Zbl 06855318

[9] S.S. Baizhanov, B.Sh. Kulpeshov, *On expanding countably categorical weakly o-minimal theories by binary predicates*, News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, **317**:1, (2018), 18–24.

[10] B.S. Baizhanov, *Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates*, The Journal of Symbolic Logic, **66**:3 (2001), 1382–1414. Zbl 0992.03047

[11] B.Sh. Kulpeshov, *Criterion for binarity of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories*, Annals of Pure and Applied Logic, **45**:2 (2007), 354–367. Zbl 1112.03034

[12] B.Sh. Kulpeshov, Countably categorical weakly o-minimal strtucres of finite convexity rank, Siberian Mathematical Journal, **57**:4 (2016), 606–617. Zbl 06658521

[13] B.S. Baizhanov, *One-types in weakly o-minimal theories*, Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, Almaty, 1996, 75–88.

[14] B.S. Baizhanov, B.Sh. Kulpeshov, *On behaviour of* 2*-formulas in weakly o-minimal theories*, Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference (editors S. Goncharov, R. Downey, H. Ono), Singapore, World Scientific, 2006, 31–40. Zbl 1119.03033

Sayan Samatovich Baizhanov
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
125, Pushkin str.,
Almaty, 050010, Kazakhstan
Al-Farabi Kazakh National University,
71, Al-Farabi av.,
Almaty, 050040, Kazakhstan
E-mail address: `sayan-5225@mail.ru`

Beibut Shaiykovich Kulpeshov
International Information Technology University,
34/1, Manas str.,
Almaty, 050040, Kazakhstan
Kazakh-British Technical University,
59, Tole bi str.,
Almaty, 050000, Kazakhstan
E-mail address: `b.kulpeshov@iitu.kz`