S©MRa ISSN 0000-0000

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 683–691 (2019) УДК 517.51
DOI 10.33048/semi.2019.16.044 MSC 46E35

ОБОБЩЕННЫЕ КОНДЕНСАТОРЫ И ВЕКТОРНЫЕ МЕРЫ

Ю.В. ДЫМЧЕНКО, В.А. ШЛЫК

Abstract. There are established the relations between capacity of generalized condenser and modulus of vector measures configurations.

Keywords: generalized condensers, capacity of condenser, Muckenhoupt weight, vector measures.

В данной работе рассматриваются емкости обобщенных конденсаторов, введенных В.Н. Дубининым в [5], а также модули семейств векторных мер [4]. Используя построения из [1, 4], доказываем соотношения между емкостями обобщенных конденсаторов и модулями семейств векторных мер.

Пусть G — открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $n \geq 2$. Для произвольного измеримого по Лебегу множества $F \subset R^n$ обозначим через $L_n(F) = |F|$ его n-мерную меру Лебега; A_p — класс локально интегрируемых функций $w : R^n \to (0; +\infty)$, удовлетворяющих условию Макенхаупта

$$\sup \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w\, dx \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w^{1-q}\, dx \right)^{p-1} < \infty,$$

где супремум берется по всем координатным кубам $Q \subset R^n$, $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Обозначим через $a \cdot b$ скалярное произведение двух векторов, $d(A, B)$ — евклидово расстояние между множествами A и B, и пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ — матрица с измеримыми элементами, удовлетворяющая условию

$$c_0^{-2} w(x)^{2/p} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq c_0^2 w(x)^{2/p} |\xi|^2,$$

где $c_0 \geq 1$, $\xi \in R^n$, $p > 1$.

Dymchenko, Yu.V., Shlyk, V.A., Generalized condensers and vector measures.
© 2019 Дымченко Ю.В., Шлык В.А.
Поступила 6 марта 2019 г., опубликована 20 мая 2019 г.

Для $\xi \in R^n$ обозначим $\mathcal{A}[\xi] = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right)^{1/2}$, $\mathcal{A}_p(\xi) = \left(\int\limits_G \mathcal{A}[\xi]^p\,dx\right)^{1/p}$.
Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$. Известно, что для положительно определённой матрицы существует квадратный корень, который тоже является положительно определённой матрицей. Обозначим соответствующие матрицы через $\sqrt{\mathcal{A}}$ и $\sqrt{\mathcal{B}}$. Из предыдущих неравенств следует, что для любого $\eta \in R^n$

$$
\begin{gathered}
c_0^{-1}w(x)^{1/p}|\eta| \le |\sqrt{\mathcal{A}}\eta| \le c_0 w(x)^{1/p}|\eta|, \\
c_0^{-1}w(x)^{-1/p}|\eta| \le |\sqrt{\mathcal{B}}\eta| \le c_0 w(x)^{-1/p}|\eta|.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Определим векторную меру $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, где каждая компонента ν_i представляет собой борелевскую меру со знаком. Полную вариацию $|\nu|$ векторной меры ν определим следующим образом:

$$
|\nu|(E) = \sup \sum_j \left(\sum_{i=1}^{n} (\nu_i(E_j))^2\right)^{1/2}
$$

для любого борелевского множества E, где супремум берётся по всем разбиениям $\{E_j\}$ множества E.

Через $L^1_{p,w}(G)$ обозначим класс функций $u : G \to (-\infty, +\infty)$, локально интегрируемых в G, имеющих в G обобщенные частные производные и таких, что

$$
\int\limits_G |\nabla u|^p\, w dx < \infty.
$$

В $L^1_{p,w}(G)$ введем норму

$$
\|u\|_{L^1_{p,w}(G)} = \left(\int\limits_G |\nabla u|^p\, w dx\right)^{\frac{1}{p}},
$$

в котором функции из $L^1_{p,w}(G)$, отличающиеся друг от друга на постоянную $\mathcal{L}_n$-почти везде на каждой компоненте связности множества G, отождествляются.

Обобщенным конденсатором (в дальнейшем просто конденсатором) назовем набор множеств

$$
(E_1, E_2, \dots, E_m, G, \delta_1, \dots, \delta_m) = (\{E_i\}, G, \{\delta_i\}),
$$

где $E_1, E_2, \dots, E_m \subset \bar{G}$ — попарно непересекающиеся компакты в $\overline{R^n} = R^n \cup \{\infty\}$, $m \ge 2$ и $\delta_1, \dots, \delta_m$ — некоторые попарно различные числа, сопоставленные этим компактам.

