S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 718–731 (2019) УДК 517.946
DOI 10.33048/semi.2019.16.048 MSC 35R30 35K20 35L20

ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ

А.И. КОЖАНОВ, Е.Е. МАЦИЕВСКАЯ

Abstract. The aim of the paper is to study the solvability in the classes of regular solutions of boundary value problems for differential equations

$$\varphi(t)u_t - \psi(t)\Delta u + c(x,t)u = f(x,t) \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < t < T).$$

A feature of these equations is that the function $\varphi(t)$ in them can arbitrarily change the sign on the segment $[0,T]$, while the function $\psi(t)$ is nonnegative for $t \in [0,T]$. For the problems under consideration, we prove existence and uniqueness theorems.
Keywords: degenerate parabolic equations, variable direction of evolution, boundary value problems, regular solutions, existence, uniqueness.

1. Введение. Постановка задач

Работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений

$$\varphi(t)u_t - \psi(t)\Delta u + c(x,t)u = f(x,t) \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < t < T). \qquad (*)$$

В этих уравнениях функция $\varphi(t)$ может произвольным образом менять знак на отрезке $[0,T]$, и в том числе может обращаться в нуль на подмножествах отрезка $[0,T]$ положительной меры, функция $\psi(t)$ неотрицательна при $t \in [0,T]$ и также может обращаться в нуль на подмножествах из $[0,T]$ положительной

Kozhanov, A.I., Macievskaya, E.E., Degenerating parabolic equations with a variable direction of evolution.

Работа поддержана РФФИ (грант 18-51-41009).

Поступила 5 февраля 2019 г., опубликована 4 июня 2019 г.

меры (другими словами, уравнение $(*)$ в отдельных точках или даже на подмножествах отрезка $[0, T]$ положительной меры может вырождаться в алгебраическое уравнение). Сами по себе дифференциальные уравнения $(*)$ принадлежат к классу эллиптико–параболических уравнений, или уравнений с неотрицательной характеристической формой [1, 2]. В названных работах [1, 2] для уравнений $(*)$ предложена постановка первой краевой задачи, и доказано существование ее обобщенных решений (см. также [3, 4]). Далее, для тех же уравнений в случае $\psi(t) \equiv 1$ в работах [4]–[6] изучена разрешимость первой краевой задачи в классах решений, имеющих все обобщенные производные, входящие в уравнение; близкие результаты (также в невырождающемся в пространственной части случае) были получены в работах [7, 8] для ультрапараболических уравнений и уравнений с кратными характеристиками соответственно.

Целью настоящей работы является исследование разрешимости первой краевой задачи для дважды вырождающихся дифференциальных уравнений $(*)$ в классах регулярных решений — решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в уравнение.

Определим анизотропное пространство Соболева [9, 10] $W_2^{m,l}(Q)$, которое будет основным в настоящей работе.

Пусть m и l есть целые неотрицательные числа, G есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $x_1, \ldots, x_n, t$. Через $W_2^{m,l}(Q)$ будем обозначать множество функций $v(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ таких, что все их обобщенные производные по переменным $x_1, \ldots, x_n$ до порядка m включительно и по переменной t до порядка l включительно существуют и также принадлежат пространству $L_2(Q)$. Множество $W_2^{m,l}(Q)$ представляет собой линейное пространство. Будем считать, что в этом множестве задана норма

$$\|v\|_{W_2^{m,l}(Q)} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{m} \int\limits_Q (D^\alpha v)^2 \, dx\, dt + \sum_{k=1}^{l} \int\limits_Q \left(\frac{\partial^k v}{\partial t^k} \right)^2 dx\, dt \right)^{1/2}$$

$$\left(D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \right).$$

Очевидно, что множество $W_2^{m,l}(Q)$ с этой нормой будет банаховым пространством.

Перейдем к точной постановке задач.

Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ с гладкой (для простоты — бесконечно–дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T, $S = \Gamma \times (0, T)$ есть боковая граница цилиндра Q. Далее, пусть $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ есть заданные функции, определенные при $t \in [0, T]$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\Omega}$, L есть дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$Lv = \varphi(t) v_t - \psi(t) \Delta v + c(x,t) v$$

(Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_n$).

Согласно [1, 2], постановка первой краевой задачи для дифференциальных уравнений с вырождающимся оператором L определяется числами $\varphi(0)$ и $\varphi(T)$. Эти числа дают возможность выделить четыре подзадачи первой краевой задачи:

Краевая задача I: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$Lu = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняется условие

$$u(x,t)|_S = 0. \tag{2}$$

Краевая задача II: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (2), а также условие*

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Краевая задача III: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (2), а также условие*

$$u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Краевая задача IV: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (3) и (4).*

Опишем план работы. Первая часть работы посвящена доказательству разрешимости краевых задач I–IV в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$. Во второй и в третьей частях работы будет доказано существование более гладких решений краевых задач I–IV — во второй части существование решений, обладающих большей гладкостью по переменным $x_1, \ldots, x_n$, и в третьей части — существование решений, обладающих большей гладкостью по переменной t. Наконец, в четвертой части работы будут приведены некоторые обобщения и усиления полученных в первых трех частях результатов.

