S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 709–717 (2019) УДК 512.53, 512.58

DOI 10.33048/semi.2019.16.046 MSC 18D35

УРАВНИТЕЛИ И КОУРАВНИТЕЛИ В КАТЕГОРИЯХ ПРОСТРАНСТВ ЧУ НАД КАТЕГОРИЕЙ ПОЛИГОНОВ

А.А. СТЕПАНОВА, Е.Е.СКУРИХИН, А.Г. СУХОНОС

Abstract. We consider two categories of Chu spaces over the category of S-acts where S is commutative monoid. More precisely, we find necessary and sufficient conditions for the transformation of the categories of Chu spaces to be an equalizer or a coequalizer in the language of the morphisms of the category of S-acts.

Keywords: Chu spaces, Chu construction, S-act, monoidal category, equalizer, coequalizer.

В работе [6] рассмотрены категории пространств Чу над категорией S-полигонов, где S – коммутативный моноид. При этом структура моноидальной категории, необходимая для определения пространств Чу, задается тензорным произведением полигонов. Как правило, категория пространств Чу над моноидальной категорией наследует многие её свойства, в том числе полноту, то есть существование пределов и копределов. Это относится к рассматриваемой в работе категории $Chu(S-Act, D)$. Однако, как выяснилось, это не так в категории $Chu(S-Act)$ всех пространств Чу, то есть когда алфавит D не фиксируется, впервые введённой в работе [6]. Эта категория кополна, но имеются примеры [6], показывающие, что не всегда существуют пределы.

Известно, что для существования (ко)пределов необходимо и достаточно существования (ко)уравнителей и (ко)произведений и что (ко)предел стандартным образом вычисляется через (ко)произведение и (ко)уравнители. В связи с этим, в данной работе изучаются вопросы, связанные с уравнителями и коуравнителями для категорий $Chu(S-Act, D)$ и $Chu(S-Act)$ пространств Чу. Описываются уравнители и коуравнители в категории $Chu(S-Act, D)$,

---

Stepanova, A.A., Skurihin, E.E., Sukhonos, A.G., Category of Chu spaces over S-Act category.

Первый автор поддержан РФФИ (грант 17-01-00531).

Поступила 28 января 2019 г., опубликована 4 июня 2019 г.

коуравнители в категории $Chu(S-Act)$. Даются условия на морфизмы категории полигонов, определяющие преобразования пространств Чу, являющиеся необходимыми или достаточными для того, чтобы это преобразование было уравнителем или коуравнителем.

1. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{V}$ – моноидально замкнутая категория с тензорным произведением $\otimes$.

Рассмотрим категорию $Chu(\mathcal{V})$ пространств Чу [6]. Объектами категории являются морфизмы $r : A\otimes X \longrightarrow D$ категории $\mathcal{V}$, где $A, X, D \in Ob(\mathcal{V})$. В дальнейшем данные морфизмы будем называть пространствами Чу. Для объектов $r_1 : A_1\otimes X_1 \to D_1$ и $r_2 : A_2\otimes X_2 \to D_2$ морфизмом $(f, g, h) : (A_1\otimes X_1 \to D_1) \longrightarrow (A_2 \otimes X_2 \to D_2)$ категории $Chu(\mathcal{V})$ является тройка морфизмов $f : A_1 \longrightarrow A_2$, $g : X_2 \longrightarrow X_1$, $h : D_1 \longrightarrow D_2$ категории $\mathcal{V}$ такая, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A_1 \otimes X_2 \arrow[rr, "f\otimes 1_{X_2}"] \arrow[d, "1_{A_1}\otimes g"'] & & A_2 \otimes X_2 \arrow[d, "r_2"] \\
A_1 \otimes X_1 \arrow[r, "r_1"'] & D_1 \arrow[r, "h"'] & D_2
\end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. $h \circ r_1 \circ (1_{A_1} \otimes g) = r_2 \circ (f \otimes 1_{X_2})$. В дальнейшем морфизмы пространств Чу будем называть преобразованиями пространств Чу или просто преобразованиями Чу.

Категория, объектами которой являются морфизмы $A\otimes B \longrightarrow D$ категории $\mathcal{V}$ (пространства Чу) в фиксированный объект D категории $\mathcal{V}$, морфизмами (преобразованиями Чу) – пары морфизмов $f : A_1 \to A_2$, $g : X_2 \to X_1$ категории $\mathcal{V}$ таких, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A_1 \otimes X_2 \arrow[r, "f\otimes 1_{X_2}"] \arrow[d, "1_{A_1}\otimes g"'] & A_2 \otimes X_2 \arrow[d, "r_2"] \\
A_1 \otimes X_1 \arrow[r, "r_1"'] & D_2
\end{tikzcd}$$

коммутативна, обозначается $Chu(\mathcal{V}, D)$ [1, 2].

Напомним некоторые понятия из теории категорий [5], необходимые нам в дальнейшем.