Множества E_i, $G_0 = G \setminus E_0$, где $E_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i$, назовем соответственно пластинами и полем конденсатора $(\{E_i\}, G, \{\delta_i\})$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Обозначим через $\mathcal{D}$ класс абсолютно непрерывных на (p,w)-почти всех кривых из G функций u таких, что $u \to \delta_i$ при $x \to E_i \cap \bar{G}$ по (p,w)-почти всем кривым из G, $i = 1, \dots, m$; $\mathcal{D}^*$ — замыкание в $L^1_{p,w}(G)$ класса абсолютно непрерывных на (p,w)-почти всех кривых из G функций u таких, что $u = \delta_i$ в некоторой окрестности компакта E_i, $i = 1, \dots, m$.

Определим емкости конденсатора следующим образом:

$$C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) = \inf\{\mathcal{A}_p(\nabla u)^p : u \in \mathcal{D}\},$$
$$C^*_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) = \inf\{\mathcal{A}_p(\nabla u)^p : u \in \mathcal{D}^*\}.$$

Заметим, что $C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) \le C^*_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\})$.

Кривой γ в R^n назовем образ числового интервала (a,b) или отрезка $[a,b]$ при непрерывном отображении $x = x(t)$ его в R^n. В дальнейшем считаем, что отображение $x = x(t)$ не является постоянным ни на одном интервале из области определения $x(t)$ и задает параметризацию кривой γ.

Будем говорить, что кривая γ соединяет множества E и $F \subset \overline{R^n}$, если для ее параметризации $x = x(t)$, $a < t < b$, выполняется условие

$$\liminf_{t\to a} h(x(t), E) = \liminf_{t\to b} h(x(t), F) = 0.$$

Если ρ — неотрицательная борелевская функция в G и γ — локально спрямляемая кривая из G, то, используя натуральную параметризацию $x = x(s)$, $s \in S$ (подробнее см. [7, §2.2]), определим $\int\limits_\gamma \rho\, ds$ как интеграл Лебега $\int\limits_S \rho(x(s))\, ds$.

Пусть дано некоторое семейство Γ локально спрямляемых кривых в G. Определим (p,w)-модуль с весом $w \in A_p$ семейства Γ следующим образом:

$$m_{p,w}(\Gamma) = \inf \int\limits_G \rho^p\, w dx,$$

где инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho : G \to [0; +\infty]$ таким, что $\int\limits_\gamma \rho\, ds \ge 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. Такие функции назовем допустимыми для Γ. Если $w \equiv 1$, то соответствующий модуль будем обозначать через $m_p(\Gamma)$.

Если вышеуказанное условие на ρ выполняется для всех $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$, где $m_{p,w}(\Gamma_0) = 0$, то такую функцию будем называть (p,w)-почти допустимой. Известно [7, теорема 1.3.6], что инфимум в определении (p,w)-модуля можно брать по (p,w)-почти допустимым функциям.

Конденсатору $(\{E_i\}, G, \{\delta_i\})$ и его емкости $C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\})$ сопоставим набор семейств кривых

$$H = \{H_{12}, \dots, H_{m-1,m}\}$$

и набор чисел $\alpha = \{\alpha_{12}, \dots, \alpha_{m-1,m}\}$, где H_{ij} — семейство локально спрямляемых кривых в G_0, соединяющих E_i и E_j, а $\alpha_{ij} = |\delta_i - \delta_j|$, $1 \le i < j \le m$. При этом кривую $\gamma \in H_{ij}$ считаем ориентированной, при $\delta_i < \delta_j$ считаем ее идущей от множества E_i до множества E_j, а при $\delta_i > \delta_j$ — в обратном направлении.

Пусть дана конфигурация $\alpha\mathcal{E} = (\alpha_{11}\mathcal{E}_{11}, \alpha_{12}\mathcal{E}_{12}, \dots, \alpha_{m-1,m}\mathcal{E}_{m-1,m})$, где каждое $\mathcal{E}_{ij}$ представляет собой семейство неотрицательных борелевских мер, $1 \le i < j \le m$. Неотрицательную борелевскую функцию ρ будем называть допустимой для $\alpha\mathcal{E}$, если

$$\int\limits_\gamma \rho\, d\nu \ge \alpha_{ij}$$

для всех $\nu \in \mathcal{E}_{ij}$ и всех $\mathcal{E}_{ij} \ne \emptyset$, $1 \le i < j \le m$.