2. Разрешимость краевых задач I–IV в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$

Основным методом доказательства разрешимости краевых задач I–IV будет метод регуляризации.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$\varphi(t) \in C^1([0,T]), \quad \psi(t) \in C^1([0,T]), \quad c(x,t) \in C^2(\overline{Q}); \tag{5}$$

$$\psi(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T], \quad 2c(x,t) - \varphi'(t) \geq c_1 > 0,$$
$$2c(x,t) + \varphi'(t) \geq c_2 > 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{Q}; \tag{6}$$

$$\varphi(0) \leq 0, \quad \varphi(T) \geq 0; \tag{7}$$

а также одно из условий

$$f(x,t) \in W_2^{2,1}(Q), \quad f(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S \tag{8}$$

или

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad f_t(x,t) \in L_2(Q), \quad \psi^{-1/2}(t) f_{x_i}(x,t) \in L_2(Q), \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$f(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S. \tag{9}$$

Тогда краевая задача I имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,1}(Q)$, и при том ровно одно.

Доказательство. Пусть ε есть положительное число. Обозначим через L_ε дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$L_\varepsilon v = -\varepsilon v_{tt} + \varepsilon\Delta^2 v + Lv.$$

Рассмотрим *краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$L_\varepsilon u = f(x,t) \tag{10}$$

и такую, что для нее выполняются условие (2), а также условия

$$\Delta u(x,t)|_S = 0, \tag{11}$$

$$u_t(x,0) = u_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{12}$$

Заметим прежде всего, что для решений $u(x,t)$ этой задачи из пространства $W_2^{4,2}(Q)$ имеет место первая априорная оценка

$$\varepsilon\int\limits_Q \left[u_t^2 + (\Delta u)^2\right]\,dx\,dt + \int\limits_Q u^2\,dx\,dt \le R_1\int\limits_Q f^2\,dx\,dt \tag{13}$$

с постоянной R_1, определяющейся лишь числом c_1 (для доказательства этой оценки достаточно проанализировать равенство

$$\int\limits_Q L_\varepsilon u u\,dx\,dt = \int\limits_Q fu\,dx\,dt$$

с использованием условий теоремы и неравенства Юнга).

Из оценки (13), интерполяционных неравенств [[11], гл. III, § 11] и второго основного неравенства для эллиптических операторов [[12], гл. III, § 8] следует, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (10), (2), (11), (12) при фиксированном ε будет выполняться оценка

$$\|u\|_{W_2^{4,2}(Q)} \le R_2\|f\|_{L_2(Q)} \tag{14}$$

с постоянной R_2, определяющейся функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $c(x,t)$, а также числом ε.

В свою очередь, из оценки (14) и теоремы о методе продолжения по параметру [[13], гл. III § 14] следует, что краевая задача (10), (2), (11), (12) при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{4,2}(Q)$ (для доказательства этого факта достаточно рассмотреть однопараметрическое семейство уравнений

$$-\varepsilon u_{tt} + \varepsilon\Delta^2 u + \lambda Lu = f(x,t), \quad \lambda \in [0,1], \tag{10_λ}$$

и учесть, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (10_λ), (2), (11), (12) из пространства $W_2^{4,2}(Q)$ имеет место равномерная по λ оценка (14), и что краевая задача (10_0), (2), (11), (12) очевидным образом разрешима в пространстве $W_2^{4,2}(Q)$).

Покажем теперь, что при выполнении одного из условий (8) или (9) для решений $u(x,t)$ краевой задачи (10), (2), (11), (12) из пространства $W_2^{4,2}(Q)$ будут выполняться оценки, равномерные по ε.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_Q L_\varepsilon u \Delta^2 u\,dx\,dt = \int\limits_Q f\Delta^2 u\,dx\,dt.$$

Если выполняется условие (8), то это равенство преобразуется к виду

$$\varepsilon\int\limits_Q \left[(\Delta u_t)^2 + (\Delta^2 u)^2\right]\,dx\,dt + \sum_{i=1}^n\int\limits_Q \psi(\Delta u_{x_i})^2\,dx\,dt +$$

$$+\int\limits_Q \left(c - \frac{1}{2}\varphi'\right)(\Delta u)^2\,dx\,dt - \frac{\varphi(0)}{2}\int\limits_\Omega [\Delta u(x,0)]^2\,dx + \frac{\varphi(T)}{2}\int\limits_\Omega [\Delta u(x,T)]^2\,dx =$$

$$= \int\limits_Q \Delta f\Delta u\,dx\,dt - 2\sum_{i=1}^n\int\limits_Q c_{x_i}u_{x_i}\Delta u\,dx\,dt - \int\limits_Q \Delta c u\Delta u\,dx\,dt, \qquad (15)$$