Морфизм $f : A \to B$ категории $\mathcal{V}$ называется мономорфизмом, если для любых морфизмов морфизмов $g, h : C \to A$ категории $\mathcal{V}$ из равенства $f\circ g = f\circ h$ следует $g = h$. Морфизм $f : A \to B$ категории $\mathcal{V}$ называется эпиморфизмом, если для любых морфизмов морфизмов $g, h : B \to C$ категории $\mathcal{V}$ из равенства $g \circ f = h \circ f$ следует $g = h$.

Уравнитель морфизмов $f, g : A \to B$ в категории $\mathcal{V}$ – это мономорфизм $e : E \to A$ такой, что $f \circ e = g \circ e$, и для любого морфизма $h : F \to A$ такого, что $f \circ h = g \circ h$, существует морфизм $u : F \to E$, для которого следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ F \arrow[u, dotted, "u"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Коуравнитель морфизмов $f, g : A \to B$ в категории $\mathcal{V}$ – это эпиморфизм $q : B \to Q$ такой, что $q \circ f = q \circ g$, и для любого морфизма $h : B \to F$ такого, что $h \circ f = h \circ g$, существует морфизм $v : Q \to F$, для которого следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "h"'] & Q \arrow[d, dotted, "v"] \\ & & F \end{tikzcd}$$

Приводимые ниже понятия и факты из теории полигонов можно найти в [4].

Пусть S – моноид, 1 – единица моноида S. Множество A называется левым S-полигоном (или просто полигоном), если существует отображение $S \times A \longrightarrow A$, $(s, a) \mapsto sa$, такое, что для любых $a \in A$ и $s, t \in S$

$$1a = a \text{ и } s(ta) = (st)a.$$

Иными словами, полигон – это множество A, на котором определено действие моноида S, причем единица S действует на A тождественно. Элемент $\theta \in A$ такой, что $s\theta = \theta$ для любого $s \in S$, называется нулем полигона A. Одноэлементный полигон $\Theta = \{\theta\}$ называется нулевым полигоном.

Конгруэнцией полигона A называется отношение эквивалентности θ на A такое, что

$$(a, b) \in \theta \Rightarrow (sa, sb) \in \theta$$

для любых $a, b \in A$, $s \in S$. Класс конгруэнции θ полигона A с представителем a обозначается через a/θ. Конгруэнцией полигона A, порожденной множеством $I \subseteq A^2$, называется наименьшая относительно включения конгруэнция полигона A, содержащая I.

Отображение $f : A \longrightarrow B$ такое, что $f(sa) = sf(a)$ для любых $a \in A$, $s \in S$, называется морфизмом из полигона A в полигон B. Пусть $g_1, g_2 : B \to A$ – морфизмы. Через $\nu(g_1, g_2)$ обозначим конгруэнцию полигона A, порожденную множеством $\{(g_1(b), g_2(b))\} \mid b \in B\}$. Тождественное отображение из полигона A в полигон A обозначается через 1_A.

Класс всех полигонов над моноидом S с морфизмами образует категорию, которую будем обозначать через $S - Act$.

Теорема 1 ([4])**.** *Морфизм $f : A \to B$ в категории $S - Act$ является мономорфизмом (эпиморфизмом, изоморфизмом) тогда и только тогда, когда f – инъекция (сюръекция, биекция).*

Теорема 2 ([4])**.** *Уравнителем морфизмов $f_1, f_2 : A \to B$ в категории $S - Act$ является естественное вложение $i : E \to A$, где $E = \{a \in A \mid f_1(a) = f_2(a)\}$.*

Коуравнителем морфизмов $g_1, g_2 : B \to A$ в категории $S - Act$ является канонический эпиморфизм $\pi : A \to A/\nu(g_1, g_2)$.

Для коммутативного моноида S тензорное произведение $A \otimes B$ полигонов A и B определяется как фактор-полигон полигона $A \times B$ по конгруэнции, порожденной множеством $\{(sa, b), (a, sb) \mid a \in A, b \in B, s \in S\}$. Для $a \in A$ и $b \in B$ класс конгруэнции с представителем (a, b) будем обозначать $a \otimes b$. Заметим, что действие моноида S на множестве $A \otimes B$ обладает следующим свойством:

$$s(a \otimes b) = sa \otimes b = a \otimes sb$$

для любых $a \in A, b \in B, s \in S$.

Теорема 3 ([6]). *Пусть S – коммутативный моноид. Тогда $S - Act$ – симметричная моноидально замкнутая категория.*

В работе [6] конструкция Чу применяется к категории $S - Act$, где S – коммутативный моноид, а именно, вводятся в рассмотрение две категории: $Chu(S - Act)$ и $Chu(S - Act, D)$. В этой же работе дана характеризация мономорфизмов и эпиморфизмов этих категорий:

Теорема 4. [6] *Пусть $r : A \otimes X \to D$ и $t : B \otimes Y \to C$ – пространства Чу.*

1. Преобразование Чу $(f, g, h) : r \longrightarrow t$ категории $Chu(S - Act)$ является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда $f : A \longrightarrow B$ – эпиморфизм, $g : Y \longrightarrow X$ – мономорфизм и $h : D \longrightarrow C$ – эпиморфизм категории $S - Act$.