Модулем $m_{p,w}(\alpha\mathcal{E})$ конфигурации $\alpha\mathcal{E}$ назовем величину $\inf \int\limits_G \rho^p\, w dx$, где инфимум берется по всем допустимым для $\alpha\mathcal{E}$ функциям ρ. Если $w \equiv 1$, то соответствующий модуль будем обозначать через $m_p(\alpha\mathcal{E})$.

Семейство векторных мер назовём (p,w)-исключительным, если (p,w)-модуль семейства их полных вариаций равен нулю.

Для любой положительно определенной матрицы $Q=(q_{ij})$ определим семейства мер

$$|\sqrt{Q}dH_{ij}| = \left\{ |\sqrt{Q}dx||_\gamma = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}dx_i dx_j}\,\Bigg|_\gamma, \gamma\in H_{ij} \right\}$$

и семейства векторных мер

$$dH_{ij} = \{dx|_\gamma = (dx_1(s), dx_2(s), \ldots, dx_n(s))|_\gamma, \gamma\in H_{ij}\}, \quad 1\le i<j\le m.$$

Из них составим соответствующие конфигурации $\alpha|\sqrt{Q}dH|$ и αdH.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для (p,w)-почти всех кривых, если семейство кривых, для которого оно не выполняется, является (p,w)-исключительным.

Определим $(\mathcal{A},p)$-модуль конфигурации αdH следующим образом:

$$m_{\mathcal{A},p}(\alpha dH) = \inf \mathcal{A}_p(\xi)^p,$$

где инфимум берется по таким вектор-функциям ξ, что $\int\limits_\gamma \xi\cdot dx \ge \alpha_{ij}$ для (p,w)-почти всех $\gamma\in H_{ij}, 1\le i<j\le m$. Такие функции ξ будем называть допустимыми для αdH.

Теорема 1. $C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\},G,\{\delta_i\}) = m_{\mathcal{A},p}(\alpha dH) = m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}dH|)$.

Доказательство. Класс $\mathcal{D}^*$ непуст, доказательство приведено в [2, лемма 1]. Поэтому $C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\},G,\{\delta_i\}) \le C^*_{\mathcal{A},p}(\{E_i\},G,\{\delta_i\}) < \infty$. Используя теорему 4.4.2 из [7], получим, что для любой $u\in\mathcal{D}$ и (p,w)-почти всех кривых $\gamma\subset G_0$ выполнено следующее условие: для любой спрямляемой подкривой $\tilde\gamma\subset\gamma$

$$\int\limits_{\tilde\gamma} \nabla u\cdot dx = u(e(\tilde\gamma)) - u(s(\tilde\gamma)), \tag{2}$$

где $s(\tilde\gamma)$ и $e(\tilde\gamma)$ - соответственно начальная и конечная точки кривой $\tilde\gamma$.

Возьмем произвольные $1\le i<j\le m$ и кривую $\gamma\in H_{ij}$ такую, вдоль которой $u(x)$ стремятся к δ_i и δ_j при стремлении x к E_i и E_j соответственно. Рассмотрим произвольную спрямляемую подкривую $\tilde\gamma\subset\gamma\cap G_0$. Устремляя начальную и конечную точки $\tilde\gamma$ к множествам E_i и E_j из равенства (2) получим

$$\int\limits_\gamma \nabla u\cdot dx = |\delta_i-\delta_j| = \alpha_{ij},$$

то есть ∇u допустима для αdH. Следовательно, $m_{\mathcal{A},p}(\alpha dH)\le\mathcal{A}_p(\nabla u)^p$. Переходя к инфимуму по u, получим

$$m_{\mathcal{A},p}(\alpha dH) \le C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\},G,\{\delta_i\}) < \infty. \tag{3}$$