если же выполняется (9), то имеем

$$\varepsilon\int\limits_Q \left[(\Delta u_t)^2 + (\Delta^2 u)^2\right]\,dx\,dt + \sum_{i=1}^n\int\limits_Q \psi(\Delta u_{x_i})^2\,dx\,dt +$$

$$+\int\limits_Q \left(c - \frac{1}{2}\varphi'\right)(\Delta u)^2\,dx\,dt - \frac{\varphi(0)}{2}\int\limits_\Omega [\Delta u(x,0)]^2\,dx + \frac{\varphi(T)}{2}\int\limits_\Omega [\Delta u(x,T)]^2\,dx =$$

$$= -\sum_{i=1}^n\int\limits_Q \psi^{-\frac{1}{2}}f_{x_i}\psi^{\frac{1}{2}}\Delta u_{x_i}\,dx\,dt - 2\sum_{i=1}^n\int\limits_Q c_{x_i}u_{x_i}\Delta u\,dx\,dt - \int\limits_Q \Delta c u\Delta u\,dx\,dt. \quad (16)$$

Применяя далее к слагаемым правых частей (15) или (16) неравенство Юнга, учитывая условия теоремы и оценку (13), нетрудно получить, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (10), (2), (11), (12) выполняется оценка

$$\varepsilon\int\limits_Q \left[(\Delta u_t)^2 + (\Delta^2 u)^2\right]\,dx\,dt + \int\limits_Q (\Delta u)^2\,dx\,dt \le N_1 \qquad (17)$$

с постоянной N_1, имеющей вид

$$N_1 = N_1'\int\limits_Q (\Delta f)^2\,dx\,dt$$

при выполнении условия (8), или же

$$N_1 = N_1''\sum_{i=1}^n\int\limits_Q \psi^{-1}f_{x_i}^2\,dx\,dt$$

при выполнении условия (9); числа N_1' и N_1'' здесь определяются лишь функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $c(x,t)$.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$-\int\limits_Q L_\varepsilon u u_{tt}\,dx\,dt = -\int\limits_Q f u_{tt}\,dx\,dt.$$

Это равенство легко преобразуется к виду

$$\varepsilon \int\limits_Q \left[u_{tt}^2 + (\Delta u_t)^2\right] \, dx\, dt + \sum_{i=1}^n \int\limits_Q \psi (\Delta u_{x_i})^2 \, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_Q \left(c + \frac{1}{2}\varphi'\right) u_t^2 \, dx\, dt = \int\limits_Q f_t u_t \, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_Q \psi' \Delta u u_t \, dx\, dt - \int\limits_Q c_t u u_t \, dx\, dt.$$

Используя условия теоремы, отсюда получим, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (10), (2), (11), (12) из пространства $W_2^{4,2}(Q)$ выполняется оценка

$$\varepsilon \int\limits_Q u_{tt}^2 \, dx\, dt + \int\limits_Q u_t^2 \, dx\, dt \leq N_2 \tag{18}$$

с постоянной N_2, определяющейся функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$.

Оценок (13), (17) и (18) уже вполне достаточно для выбора последовательности, сходящейся к решению краевой задачи I.

Пусть $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^\infty$ есть последовательность положительных чисел, сходящаяся к 0. Обозначим через $u_l(x,t)$ решение краевой задачи (10), (2), (11), (12) при $\varepsilon = \varepsilon_l$. Для последовательности $\{u_l(x,t)\}_{l=1}^\infty$ при $\varepsilon = \varepsilon_l$ имеют место априорные оценки (13), (17) и (18). Из этих оценок и из свойства рефлексивности гильбертова пространства следует, что существуют подпоследовательность $\{u_{l_k}(x,t)\}_{k=1}^\infty$ и функция $u(x,t)$ такие, что при $k \to \infty$ имеют место сходимости

$$\varepsilon_{l_k} \to 0,$$

$$u_{l_k}(x,t) \to u(x,t) \quad \textit{слабо в пространстве } L_2(Q),$$

$$u_{l_k t}(x,t) \to u_t(x,t) \quad \textit{слабо в пространстве } L_2(Q),$$

$$\Delta u_{l_k}(x,t) \to \Delta u(x,t) \quad \textit{слабо в пространстве } L_2(Q),$$

$$\varepsilon_{l_k} u_{l_k tt}(x,t) \to 0 \quad \textit{слабо в пространстве } L_2(Q),$$

$$\varepsilon_{l_k} \Delta^2 u_{l_k}(x,t) \to 0 \quad \textit{слабо в пространстве } L_2(Q).$$