2. Преобразование Чу $(f, g, h) : r \longrightarrow t$ категории $Chu(S - Act)$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда $f : A \longrightarrow B$ – мономорфизм, $g : Y \longrightarrow X$ – эпиморфизм и $h : D \longrightarrow C$ – мономорфизм категории $S - Act$.

Теорема 5. [6] *Пусть $r : A \otimes X \longrightarrow D_1$, $s : B \otimes Y \longrightarrow D_2$ – пространства Чу и (f_1, g_1, h_1), $(f_2, g_2, h_2) : r \longrightarrow s$ – преобразования Чу. Тогда коуравнитель (f_1, g_1, h_1), (f_2, g_2, h_2) – это преобразование Чу $(f, g, h) : s \to t$, где $t : B/\nu(f_1, f_2) \otimes E \longrightarrow D_2/\nu(h_1, h_2)$, $E = \{y \in Y \mid g_1(y) = g_2(y)\}$, $t(b/\nu(f_1, f_2) \otimes y) = s(b \otimes y)/\nu(h_1, h_2)$ для любых $b \in B$, $y \in E$, f, h – канонические эпиморфизмы, g – естественное вложение.*

2. Уравнители в категориях $Chu(S - Act)$ и $Chu(S - Act, D)$

Теорема 6. *Пусть $(f, g, h) : r \to s$, $(f_1, g_1, h_1), (f_2, g_2, h_2) : s \to t$ – преобразования Чу в категории $Chu(S - Act)$, (f, g, h) – уравнитель (f_1, g_1, h_1) и (f_2, g_2, h_2). Тогда g – коуравнитель g_1 и g_2 и h – уравнитель h_1 и h_2 в категории $S - Act$.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполняются, $r : A \otimes X \to D_1$, $s : B \otimes Y \to D_2$, $t : F \otimes E \to D_3$ и (f, g, h) – уравнитель (f_1, g_1, h_1) и (f_2, g_2, h_2).

Покажем, что g – коуравнитель g_1 и g_2. Определим пространство Чу $p : A \otimes O \to D_1$, где $O = Y/\nu(g_1, g_2)$, следующим образом: $p(a \otimes \bar{y}) = r(a \otimes g(y))$ для любых $a \in A$, $y \in Y$, $\bar{y} = y/\nu(g_1, g_2)$. Определение корректно, так как из равенства $y_1 = g_1(e)$, $y_2 = g_2(e)$, где $e \in E$, следует $g(y_1) = g(y_2)$.

Определим эпиморфизм $n : Y \to O$ следующим образом: $n(y) = \bar{y}$, где $y \in Y$, $\bar{y} = y/\nu(g_1, g_2)$. Тогда $(f, n, h) : p \to s$ – преобразование Чу: $h \circ p(a \otimes n(y)) = h \circ r(a \otimes g(y)) = s(f(a) \otimes y)$ для любых $a \in A$, $y \in Y$. Так как $(f_1, g_1, h_1) \circ (f, n, h) = (f_2, g_2, h_2) \circ (f, n, h)$ и (f, g, h) – уравнитель (f_1, g_1, h_1) и (f_2, g_2, h_2), то существует $v : X \to O$ такой, что $n = v \circ g$. По теореме 2 n – коуравнитель g_1 и g_2. Тогда существует $v' : O \to X$ такое, что $g = v' \circ n$. Поскольку n – эпиморфизм, то из равенства $1_O \circ n = n = v \circ g = (v \circ v') \circ n$ следует $v \circ v' = 1_O$.

Аналогично $v' \circ v = 1_X$. Следовательно, v – изоморфизм. По теореме 2 g – коуравнитель g_1 и g_2.

Покажем, что h – уравнитель h_1, h_2. Определим пространство Чу $p : f(A) \otimes O \to D_4$, где $O = Y/\nu(g_1, g_2)$, $D_4 = \{d \in D_2 \mid h_1(d) = h_2(d)\} \subseteq D_2$, следующим образом: $p(f(a) \otimes \bar{y}) = s(f(a) \otimes y)$ для любых $a \in A$, $y \in Y$, $\bar{y} = y/\nu(g_1, g_2)$. Заметим, что определение корректно. Действительно, если $y_1 = g_1(e)$, $y_2 = g_2(e)$ для некоторого $e \in E$, то

$$p(f(a) \otimes \bar{y}_1) = s(f(a) \otimes g_1(e)) = h \circ r(a \otimes (g \circ g_1(e))) =$$
$$= h \circ r(a \otimes (g \circ g_2(e))) = s(f(a) \otimes g_2(e)) = p(f(a) \otimes \bar{y}_2)$$

для любых $a \in A$. Кроме того, из равенств $h_1 \circ p(f(a) \otimes \bar{y}) = h_1 \circ s(f(a) \otimes y) = h_1 \circ h \circ r(a \otimes g(y)) = h_2 \circ h \circ r(a \otimes g(y)) = h_2 \circ s(f(a) \otimes y) = h_2 \circ p(f(a) \otimes \bar{y})$ для любых $a \in A$, $y \in Y$ следует $p(f(A) \otimes O) \subseteq D_4$.