Далее рассмотрим произвольную функцию ξ, допустимую для αdH. Для (p,w)-почти всех $\gamma\in H_{ij}$, $1\le i<j\le m$ имеем

$$\alpha_{ij} \le \int\limits_\gamma \xi\cdot dx = \int\limits_\gamma \sqrt{\mathcal{A}}\xi\cdot\sqrt{\mathcal{B}}dx \le \int\limits_\gamma |\sqrt{\mathcal{A}}\xi||\sqrt{\mathcal{B}}dx|,$$

откуда следует, что функция $|\sqrt{\mathcal{A}}\xi|$ допустима для конфигурации $\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}dH|$. Поэтому

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}dH|) \le \mathcal{A}_p(\xi)^p.$$

переходя к инфимуму по ξ, получим

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}dH|) \le m_{\mathcal{A},p}(\alpha dH). \tag{4}$$

Далее докажем неравенство

$$C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) \le m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}dH|). \tag{5}$$

Заметим, что

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}dH|) = m_{p,w}(\alpha|w^{1/p}\sqrt{\mathcal{B}}dH|).$$

Пусть ρ — произвольная допустимая неотрицательная функция для конфигурации $\alpha|w^{1/p}\sqrt{\mathcal{B}}dH|$, то есть для любой кривой $\gamma \in H_{ij}$ выполняется

$$\int\limits_\gamma \rho w^{1/p}|\sqrt{\mathcal{B}}\,dx| \ge \alpha_{ij}, \quad 1 \le i < j \le m.$$

Для любого $1 \le i \le m$ определим на G_0 функцию

$$u_i(x) = \delta_i + \inf \int\limits_\gamma \rho w^{1/p}|\sqrt{\mathcal{B}}\,dx|,$$

где инфимум берется по всем кривым, соединяющим точку $x \in G_0$ с E_i. Если таких кривых не существует, то полагаем $u_i(x) = \max\limits_i \delta_i$. В силу оценок (1) и свойств модуля из [6, Теорема 3]

$$\int\limits_\gamma \rho w^{1/p}|\sqrt{\mathcal{B}}dx| \le c_0 \int\limits_\gamma \rho\,ds < \infty \tag{6}$$

для (p,w)-почти всех кривых $\gamma \subset G_0$. Следовательно, для таких кривых

$$|u_i(b) - u_i(a)| \le \int\limits_{\widetilde{ab}} \rho w^{1/p}|\sqrt{\mathcal{B}}dx| \le c_0 \int\limits_{\widetilde{ab}} \rho\,ds \tag{7}$$

для любых точек a, b на γ, где $\widetilde{ab}$ — дуга кривой γ между точками a и b. Отсюда получаем, что функция u_i абсолютно непрерывна на (p,w)-почти всех кривых в G_0 и почти везде в G $|\partial u_i/\partial x_k| \le c_0\rho$, $k = 1, 2, \ldots, n$, откуда следует, что $\int\limits_G |\nabla u_i|^p\, w dx < \infty$.

Неравенство

$$|\sqrt{\mathcal{A}(x)}\nabla u_i(x)| \le \rho(x) w(x)^{1/p} \tag{8}$$

для почти всех $x \in G_0$ доказывается в точности так же, как и в [1, теорема 1].

Функция ρ удовлетворяет неравенству (6) для (p,w)-почти всех кривых γ в G_0. Возьмём такую кривую γ, соединяющую E_i и E_j, $i \ne j$, и параметризуем её параметром t (если таких кривых не существует, то в некоторой окрестности компакта E_i $u_i = \max\limits_k \delta_k \ge \delta_i$). Пусть уравнение этой кривой будет $x = x(t)$, где $x(t) \to E_i$ при $t \to t_0$ и $x(t) \to E_j$ при $t \to t_1$. Имеем:

$$\delta_i \le u_i(x(t)) \le \int\limits_{t_0}^{t} \rho w^{1/p}|\sqrt{\mathcal{B}}dx| \le \delta_i + c_0 \int\limits_{t_0}^{t} \rho\,ds \to \delta_i$$

при $t \to t_0$. Отсюда следует, что по (p, w)-почти всем кривым $u_i(x) \to \delta_i$, когда $x \to E_i$.