Очевидно, что предельная функция $u(x,t)$ будет принадлежать пространству $W_2^{2,1}(Q)$ (уточним, что из третьей сходимости и из второго основного неравенства для эллиптических операторов [[11], гл. III, § 8] следует слабая в $L_2(Q)$ сходимость всех вторых производных $u_{l_k x_i x_j}(x,t)$ к функциям $u_{x_i x_j}(x,t)$, $i,j = 1,\dots,n$, и принадлежность предельных функций пространству $L_2(Q)$), и что она представляет собой решение краевой задачи I.

Единственность решений краевой задачи I в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$ очевидным образом вытекает, например, из оценки (17), поскольку в случае $f(x,t) \equiv 0$ выполняется $u(x,t) \equiv 0$, а это в силу линейности задачи и означает едиственность ее решений.

Теорема доказана. $\square$

Исследование разрешимости в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$ краевых задач II–IV проводится в целом аналогично исследованию разрешимости краевой задачи I. Вновь используется метод регуляризации, в качестве регуляризующего оператора вновь используется оператор L_ε. Отличие состоит лишь в том, что в регуляризующей задаче при $t = 0$ и при $t = T$ задаются условия

$$u(x, 0) = u_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega$$

— для задачи, регуляризующей краевую задачу II,
условия

$$u_t(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega$$

— для задачи, регуляризующей краевую задачу III, и
условия

$$u(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega$$

— для задачи, регуляризующей краевую задачу IV.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (5) и (6), одно из условий (8) или (9), а также условия*

$$\varphi(0) > 0, \quad \varphi(T) \geq 0; \tag{19}$$

$$f(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \tag{20}$$

Тогда краевая задача II имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,1}(Q)$, и при том ровно одно.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (5) и (6), одно из условий (8) или (9), а также условия*

$$\varphi(0) \leq 0, \quad \varphi(T) < 0; \tag{21}$$

$$f(x, T) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \tag{22}$$

Тогда краевая задача III имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,1}(Q)$, и при том ровно одно.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия (5), (6), (20) и (22), одно из условий (8) или (9), а также условия*

$$\varphi(0) > 0, \quad \varphi(T) < 0. \tag{23}$$

Тогда краевая задача IV имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,1}(Q)$, и при том ровно одно.

3. Разрешимость краевых задач I–IV в пространствах $W_2^{m,1}(Q)$, $m > 2$.

Исследование разрешимости краевых задач I–IV в пространствах $W_2^{m,1}(Q)$ при $m > 2$ (m — натуральное число) проводится в целом вполне аналогично исследованию разрешимости тех же задач в пространствах $W_2^{2,1}(Q)$, меняется лишь регуляризующий оператор и требуются дополнительные условия на функции $c(x, t)$ и $f(x, t)$.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия (6) и (7), условие*

$$\varphi(t) \in C^1([0, T]), \quad \psi(t) \in C^1([0, T]), \quad c(x, t) \in C^m(\overline{Q}); \tag{5$'$}$$

а также одно из условий

$$f(x, t) \in W_2^{m,1}(Q), \quad \Delta^k f(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S, \quad k = 0, \ldots, m_1 - 1, \tag{8$'$}$$

если $m = 2m_1$ *или* $m = 2m_1 + 1$;
или

$$f(x,t) \in W_2^{m-1,1}(Q), \quad \psi^{-1/2}(t)\Delta^{m_1-1} f_{x_i}(x,t) \in L_2(Q), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\Delta^k f(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S, \quad k = 0, \dots, m_1 - 1, \quad \text{если} \quad m = 2m_1,$$

$$\psi^{-1/2}(t)\Delta^{m_1-1} f(x,t) \in L_2(Q), \quad \Delta^k f(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S,$$

$$k = 0, \dots, m_1 - 1, \quad \text{если} \quad m = 2m_1 + 1. \tag{9'}$$

Тогда краевая задача I имеет решение $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* $W_2^{2,1}(Q)$, *и при том ровно одно.*

Доказательство. Определим оператор L_ε:

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon u_{tt} + \varepsilon \Delta^m u + Lu, \quad \text{если} \quad m = 2m_1,$$

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon u_{tt} - \varepsilon \Delta^m u + Lu, \quad \text{если} \quad m = 2m_1 + 1.$$

Зададим краевые условия для оператора L_ε:

$$\Delta^k u(x,t)|_S = 0, \quad k = 0, \dots, m - 1;$$

$$u_t(x,0) = u_t(x,T) = 0.$$

Разрешимость краевой задачи с этими условиями для уравнения $L_\varepsilon u = f$ в пространстве $W_2^{2m,2}(Q)$ очевидна. Априорные оценки, дающие возможность выбрать соответствующую сходящуюся последовательность и затем перейти к пределу, выводятся после несложного анализа равенств

$$\int\limits_Q L_\varepsilon u \Delta^m u \, dx \, dt = \int\limits_Q f \Delta^m u \, dx \, dt,$$

$$\int\limits_Q L_\varepsilon u u_{tt} \, dx \, dt = \int\limits_Q f u_{tt} \, dx \, dt.$$

Предельная функция даст требуемое решение краевой задачи I.