Ясно, что $(i, n, k) : p \to s$ – преобразование Чу, где $i : f(A) \to B$ – вложение, $n : Y \to Y/\nu(g_1, g_2)$ – канонический эпиморфизм, $k : D_4 \to D_2$ – вложение, и $(f_1, g_1, h_1) \circ (i, n, k) = (f_2, g_2, h_2) \circ (i, n, k)$. По теореме 2 k – уравнитель h_1 и h_2. Следовательно, существует $w' : D_1 \to D_4$ такой, что $k \circ w' = h$. Из того что (f, g, h) – уравнитель (f_1, g_1, h_1) и (f_2, g_2, h_2) следует, что h – мономорфизм и существует $w : D_4 \to D_1$ такой, что $k = h \circ w$. Так как $h \circ w \circ w' = k \circ w' = h = h \circ 1_{D_1}$, $k \circ w' \circ w = h \circ w = k = k \circ 1_{D_4}$ и h, k – мономорфизмы, то $w \circ w' = 1_{D_1}$ и $w' \circ w = 1_{D_4}$. Следовательно, w – изоморфизм. По теореме 1 h – уравнитель h_1 и h_2. □

Теорема 7. *Пусть $(f, g, h) : r \to s$, $(f_1, g_1, h_1), (f_2, g_2, h_2) : s \to t$ – преобразования Чу в категории $Chu(S - Act)$, f – уравнитель f_1 и f_2, g – коуравнитель g_1 и g_2 и h – уравнитель h_1 и h_2. Тогда (f, g, h) – уравнитель (f_1, g_1, h_1) и (f_2, g_2, h_2) в категории $Chu(S - Act)$.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполняются, $r : A \otimes X \to D_1$, $s : B \otimes Y \to D_2$, $t : F \otimes E \to D_3$.

Так как f, h – мономорфизмы, g – эпиморфизм полигонов, то по теореме 4 преобразование ЧУ (f, g, h) – мономорфизм. Предположим, что $p : C \otimes O \to D_4$ – пространство Чу, $(m, n, k) : p \to s$ – преобразование Чу и $(f_1, g_1, h_1) \circ (m, n, k) = (f_2, g_2, h_2) \circ (m, n, k)$. Так как f и h – уравнители f_1, f_2 и h_1, h_2 соответственно, а g – коуравнитель g_1, g_2, то существуют гомоморфизмы $u : C \to A$, $v : X \to O$ и $w : D_4 \to D_1$ такие, что $m = f \circ u$, $n = v \circ g$ и $k = h \circ w$,

Покажем, что (u, v, w) – преобразование Чу, т.е. выполняется равенство

$$r(u(c) \otimes x) = w \circ p(c \otimes v(x))$$

для любых $c \in C$, $x \in X$. Так как (m, n, k) – преобразование Чу, то $k \circ p(c \otimes n(y)) = s(m(c) \otimes y)$ для любых $c \in C$, $y \in Y$. Поскольку $m = f \circ u$, $n = v \circ g$ и $k = h \circ w$, то $s(m(c) \otimes y) = s((f \circ u(c)) \otimes y)$ и $k \circ p(c \otimes n(y)) = h \circ w \circ p(c \otimes (v \circ g(y)))$ для любых $c \in C$, $y \in Y$. Из того, что (f, g, h) – преобразование Чу, следует $s((f \circ u(c)) \otimes y) = h \circ r(u(c) \otimes g(y))$ для любых $c \in C$, $y \in Y$. Таким образом, $h \circ r(u(c) \otimes g(y)) = h \circ w \circ p(c \otimes (v \circ g(y)))$ для любых $c \in C$, $y \in Y$. Так как g – эпиморфизм, то для любого $x \in X$ существует $y \in Y$ такой, что $x = g(y)$. Следовательно, $h \circ r(u(c) \otimes x) = h \circ w \circ p(c \otimes v(x))$ для любых $c \in C$, $x \in X$. Из того, что h – мономорфизм, следует, что $r(u(c) \otimes x) = w \circ p(c \otimes v(x))$ для любых $c \in C$, $x \in X$, т.е. (u, v, w) – преобразование Чу. Ясно, что $(m, n, k) = (f, g, h) \circ (u, v, w)$. Таким образом, (f, g, h) – уравнитель (f_1, g_1, h_1) и (f_2, g_2, h_2). □

Теорема 8. *Пусть* $r : A \otimes X \to D_1$, $s : B \otimes Y \to D_2$ *– пространства Чу,* $(f_1, g_1, h_1), (f_2, g_2, h_2) : r \to s$ *– преобразования Чу в категории* $Chu(S - Act)$. *Уравнитель преобразований Чу* $(f_1, g_1, h_1), (f_2, g_2, h_2)$ *существует тогда и только тогда, когда существует элемент* $a \in A$ *такой, что*

1) $f_1(a) = f_2(a)$;

2) $r(a \otimes g_1(y)) = r(a \otimes g_2(y))$ *для любого* $y \in Y$;

3) $h_1 \circ r(a \otimes x) = h_2 \circ r(a \otimes x)$ *для любого* $x \in X$.