Докажем теперь, что $\liminf\limits_{x \to E_j} u_i(x) \geq \delta_i + \alpha_{ij}$, $j \neq i$, по (p, w)-почти всем кривым. Предположим противное, что для кривой γ, для которой выполняется неравенство (6), указанный нижний предел равен $\alpha_0 < \delta_i + \alpha_{ij}$. Пусть $\varepsilon = \delta_i + \alpha_{ij} - \alpha_0$. По определению, существует t, $t_0 < t < t_1$ такое, что

$$|u_i(x(t)) - \alpha_0| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \int\limits_t^{t_1} \rho\, ds < \frac{\varepsilon}{3c_0}.$$

По определению $u_i(x)$, существует кривая γ', соединяющая $x(t)$ с E_i такая, что

$$\delta_i + \int\limits_{\gamma'} \rho w^{1/p} |\sqrt{\mathcal{B}} dx| < u_i(x(t)) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Если γ'' — часть кривой γ, соответствующая значениям параметра (t, t_1), то кривая $\gamma' \cup \gamma'' \in \Gamma$ и

$$\int\limits_{\gamma' \cup \gamma''} \rho w^{1/p} |\sqrt{\mathcal{B}} dx| < u_i(x(t)) - \delta_i + \frac{\varepsilon}{3} + c_0 \int\limits_t^{t_1} \rho\, ds < \alpha_0 - \delta_i + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \alpha_{ij}.$$

Это противоречит допустимости функции ρ.

Таким образом, мы получаем, что при стремлении $x \to E_i$ по (p, w)-почти всем кривым $u_i(x)$ имеет нижний предел, не меньший δ_i. При стремлении же $x \to E_j$, $j \neq i$, по (p, w)-почти всем кривым функция $u_i(x)$ также имеет предел, не меньший $\delta_i + \alpha_{ij} = \delta_i + |\delta_i - \delta_j| \geq \delta_j$.

Далее рассмотрим функцию $u(x) = \min\limits_{1 \leq i \leq m} u_i(x)$. Как следует из выше доказанного, $u(x)$ стремится к пределу, не меньшему δ_i, при стремлении $x \to E_i$ по (p, w)-почти всем кривым из $G_0, 1 \leq i \leq m$. Из неравенств (8) следует, что $|\sqrt{\mathcal{A}(x)} \nabla u(x)| \leq \rho(x) w(x)^{1/p}$.

Наконец, произведем срезку функции $u(x)$ сверху значениями δ_i в некоторых попарно непересекающихся окрестностях множеств E_i, $1 \leq i \leq m$. Получим функцию $\tilde{u}(x)$, которая стремится к δ_i при стремлении $x \to E_i$ по (p, w)-почти всем кривым из G_0, то есть $\tilde{u} \in \mathcal{D}$. Также

$$|\sqrt{\mathcal{A}(x)} \nabla \tilde{u}(x)| \leq |\sqrt{\mathcal{A}(x)} \nabla u(x)| \leq \rho(x) w(x)^{1/p}.$$

Поэтому, используя определение ёмкости, получим

$$C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) \leq \int\limits_G \mathcal{A}_p[\nabla \tilde{u}]^p\, dx \leq \int\limits_G \rho^p w\, dx.$$

Взяв инфимум по функциям ρ, получим неравенство (5). Неравенства (3), (4), (5) дают доказательство теоремы.

Далее докажем теорему о равенстве емкостей $C_{\mathcal{A},p}$ и $C^*_{\mathcal{A},p}$ при дополнительном условии непрерывности функции $w^{1/p}\sqrt{\mathcal{B}}$ в G_0. Это условие является более слабым, чем условие равномерной непрерывности указанной функции, приведенное в [4].

Для $r > 0$ и конечной точки $x \in \overline{R^n}$ обозначим через $B(x, r)$ открытый шар с центром в точке x и радиуса r; для $x = \infty$ положим

$$B(\infty, r) = \left\{ x \in \overline{R^n} : |x| > \frac{1}{r} \right\}.$$

Определим $\frac{1}{k}$-окрестности $O\left(E_i, \frac{1}{k}\right)$ множеств E_i как $\bigcup\limits_{x \in E_i} B\left(x, \frac{1}{k}\right)$, $1 \le i \le m$, $k = 1, 2, \dots$. Возьмем k_0 такое, что эти окрестности попарно не пересекаются при $k = k_0$. Пусть $O_i(k) \subset O\left(E_i, \frac{1}{k}\right)$ — открытые множества с гладкой границей такие, что $\overline{O_i(k+1)} \subset O_i(k)$, $k \ge k_0$. Также обозначим $E_{0k} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{O_i(k)}$, $\quad G_{0k} = G \setminus E_{0k}$. Через $H_{ij}(k)$ обозначим семейство кривых в G_{0k}, соединяющих $\overline{O_i(k)}$ и $\overline{O_j(k)}$, $1 \le i < j \le m$, $k \ge k_0$. Кривые считаем ориентированными, при $\delta_i < \delta_j$ начальная точка находится в множестве $\overline{O_i(k)}$, а конечная в $\overline{O_j(k)}$; при $\delta_i > \delta_j$ — наоборот. Конфигурацию $\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH(k)|$ определим аналогично $\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH|$.