Единственность решений вытекает из анализа вышеуказанных равенств с нулевой функцией $f(x,t)$.

Теорема доказана. □

Теорема 6. *Пусть выполняются условия* (5′), (6), (7), (19), (20), *а также одно из условий* (8′) *или* (9′). *Тогда краевая задача II имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* $W_2^{m,1}(Q)$, *и при том ровно одно.*

Теорема 7. *Пусть выполняются условия* (5′), (6), (7), (21) *и* (23), *а также одно из условий* (8′) *или* (9′). *Тогда краевая задача III имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* $W_2^{m,1}(Q)$, *и при том ровно одно.*

Теорема 8. *Пусть выполняются условия* (5′), (6), (7), (20), (22), (23), *а также одно из условий* (8′) *или* (9′). *Тогда краевая задача IV имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* $W_2^{m,1}(Q)$, *и при том ровно одно.*

Доказательство теорем 6–8 проводится вполне аналогично доказательству теоремы 5, меняются лишь краевые условия для регуляризующей задачи при $t = 0$ и $t = T$ — эти условия задаются также, как задавались соответствующие условия при доказательстве теорем 2–4.

4. Разрешимость краевых задач I–IV в пространстве $W_2^{2,2}(Q)$

В данном пункте будут приведены некоторые результаты о существовании решений краевых задач I–IV, обладающих дополнительной гладкостью по переменной t.

Теорема 9. *Пусть выполняются условия*

$$\varphi(t) \in C^2([0,T]), \quad \psi(t) \in C^2([0,T]), \quad c(x,t) \in C^2(\overline{Q}); \tag{24}$$

$$\psi(t) \geq 0, \quad |\psi'(t)| \leq M_0 \psi^{1/2}(t), \quad t \in [0,T]; \tag{25}$$

$$2c(x,t) + \frac{2p-1}{2}\varphi'(t) \geq c_p > 0, \quad p = 0,2, \quad (x,t) \in \overline{Q}; \tag{26}$$

$$f(x,t) \in W_2^{2,2}(Q), \quad f(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S; \tag{27}$$

$$\varphi(0) < 0, \quad \varphi(T) > 0. \tag{28}$$

Тогда краевая задача I имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,2}(Q)$, и при том ровно одно.

Доказательство. Для положительного числа ε рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$\varepsilon(u_{tttt} + \Delta^2 u) + Lu = f(x,t) \tag{29}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (11), а также уловия

$$u_{tt}(x,0) = u_{ttt}(x,0) = u_{tt}(x,T) = u_{ttt}(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{30}$$

При фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ эта задача имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{4,4}(Q)$ (что устанавливается обычным образом — с помощью метода продолжения по параметру). Покажем, что для решений $u(x,t)$ имеют место априорные оценки, равномерные по ε.

Последовательный анализ равенств

$$\int\limits_Q \left[\varepsilon(u_{tttt} + \Delta^2 u) + Lu\right] u \, dx\, dt = \int\limits_Q f u \, dx\, dt, \tag{31}$$

$$\int\limits_Q \left[\varepsilon(u_{tttt} + \Delta^2 u) + Lu\right] \Delta^2 u \, dx\, dt = \int\limits_Q f \Delta^2 u \, dx\, dt \tag{32}$$

с использованием условий теоремы, неравенства Юнга и неравенств [12, гл. I, § 2; гл. III, § 8] дает априорную оценку

$$\int\limits_Q \left[u^2 + (\Delta u)^2\right] dx\, dt + \int\limits_\Omega \left[\Delta u(x,0)\right]^2 dx + \int\limits_\Omega \left[\Delta u(x,T)\right]^2 dx +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_Q \left[u_{tt}^2 + (\Delta^2 u)^2\right] dx\, dt \leq C_1 \int\limits_Q \left[f^2 + (\Delta f)^2\right] dx\, dt \tag{33}$$

с постоянной C_1, определяющейся лишь функциями $c(x,t)$ и $\varphi(t)$.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int\limits_Q \left[\varepsilon(u_{tttt} + \Delta^2 u) + Lu\right] u_{tttt} \, dx\, dt = \int\limits_Q f u_{tttt} \, dx\, dt. \tag{34}$$