Доказательство. Предположим, что условия теоремы выполняются.

Необходимость. Пусть $t : C \otimes Z \to D$ – пространство Чу, $(f, g, h) : t \to r$ – уравнитель преобразований Чу $(f_1, g_1, h_1), (f_2, g_2, h_2)$, $c \in C$ и $a = f(c)$. Покажем, что элемент $a \in A$ удовлетворяет условиям 1)–3) теоремы. Так как $(f_1, g_1, h_1) \circ (f, g, h) = (f_2, g_2, h_2) \circ (f, g, h)$, то $f_1 \circ f = f_2 \circ f$, $g \circ g_1 = g \circ g_2$ и $h_1 \circ h = h_2 \circ h$. Тогда $f_1(a) = f_1 \circ f(c) = f_2 \circ f(c) = f_2(a)$, т.е. a удовлетворяет условию 1) теоремы. Так как

$$r(a \otimes g_1(y)) = r(f(c) \otimes g_1(y)) = h \circ t(c \otimes (g \circ g_1(y))) =$$

$$= h \circ t(c \otimes (g \circ g_2(y))) = r(f(c) \otimes g_2(y)) = r(a \otimes g_2(y))$$

для любого $y \in Y$, то a удовлетворяет условию 2) теоремы. Так как

$$h_1 \circ r(a \otimes x) = h_1 \circ r(f(c) \otimes x) = h_1 \circ h \circ t(c \otimes g(x)) =$$

$$= h_2 \circ h \circ t(c \otimes g(x)) = h_2 \circ r(f(c) \otimes x) = h_2 \circ r(a \otimes x)$$

для любого $x \in X$, то a удовлетворяет условию 3) теоремы. Таким образом, существует элемент $a \in A$, удовлетворяющий условиям 1)–3) теоремы.

Достаточность. Предположим, что существует элемент $a \in A$ такой, что условия 1)–3) выполняются. Введем обозначения: $D = \{d \in D_1 \mid h_1(d) = h_2(d)\}$, $C_1 = \{c \in A \mid f_1(c) = f_2(c)\}$, $C_2 = \{c \in A \mid r(c \otimes g_1(y)) = r(c \otimes g_2(y))$ для любого $y \in Y\}$, $C_3 = \{c \in A \mid h_1 \circ r(c \otimes x) = h_2 \circ r(c \otimes x)$ для любого $x \in X\}$, $C = C_1 \cap C_2 \cap C_3$. Так как $a \in C$, то $C \neq \emptyset$. Ясно, что C – полигон.

Определим пространство Чу $t : C \otimes X/\nu(g_1, g_2) \to D$ следующим образом: $t(c \otimes x/\nu(g_1, g_2)) = r(c \otimes x)$ для любых $c \in C$, $x \in X$. Для доказательства корректности определения пространства Чу t достаточно показать, что $r(c \otimes x) \in D$ и $r(c \otimes g_1(y)) = r(c \otimes g_2(y))$ для любых $c \in C$, $x \in X$, $y \in Y$. Первое соотношение следует из того, что $C \subseteq C_3$, второе – из того, что $C \subseteq C_2$.

Определим преобразование Чу $(f, g, h) : t \to r$ следующим образом: $f(c) = c$, $g(x) = x/\nu(g_1, g_2)$, $h(d) = d$ для любых $c \in C$, $x \in X$, $d \in D$. Равенства $h \circ t(c \otimes x/\nu(g_1, g_2)) = r(c \otimes x) = r(f(c) \otimes x)$ выполняются очевидно для любых $c \in C$, $x \in X$, причем, поскольку $c \in C_2$, то они не зависит от выбора представителя класса эквивалентности x/ν. Следовательно, определение преобразования Чу (f, g, h) корректно. Ясно, что f, g – мономорфизмы, h – эпиморфизм полигонов и $g \circ g_1 = g \circ g_2$, $h_1 \circ h = h_2 \circ h$. Так как $C \subseteq C_1$, то $f_1 \circ f = f_2 \circ f$. Следовательно, (f, g, h) – мономорфизм и $(f_1, g_1, h_1) \circ (f, g, h) = (f_2, g_2, h_2) \circ (f, g, h)$. Кроме того, по теореме 2 g – коуравнитель морфизмов g_1, g_2, h – уравнитель морфизмов h_1, h_2.