Пусть G_k, $k = 1, 2, \dots$ — исчерпание G_0, то есть последовательность открытых множеств такая, что $\overline{G_k} \subset G_{k+1}$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k = G_0$. Так как $w^{1/p}\sqrt{\mathcal{B}}$ равномерно непрерывна на $\overline{G_k}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует η_k такое, что при $x, z \in G_k$, $|x - z| < \eta_k$ будет выполнено неравенство

$$\left| w^{1/p}(x)\sqrt{\mathcal{B}(x)} - w^{1/p}(z)\sqrt{\mathcal{B}(z)} \right| < c_0^{-1}\varepsilon. \tag{9}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Следующая лемма отличается от леммы 2 из [2] некоторыми дополнительными условиями и ее доказательство проводится таким же образом.

Лемма 1. *Пусть $(\{E_i\}, G, \{\delta_i\})$ — конденсатор и $G_k, k = 1, 2, \dots$ — исчерпание G_0, введенное выше. Тогда существует функция $\beta(x) \in C^\infty(G_0)$ такая, что $0 < \beta(x) < 1$, $|\nabla\beta(x)| < 1$, $2\beta(x) < d(x, \partial G_0)$ при $x \in G_0$, $\beta(x) < \min(\eta_2, d(x, \partial G_2))$ при $x \in G_1$, $\beta(x) < \min(\eta_{k+1}, d(x, \partial G_{k+1}))$ при $x \in G_k \setminus G_{k-1}$, $k > 1$.*

Если обозначить $d\sigma = |\sqrt{\mathcal{B}}\, dx|$, то, как легко следует из оценок (1),

$$c_0^{-1} \le \frac{d\sigma}{ds} \le c_0.$$

Используя эти неравенства, можно убедиться, что для заданного ε леммы 3, 4 из [2] с заменой ds на $d\sigma$ и αH, $\alpha H(k)$ на $\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH|$, $\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH(k)|$ переносятся без изменений. Приведем их формулировки:

Лемма 2. *Инфимум в определении модуля $m_{p,w}(\alpha|w^{1/p}\sqrt{\mathcal{B}}\, dH|)$ можно брать по допустимым функциям ρ, непрерывным в G_0 и таким, что для любого компакта $K \subset R^n$, $K \cap G_0 \ne \emptyset$, $\inf\limits_{G_0 \cap K} \rho > 0$.*

Лемма 3. *Пусть дана непрерывная в G_0 функция ρ, допустимая для*

$$\alpha|w^{1/p}\sqrt{\mathcal{B}}\, dH|,$$

$\int\limits_{G_0} \rho^p\, wdx < \infty$, *которая удовлетворяет условию: для любого компакта* $K \subset R^n$ $\inf\limits_{G_0 \cap K} \rho > 0$. *Тогда для заданного* $\varepsilon \in (0,1)$ *существуют окрестности* $O_i(k)$, $i = 1, \ldots, m$ *и функция* $\tilde{\rho}$, $\tilde{\rho} \geq \rho$ *в* G_0, *такие, что для любой кривой* $\gamma \in H_{ij}(k)$ *выполняются условия*

$$\int\limits_{\gamma} \tilde{\rho}\, d\sigma \geq \alpha_{ij}(1-\varepsilon), 1 \leq i < j \leq m.$$

Функция $\tilde{\rho}$ *непрерывна в* G_0, *исключая замкнутое множество нулевой* L_n*-меры, локально ограничена в* G_0 *и* $\tilde{\rho} = \rho$ *на* $G_0 \setminus \tilde{B}$, *где* $\int\limits_{\tilde{B}} \tilde{\rho}^p\, wdx < \varepsilon$, *и, следовательно,*

$$\int\limits_{G_0} \tilde{\rho}^p\, wdx < \int\limits_{G_0} \rho^p\, wdx + \varepsilon.$$

Далее нам потребуется аналог леммы 5 из [2] (см. также теорему 4 из [4]):

Теорема 2.