Это равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\int\limits_Q \left(c + \frac{3}{2}\varphi'\right) u_{tt}^2 \, dx\, dt + \sum_{i=1}^n \int\limits_Q \psi(t) u_{x_i tt}^2 \, dx\, dt + \varepsilon \int\limits_Q \left[u_{tttt}^2 + (\Delta u_{tt})^2\right] \, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_Q f_{tt} u_{tt} \, dx\, dt - \int\limits_Q \varphi'' u_t u_{tt} \, dx\, dt - 2\sum_{i=1}^n \int\limits_Q \psi'(t) u_{x_i t} u_{x_i tt} \, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_Q \psi''(t) \Delta u u_{tt} \, dx\, dt - 2\int\limits_Q c_t u_t u_{tt} \, dx\, dt - \int\limits_Q c_{tt} u u_{tt} \, dx\, dt. \tag{35}$$

Оценивая каждое из слагаемых правой части (35) с помощью неравенства Юнга, учитывая условия теоремы, а также учитывая оценку (33), нетрудно от (35) перейти к неравенству

$$\int\limits_Q u_{tt}^2 \, dx\, dt + \varepsilon \int\limits_Q \left[u_{tttt}^2 + (\Delta u_{tt})^2\right] \, dx\, dt \le$$

$$\le C_3 \int\limits_Q \left[f^2 + (\Delta f)^2 + f_{tt}^2\right] \, dx\, dt + C_4 \sum_{i=1}^n \int\limits_Q u_{x_i t}^2 \, dx\, dt, \tag{36}$$

в которой числа C_3 и C_4 определяются функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $c(x,t)$.

Имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_Q u_{x_i t}^2 \, dx\, dt = \int\limits_Q \Delta u u_{tt} \, dx\, dt + \int\limits_\Omega \Delta u(x,0) u_t(x,0) \, dx -$$

$$- \int\limits_\Omega \Delta u(x,T) u_t(x,T) \, dx.$$

Из этого равенства и оценки (33) следует неравенство

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_Q u_{x_i t}^2 \, dx\, dt \le \delta \left[\int\limits_Q u_{tt}^2 \, dx\, dt + \int\limits_\Omega u_t^2(x,0) \, dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_\Omega u_t^2(x,T) \, dx \right] + C(\delta), \tag{37}$$

в котором δ есть произвольное положительное число, число же $C(\delta)$ определяется величиной δ и функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $c(x,t)$. Используя далее неравенства

$$\int\limits_\Omega u_t^2(x,0) \, dx \le C_5 \int\limits_Q (u^2 + u_{tt}^2) \, dx\, dt, \tag{38}$$

$$\int\limits_\Omega u_t^2(x,T) \, dx \le C_5 \int\limits_Q (u^2 + u_{tt}^2) \, dx\, dt, \tag{39}$$

(число C_5 определяется лишь числом T), получим, что из равенства (35) и неравенств (36)–(39) вытекает априорная оценка

$$\int\limits_Q u_{tt}^2\,dx\,dt+\varepsilon\int\limits_Q\left[u_{tttt}^2+(\Delta u_{tt})^2\right]\,dx\,dt\leq C_6\int\limits_Q\left[f^2+(\Delta f)^2+f_{tt}^2\right]\,dx\,dt \qquad (40)$$

с постоянной C_6, определяющейся функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $c(x,t)$, а также числом T.

Оценок (33) и (40) достаточно для выбора сходящейся последовательности и предельного перехода. Предельная функция и даст решение краевой задачи I, принадлежащее пространству $W_2^{2,2}(Q)$.

Единственность решений вытекает из оценки (33) при $f(x,t)\equiv 0$.

Теорема доказана. □

Разрешимость краевых задач I–IV при иных, нежели в (28), условиях на числа $\varphi(0)$ и $\varphi(T)$, исследуется в целом аналогично вышеприведенному. Во всех случаях используется уравнение (29), меняются лишь граничные условия (30), условия на функцию $f(x,t)$ и в некоторых случаях незначительно меняется условие (26).

Не приводя точные формулировки теорем существования и единственности (ввиду их очевидности и однотипности), опишем изменения, о которых было сказано выше.