Покажем, что (f, g, h) – уравнитель преобразований Чу $(f_1, g_1, h_1), (f_2, g_2, h_2)$. Пусть $k : E \otimes F \to D_3$ – пространство Чу, $(u, v, w) : k \to r$ преобразование Чу такое, что $(f_1, g_1, h_1) \circ (u, v, w)) = (f_2, g_2, h_2) \circ (u, v, w)$, т.е. $f_1 \circ u = f_2 \circ u$, $v \circ g_1 = v \circ g_2$, $h_1 \circ w = h_2 \circ w$. Поскольку g – коуравнитель g_1, g_2, h – уравнитель h_1, h_2, то существуют $\beta : X/\nu \to F$ и $\gamma : D_3 \to D$ такие, что $v = \beta \circ g$ и

$w = h \circ \gamma$. Определим $\alpha : E \to C$ следующим образом: $\alpha(e) = u(e)$, где $e \in E$. Покажем корректность этого определения, т.е $\alpha(e) \in C$ для любого $e \in E$. Так как $f_1 \circ \alpha(e) = f_1 \circ u(e) = f_2 \circ u(e) = f_2 \circ \alpha(e)$, то $\alpha(e) \in C_1$. Так как

$$r(\alpha(e) \otimes g_1(y)) = r(u(e) \otimes g_1(y)) = w \circ k(e \otimes (v \circ g_1(y))) =$$

$$= w \circ k(e \otimes (v \circ g_2(y))) = r(u(e) \otimes g_2(y)) = r(\alpha(e) \otimes g_2(y))$$

для любого $y \in Y$, то $\alpha(e) \in C_2$. Так как

$$h_1 \circ r(\alpha(e) \otimes x) = h_1 \circ r(u(e) \otimes x) = h_1 \circ w \circ k(e \otimes v(x)) =$$

$$= h_2 \circ w \circ k(e \otimes v(x)) = h_2 \circ r(u(e) \otimes x) = h_2 \circ r(\alpha(e) \otimes x)$$

для любого $x \in X$, то $\alpha(e) \in C_3$. Таким образом, $u(e) \in C$. Заметим, что $u = f \circ \alpha$. Покажем, что (α, β, γ) – преобразование Чу:

$$t(\alpha(e) \otimes x/\nu(g_1, g_2)) = r(\alpha(e) \otimes x) = r(u(e) \otimes x) =$$

$$= w \circ k(e \otimes v(x)) = h \circ \gamma \circ k(e \otimes v(x)) = \gamma \circ k(e \otimes v(x))$$

для любых $e \in E$, $x \in X$. Таким образом, (f, g, h) – уравнитель преобразований Чу $(f_1, g_1, h_1), (f_2, g_2, h_2)$. □

Пример преобразования Чу (f, g, h), являющегося уравнителем преобразований Чу $(f_1, g_1, h_1), (f_2, g_2, h_2)$, такого, что морфизм g – коуравнитель морфизмов g_1, g_2, морфизм h – уравнитель морфизмов h_1, h_2, морфизм f не является уравнителем морфизмов f_1, f_2.

Определим пространства Чу r, s, t следующим образом: $r : \Theta_1 \otimes \Theta \longrightarrow \Theta_1$, $s : (\Theta_1 \sqcup \Theta_2) \otimes (\Theta_1 \sqcup \Theta_2) \longrightarrow (\Theta_1 \sqcup \Theta_2 \sqcup \Theta_3)$, $t : (\Theta_1 \sqcup \Theta_2) \otimes \Theta \longrightarrow (\Theta_1 \sqcup \Theta_4)$, где $\Theta = \{\theta\}$, $\Theta_i = \{\theta_i\}$ – нулевые полигоны $(1 \le i \le 4)$, $s(\theta_1 \otimes \theta_1) = s(\theta_1 \otimes \theta_2) = \theta_1$, $s(\theta_2 \otimes \theta_1) = \theta_2$, $s(\theta_2 \otimes \theta_2) = \theta_3$, $t(\theta_1 \otimes \theta) = \theta_1$, $t(\theta_2 \otimes \theta) = \theta_4$. Определим преобразования Чу $(f, g, h) : r \to s$, $(f_1, g_1, h_1), (f_2, g_2, h_2) : s \to t$ следующим образом: $f(\theta_1) = \theta_1$, $h(\theta_1) = \theta_1$, $f_1(\theta_1) = f_2(\theta_1) = \theta_1$, $f_1(\theta_2) = f_2(\theta_2) = \theta_2$, $g_1(\theta) = \theta_1$, $g_2(\theta) = \theta_2$, $h_1(\theta_1) = h_1(\theta_3) = h_2(\theta_1) = h_2(\theta_2) = \theta_1$, $h_1(\theta_2) = h_2(\theta_3) = \theta_4$. Данные определения корректны:

$$h \circ r(\theta_1 \otimes g(\theta_i)) = \theta_1 = s(\theta_1 \otimes \theta_i) = s(f(\theta_1) \otimes \theta_i) \ (1 \le i \le 2),$$

$$h_1 \circ s(\theta_1 \otimes g_1(\theta)) = h_1(\theta_1) = \theta_1 = t(\theta_1 \otimes \theta) = t(f_1(\theta_1) \otimes \theta),$$

$$h_1 \circ s(\theta_2 \otimes g_1(\theta)) = h_1(\theta_2) = \theta_2 = t(\theta_2 \otimes \theta) = t(f_1(\theta_2) \otimes \theta),$$

$$h_2 \circ s(\theta_1 \otimes g_2(\theta)) = h_2(\theta_1) = \theta_1 = t(\theta_1 \otimes \theta) = t(f_2(\theta_1) \otimes \theta),$$

$$h_2 \circ s(\theta_2 \otimes g_2(\theta)) = h_2(\theta_3) = \theta_4 = t(\theta_2 \otimes \theta) = t(f_2(\theta_2) \otimes \theta).$$

Покажем, что (f, g, h) – уравнитель преобразований Чу $(f_1, g_1, h_1), (f_2, g_2, h_2)$. По теореме 8 для этого достаточно найти элемент $a \in \theta_1 \sqcup \theta_2$, удовлетворяющий условиям 1) - 3) теоремы. В качестве такого элемента можно взять θ_1.