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH|) = \lim_{k\to\infty} m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH(k)|).$$

Доказательство. Здесь снова используем равенство

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH|) = m_{p,w}(\alpha w^{1/p}|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH|).$$

Очевидно, что семейство $H_{ij}(k)$ короче $H_{ij}(k+1)$ для $k \geq k_0$, $1 \leq i < j \leq m$. Поэтому [3, теорема 2.5]

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH|) \leq m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH(k)|),$$

следовательно,

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH|) \leq \lim_{k\to\infty} m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH(k)|).$$

С другой стороны, пусть ρ — произвольная положительная функция, допустимая для $\alpha w^{1/p}|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH|$ и удовлетворяющая условиям леммы 3. По лемме 3 найдем $\tilde{k}$ и функцию $\tilde{\rho}$. Тогда $\rho_0 = \dfrac{\tilde{\rho}}{1-\varepsilon}$ допустима для $\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH(\tilde{k})|$, если положить $\tilde{\rho} = 0$ на $G_0 \setminus G_{0\tilde{k}}$. Значит,

$$\int\limits_{G_{0\tilde{k}}} \rho_0^p\, wdx < \int\limits_{G_0} \rho^p\, wdx + o(1), \quad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда, используя произвол в выборе ρ, при $\varepsilon \to 0$ получим

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH(\tilde{k})|) \leq m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH|) + o(1).$$

Из монотонности $m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH(k)|)$ по k из этого следует, что при $k \geq \tilde{k}$

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH(k)|) \leq m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH|) + o(1).$$

Устремляя $k \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$, получим противоположное неравенство. Лемма доказана.

Теорема 3. *Если функция* $w^{1/p}\sqrt{\mathcal{B}}$ *непрерывна на* G_0, *то*

$$C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) = C^*_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}).$$

Доказательство. Неравенство $C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) \le C^*_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\})$ было отмечено ранее и является очевидным. Докажем противоположное неравенство.

Пусть $u \in \mathcal{D}^*$ и такая, что при достаточно больших k $u = \delta_i$ на $O_i(k)$, $1 \le i \le m$. Отсюда следует, что $|\nabla u|$ будет допустима для $\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH(k)|$ при достаточно больших k, поэтому при таких k

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}\, dH(k)|) \le \mathcal{A}_p(\nabla u)^p.$$

Аппроксимируя произвольную функцию $u \in D^*$ функциями указанного выше вида и переходя к пределу при $k \to \infty$, используя теоремы 1, 2 и произвол в выборе u, получаем противоположное неравенство. Теорема доказана.

References

[1] Yu. V. Dymchenko, V.A. Shlyk, *Capacity of polycondenser and modulus of family of vector measures*, Analit. teoriya chisel i teoriya funkcii. 24.(Zap. nauchn. sem. POMI), **371** (2009), 56–68.

[2] Yu. V. Dymchenko, V.A. Shlyk, *On a problem of Dubinin for the capacity of a condenser with a finite number of plates*, Mat. Zametki, **103**:6 (2018), 841–852. Zbl 1397.30025

[3] A.V. Sychev, *Modules and space quasiconformal mappings*, Novosibirsk: “Nauka”, 1983. Zbl 0528.30002

[4] H. Aikawa, M. Ohtsuka, *Extremal lenth of vector measures*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A., **24** (1999), 61–88. Zbl 0940.31006

[5] V. N. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Basel: Birkhauser / Springer, 2014. Zbl 1305.30002

[6] B. Fuglede, *Extremal length and functional completion*, Acta Math., **126**:3 (1957), 171–219. Zbl 0079.27703

[7] M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions*, GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications 19. Tokyo: Gakkōtosho, 2003. Zbl 1075.31001

Yuriy Viktorovich Dymchenko
Far Eastern Federal University,
8, Sukhanova str.,
Vladivostok, 690090, Russia
E-mail address: dymch@mail.ru

Vladimir Alekseevich Shlyk
Vladivostok Branch of Russian Customs Academy,
16v, Strelkovaya str.,
Vladivostok, 690034, Russia
E-mail address: shlykva@yandex.ru