В случае

$$\varphi(0)<0,\quad \varphi(T)=0 \qquad (41)$$

условия (30) меняются на условия

$$u_{tt}(x,0)=u_{ttt}(x,0)=u(x,T)=u_t(x,T)=0,\quad x\in\Omega,$$

условие (27) меняется на условие

$$f(x,t)\in W_2^{2,2}(Q),\quad f(x,t)=0\quad \text{при}\quad (x,t)\in S,$$

$$f(x,T)=f_t(x,T)=0\quad \text{при}\quad x\in\Omega. \qquad (42)$$

В случае

$$\varphi(0)=0,\quad \varphi(T)>0 \qquad (43)$$

условия (30) меняются на условия

$$u_(x,0)=u_t(x,0)=u_{tt}(x,T)=u_{ttt}(x,T)=0,\quad x\in\Omega,$$

условие (27) меняется на условие

$$f(x,t)\in W_2^{2,2}(Q),\quad f(x,t)=0\quad \text{при}\quad (x,t)\in S,$$

$$f(x,0)=f_t(x,0)=0\quad \text{при}\quad x\in\Omega. \qquad (44)$$

В случае

$$\varphi(0)=0,\quad \varphi(T)=0 \qquad (45)$$

условия (30) меняются на условия

$$u_(x,0)=u_{tt}(x,0)=u(x,T)=u_{tt}(x,T)=0,\quad x\in\Omega,$$

условие (27) меняется на условие

$$f(x,t)\in W_2^{2,2}(Q),\quad f(x,t)=0\quad \text{при}\quad (x,t)\in\partial Q, \qquad (46)$$

условие (26) — на условие

$$2c(x,t) + \frac{2p-1}{2}\varphi'(t) \geq c_p > 0, \quad p = 0,1,2, \quad (x,t) \in \overline{Q}. \tag{47}$$

При выполнении условий (24)–(26), (41) и (42), или (24)–(26), (43) и (44), или (24), (25), (45)–(47) будет иметь место разрешимость в пространстве $W_2^{2,2}(Q)$ краевой задачи I. Уточним лишь, что при доказательстве разрешимости этой задачи при выполнении условия (45) необходимо дополнительно учесть оценку, которая выводится с помощью равенства

$$\int\limits_Q \left[\varepsilon(u_{tttt} + \Delta^2 u) + Lu\right](\Delta u_{tt} - u_{tt})\,dx\,dt = \int\limits_Q f(\Delta u_{tt} - u_{tt})\,dx\,dt.$$

Пусть выполняется условие

$$\varphi(0) > 0, \quad \varphi(T) > 0. \tag{48}$$

В этом случае условия (30) меняются на условия

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u_{tt}(x,T) = u_{ttt}(x,T) = 0, \quad x \in \Omega,$$

условие (27) — на условие (44).

Далее, в случае

$$\varphi(0) > 0, \quad \varphi(T) = 0 \tag{49}$$

условия (30) меняются на условия

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u(x,T) = u_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega,$$

условие (27) меняется на условие

$$f(x,t) \in W_2^{2,2}(Q), \quad f(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S,$$
$$f(x,0) = f_t(x,0) = f(x,T) = f_t(x,T) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \tag{50}$$

При выполнении условий (24)–(26), (48) и (44), или выполнении условий (24)–(26), (49) и (50) будет иметь место разрешимость в пространстве $W_2^{2,2}(Q)$ краевой задачи II.

При выполнении условия

$$\varphi(0) < 0, \quad \varphi(T) < 0 \tag{51}$$

условия (30) нужно заменить на условия

$$u_{tt}(x,0) = u_{ttt}(x,0) = u(x,T) = u_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega,$$

условие (27) — на условие (42).

Пусть выполняется условие

$$\varphi(0) < 0, \quad \varphi(T) = 0. \tag{52}$$

В этом случае условия (30) меняются на условия

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u(x,T) = u_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega,$$

условие (27) — на условие (50).

При выполнении условий (24)–(26), (51) и (42), или выполнении условий (24)–(26), (52) и (50) будет иметь место разрешимость в пространстве $W_2^{2,2}(Q)$ краевой задачи III.

Наконец, пусть выполняется условие

$$\varphi(0) > 0, \quad \varphi(T) < 0. \tag{53}$$

В этом случае условия (30) меняются на условия

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u(x,T) = u_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega,$$

условие (27) — на условие (50).

При выполнении условий (24)–(26), (53) и (50) будет иметь место разрешимость в пространстве $W_2^{2,2}(Q)$ *краевой задачи IV.*

5. Замечания и дополнения

Опишем некоторые усиления и обобщения представленных в п.п. 1–3 результатов.

1. Наличие в операторе L младших членов — слагаемых $b^k(x,t)u_{x_k}$, $k = 1,\dots,n$ — не влияет на суть полученных выше результатов, но при этом возникают весьма громоздкие дополнительные условия.

2. Оператор Лапласа в уравнении (1) вполне можно заменить более общим эллиптическим оператором A_0 вида

$$A_0 u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x)u_{x_j}\right).$$

3. Объединяя методы п.п. 2 и 3 нетрудно установить существование решений краевых задач I–IV, принадлежащих пространству $W_2^{m,2}(Q)$ при $m > 2$.