Из определения морфизмов g и h по теореме 2 следует, что g – коуравнитель морфизмов g_1, g_2, h – уравнитель морфизмов h_1, h_2. По теореме 2 морфизм $1_{\theta_1 \sqcup \theta_2}$ – уравнитель морфизмов f_1, f_1. Поскольку $1_{\theta_1 \sqcup \theta_2} \neq \delta \circ f$ для любого морфизма $\delta : \Theta \longrightarrow (\Theta_1 \sqcup \Theta_2)$, то f не является уравнителем морфизмов f_1, f_2.

Теорема 9. *Пусть $(f, g) : r \to s$, $(f_1, g_1), (f_2, g_2) : s \to t$ – преобразования Чу в категории $Chu(S - Act, D)$. Тогда (f, g) – уравнитель (f_1, g_1) и (f_2, g_2) в том и только том случае, когда f – уравнитель f_1 и f_2, g – коуравнитель g_1 и g_2 в категории $S - Act$.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполняются, $r : A \otimes X \to D$, $s : B \otimes Y \to D$ и $t : F \otimes E \to D$.

Необходимость. Предположим, что (f, g) – уравнитель (f_1, g_1) и (f_2, g_2). По теореме 6 g – коуравнитель g_1 и g_2.

Покажем, что f – уравнитель f_1 и f_2. Определим пространство Чу $p : C \otimes O \to D$, где $C = \{b \in B \mid f_1(b) = f_2(b)\}$ и $O = Y/\nu(g_1, g_2)$, следующим образом: $p(c \otimes \bar{y}) = s(c \otimes y)$ для любых $c \in C$, $y \in Y$, $\bar{y} = y/\nu(g_1, g_2)$. Заметим, что определение корректно. Действительно, если $y_1 = g_1(e)$, $y_2 = g_2(e)$ для некоторого $e \in E$, то

$$p(c \otimes \bar{y}_1) = s(c \otimes g_1(e)) = t(f_1(c) \otimes e) = t(f_2(c) \otimes e) = s(c \otimes g_2(e)) = p(c \otimes \bar{y}_2)$$

для любого $c \in C$.

Из определения p следует, что $(u, v) : p \to s$ – преобразование Чу, где $u(c) = c$ для любого $c \in C$, $v(y) = y/\nu(g_1, g_2)$ для любого $y \in Y$. Кроме того $(f_1, g_1) \circ (u, v) = (f_2, g_2) \circ (u, v)$. По теореме 2 u – уравнитель f_1 и f_2. Следовательно, существует $\alpha : C \to A$ такой, что $u = f \circ \alpha$. Так как (f, g) – уравнитель, то существует $\alpha' : A \to C$ такой, что $f = u \circ \alpha'$. Так как $f \circ \alpha \circ \alpha' = u \circ \alpha' = f = f \circ 1_A$, $u \circ \alpha' \circ \alpha = f \circ \alpha = u = u \circ 1_C$ и u, f – мономорфизмы, то $\alpha \circ \alpha' = 1_A$ и $\alpha' \circ \alpha = 1_C$. Следовательно, α – изоморфизм. По теореме 2 f – уравнитель f_1 и f_2.

Достаточность следует из теоремы 7. □

3. Коуравнители в категориях $Chu(S - Act)$ и $Chu(S - Act, D)$

Теорема 10. *Пусть $(f, g, h) : s \to t$, $(f_1, g_1, h_1), (f_2, g_2, h_2) : r \to s$ – преобразования Чу в категории $Chu(S - Act)$. Тогда (f, g, h) – коуравнитель (f_1, g_1, h_1) и (f_2, g_2, h_2) в том и только том случаи, когда f – коуравнитель f_1 и f_2, g – уравнитель g_1 и g_2 и h – коуравнитель h_1 и h_2 в категории $S - Act$.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполняется, $r : A \otimes X \to D_1$, $s : B \otimes Y \to D_2$ и $t : Q \otimes E \to W$.

Необходимость. Предположим, что (f, g, h) – коуравнитель (f_1, g_1, h_1) и (f_2, g_2, h_2). По теореме 5 преобразование Чу $(u, v, w) : s \to k$ является коуравнителем (f_1, g_1, h_1) и (f_2, g_2, h_2), где $k : B/\nu(f_1, f_2) \otimes E \longrightarrow D_2/\nu(h_1, h_2)$, $E = \{y \in Y \mid g_1(y) = g_2(y)\}$, $k(b/\nu(f_1, f_2) \otimes y) = s(b \otimes y)/\nu(h_1, h_2)$ для любых $b \in B$, $y \in E$, u, w – канонические эпиморфизмы, v – естественное вложение. Тогда существуют преобразования Чу $(\alpha, \beta, \gamma) : k \longrightarrow t$ и $(\alpha', \beta', \gamma') : t \longrightarrow k$ такие, что $(f, g, h) = (\alpha, \beta, \gamma) \circ (u, v, w)$ и $(u, v, w) = (\alpha', \beta', \gamma') \circ (f, g, h)$. Поскольку u и f – мономорфизмы, то $\alpha' \circ \alpha = 1_{B/\nu(f_1, f_2)}$ и $\alpha \circ \alpha' = 1_Q$. Следовательно, α – изоморфизм и по теореме 2 f – коуравнитель морфизмов f_1 и f_2 в категории $S - Act$. Аналогично показывается, что g – уравнитель g_1 и g_2 и h – коуравнитель h_1 и h_2 в категории $S - Act$.

Достаточность. Предположим, что f – коуравнитель f_1 и f_2, g – уравнитель g_1 и g_2, h – коуравнитель h_1 и h_2 в категории $S - Act$. Тогда f и h – эпиморфизмы, g – мономорфизм, т.е. (f, g, h) – эпиморфизм.

Пусть $p : C \otimes O \to D_3$ – пространство Чу, $(m, n, k) : s \to p$ – преобразование Чу и $(m, n, k) \circ (f_1, g_1, h_1) = (m, n, k) \circ (f_2, g_2, h_2)$. Так как f – коуравнитель f_1 и f_2, то существует морфизм $u : Q \to C$ такой, что $m = u \circ f$. Так как g – уравнитель g_1 и g_2, то существует мономорфизм $v : O \to E$ такой, что $n = g \circ v$. Так как h – коуравнитель h_1 и h_2, то существуетморфизм $w : W \to D_3$ такой, что $k = w \circ h$. Покажем, что $(u, v, w) : t \to p$ – преобразование Чу, т.е.

$w \circ t(q \otimes v(o)) = p(u(q) \otimes o)$ для любых $q \in Q$, $o \in O$. Пусть $q \in Q$, $o \in O$. Так как f – эпиморфизм, то существует $b \in B$ такой, что $q = f(b)$. Так как (m, n, k) – преобразование Чу, то $k \circ s(b \otimes n(o)) = p(m(b) \otimes o)$. Поскольку $n = g \circ v$, $m = u \circ f$ и $k = w \circ h$, то $k \circ s(b \otimes n(o)) = w \circ h \circ s(b \otimes (g \circ v(o)))$ и $p(m(b) \otimes o) = p((u \circ f(b)) \otimes o)$. Из того что (f, g, h) – преобразование Чу следует $w \circ h \circ s(b \otimes (g \circ v(o))) = w \circ t(f(b) \otimes v(o))$, т.е. $w \circ t(f(b) \otimes v(o)) = p((u \circ f(b)) \otimes o)$. Следовательно, $w \circ t(q \otimes v(o)) = p(u(q) \otimes o)$. Таким образом, (f, g, h) – коуравнитель (f_1, g_1, h_1) и (f_2, g_2, h_2). □

Из доказательства теоремы 10 получаем

Следствие 1. *Пусть $(f, g) : r \to s$, $(f_1, g_1), (f_2, g_2) : s \to t$ – преобразования Чу на категории $Chu(S - Act, D)$. Тогда (f, g) – коуравнитель (f_1, g_1) и (f_2, g_2) в том и только том случае, когда f – коуравнитель f_1 и f_2, g – уравнитель g_1 и g_2.*

References

[1] Barr M., **-Autonomous Categories*, Lecture Notes in Math., **752**, Berlin: Springer-Verlag, 1979. Zbl 0415.18008

[2] Barr M., Wells C., *Category Theory for Computing Science*, Prentice Hall international series computer science Spectrum Book, Prentice Hall, 1998.

[3] Gould V., Mikhalev A. V., Palyutin E. A., and Stepanova A. A., *Model-theoretic properties of free, projective, and flat S-acts*, Journal Math. Sci., **164**:2 (2010), 195—227. Zbl 1288.03026

[4] Kilp, M., Knauer, U. and A.V. Mikhalev, *Monoids, Acts and Categories*, Berlin–New York: Walter De Gruyter, 2000. Zbl 0945.20036

[5] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, 2nd. ed., New York, NY: Springer, 1998. Zbl 0906.18001

[6] Stepanova A. A., Skurihin E.E., Sukhonos A.G., *Category of Chu spaces over S-Act category*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 1220—1237. Zbl 1391.18010

A. A. Stepanova
Far-Eastern Federal University,
b.Ayaks-10,
Vladivostok, 690920, Russia
E-mail address: stepltd@mail.ru

E.E. Skurihin
Institute of Applied Mathematics,
7, Radio str.,
Vladivostok, 690041, Russia
Far-Eastern Federal University,
b.Ayaks-10,
Vladivostok, 690920, Russia
E-mail address: eeskur@gmail.com

A.G. Sukhonos
Far-Eastern Federal University,
b.Ayaks-10,
Vladivostok, 690920, Russia
E-mail address: agsukh@mail.ru