4. В п. 3 использовались условия на функцию $f(x,t)$, аналогичные условию (8). Вместе с тем вполне можно было использовать и условия, аналогичные уловию (9) (не сделано это лишь вследствие желания не загромождать текст работы).

5. Для функций $v(x)$ из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\Omega} v^2\,dx \le d_0 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_{x_i}^2\,dx$$

с постоянной d_0, определяющейся лишь областью Ω (см. [9], [12]). Используя это неравенство, нетрудно показать, что неравенства из условия (6) для функций $c(x,t)$ и $\varphi(t)$ можно заменить неравенствами

$$c(x,t) - \frac{1}{2}\varphi'(t) + \frac{\psi(t)}{d_0} \ge c_1 > 0, \quad c(x,t) + \frac{1}{2}\varphi'(t) + \frac{\psi(t)}{d_0} \ge c_2 > 0 \quad ((x,t) \in \overline{Q}).$$

Аналогичное уточнение можно сделать и для условий (26) и (47).

6. Разрешимость краевых задач для квазиэллиптических уравнений (10_0) и для соответствующих уравнений, возникающих при доказательстве теорем 5–9, в пространствах Соболева хорошо известна — см., например, [14, 15]. С другой стороны, искомую разрешимость нетрудно установить и непосредственно, используя классический метод Фурье.

References

[1] G. Fichera, *On a Unified Theory of Boundary Value Problems for Elliptic-Parabolic Equations of Second Orde*, Boundary Problems. Differential Equations, Wisconsin: Univ. of Wisconsin Press. Madison, 1960, 97–120. Zbl 0122.33504

[2] O.A. Oleinik, E.V. Radkevich, *Second-Order Equations with Nonnegative Characteristic Form*, Business Media, 2012.

[3] V.N. Vragov, *Kraevye Zadachi dlya Neklassicheskih Uravneniy Matematicheskoy Fiziki*, Novosibirsk: Novosibirskiy Universitet, 1983.

[4] I.E. Egorov, V.E. Fedorov, *Neklassicheskie Uravneniya Matematicheskoy Fiziki Vysokogo Poryadka*, Novosibirsk: Vychisl. Tsentr SO RAN, 1995.

[5] I.E. Egorov, V.E. Fedorov, I.M. Tikhonova, E.S. Efimova *Metod Galerkina dlya Neklassicheskih Uravneniy Matematicheskoy Fiziki*, VIII Mezhdunarodnaya Konferentsyya po Matematicheskomu Modelirovaniyu. Yakutsk. Tezisy dokl, (2017), 11.

[6] I.E. Egorov, V.E. Fedorov, I.M. Tikhonova, E.S. Efimova, *The Galerkin method for nonclassical equations of mathematical physics*, AIP Conference Proceedings, **1907**, (2017), 020011.

[7] A.I. Kozhanov, *Kraevye Zadachi dlya Ultraparabolicheskih i Kvasiultraparabolicheskih Uravneniy s Menyayuschimsya Napravleniem Evolutsyi*, Itogi Nauki i Tehniki. Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskiye Obzory, **149** (2018), 56–63.

[8] A.I. Kozhanov, G.A. Lukina, *Nonlocal Boundary Value Problems with Partially Integral Conditions for Degenerate Differential Equations with Multiple Characteristics*, Journal of Mathematical Sciences, **237**:4 (2019), 549–562.

[9] S.S. Sobolev, *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, Translations of Mathematical Monographs, **90**. Providence, RI: American Mathematical Society, 1991. Zbl 0732.46001

[10] O.A. Ladyzhenskaia, V. A. Solonnikov, N.N. Ural'tseva, *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs, **23**. Providence, RI: American Mathematical Society, 1968. Zbl 0174.15403

[11] O.V. Besov, V.P. Il'in, S.M. Nikol'skii, *Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems*, Scripta Series in Mathematics. Washington, D.C.: V.H. Winston & Sons, 1979. Zbl 0392.46023

[12] O.A. Ladyzhenskaia, N.N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Mathematics in Science and Engineering. 46. New York-London: Academic Press. XVIII, 1968. Zbl 0164.13002

[13] V.A. Trenogin, *Funktsyanalnyi Analiz*, M.: Nauka, 1980. Zbl 0517.46001

[14] H. Triebel, *Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators*, Berlin: Deutscher Verlag des Wissenschaften, 1978. Zbl 0387.46033

[15] V.B. Shakhmurov, *Separable anisotropic differential operators and applications*, J. of Math. Analysis and Applications, **327**:2 (2007), 1182–1201. Zbl 1113.47035

Alexandr Ivanovich Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: kozhanov@math.nsc.ru

Ekaterina Evgenievna Macievskaya
Novosibirsk State University,
2, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: katya66613@yandex.ru