S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 732–747 (2019) УДК 517.95
DOI 10.33048/semi.2019.16.049 MSC 35R11

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ

М.О. МАМЧУЕВ

Abstract. In the paper a boundary-value problem for a multidimensional system of partial differential equations with fractional derivatives in Riemann–Liouville sense with constant coefficients is studied in a rectangular domain. The existence and uniqueness theorem for the solution of the boundary value problem is proved. The solution is constructed in explicit form in terms of the Wright function of the matrix argument.

Keywords: system of partial differential equations, fractional derivatives, boundary value problem, fundamental solution, Wright's function of the matrix argument.

1. Введение

В области $\Omega = \{x = (x_1, ..., x_m) : \ 0 < x_i < a_i\}$, $a_i \leq \infty$, $(i = 1, ..., m)$ рассмотрим систему n дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} A_i D_{0x_i}^{\alpha_i} u(x) = Bu(x) + f(x), \quad 0 < \alpha_i < 1, \tag{1}$$

где $u(x) = ||u_1(x), ..., u_n(x)||$ и $f(x) = ||f_1(x), ..., f_n(x)||$ – искомый и заданный n-мерные векторы соответственно, A_i, B – заданные постоянные квадратные матрицы порядка n, D_{ay}^{ν} – оператор дробного интегродифференцирования в

Mamchuev, M.O., Boundary value problem for a multidinensional system of equations with Riemann–Liouvile fractional derivatives.

Поступила 26 марта 2018 г., опубликована 4 июня 2019 г.

смысле Римана – Лиувилля порядка ν, который определяется следующим образом при $\nu < 0$ [1, с. 9]:

$$D_{ay}^{\nu}g(y) = \frac{\operatorname{sign}(y-a)}{\Gamma(-\nu)}\int\limits_a^y \frac{g(s)ds}{|y-s|^{\nu+1}},$$

при $\nu \geq 0$ оператор D_{ay}^{ν} можно определить с помощью рекурсивного соотношения

$$D_{ay}^{\nu}g(y) = \operatorname{sign}(y-a)\frac{d}{dy}D_{ay}^{\nu-1}g(y).$$

Пусть все собственные числа матриц A_i положительны ($i = 1, ..., m$). Без ограничения общности будем считать, что $A_1 = I$ – единичная матрица порядка n.

Сформулируем краевую задачу для системы (1).

Задача 1. *Найти решение $u(x)$ системы (1), удовлетворяющее следующим краевым условиям*

$$\lim_{x_i\to 0} D_{0x_i}^{\alpha_i-1}u = \varphi_i(x_{(i)}), \quad x_{(i)} \in \Omega^i, \quad (i = 1, ..., m), \tag{2}$$

где $x_{(i)} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_m)$, $\Omega^i = \omega_{a_1} \times ... \times \omega_{a_{i-1}} \times \omega_{a_{i+1}} \times ... \times \omega_{a_m}$, $\omega_{a_j} = \{x_j : 0 < x_j < a_j\}$, $\varphi_i(x_{(i)})$ – заданные n-мерные вектор-функции.

Приведем обзор работ связанных с исследованием уравнения (1) в том числе и в скалярном случае $n = 1$. В работе [2] для уравнения

$$D_{0x}^{\alpha}[u(x,y) - h_1(y)] + D_{0y}^{\beta}[u(x,y) - h_2(x)] = f(x,y), \quad 0 < \alpha, \beta < 1, \quad x, y \geq 0,$$

была исследована разрешимость краевых задач с условиями $u(0,y) = h_1(y)$ и $u(x,0) = h_2(x)$ в классе функций непрерывных по Гёльдеру и выписано фундаментальное решение в виде

$$\Psi_{\alpha,\beta}(x,y) = \int\limits_0^{\infty} \tau^{-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}\psi_{\alpha}\left(x\tau^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\psi_{\beta}\left(y\tau^{-\frac{1}{\beta}}\right)d\tau, \tag{3}$$

где

$$\psi_{\mu}(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\sin(\pi\mu k)\Gamma(\mu k+1)t^{-\mu k-1},$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера. Используя равенства $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ и $\Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin(\pi z) = \pi$, функцию $\psi_{\mu}(t)$ можно представить в виде

$$\psi_{\mu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{-\mu k-1}}{k!\Gamma(-\mu k)} = \frac{1}{t}\phi(-\mu, 0; -t^{-\mu}),$$

где $\phi(\rho, \mu; z)$ – функция Райта [3], [4]. Из последнего и (3) получим представление

$$\Psi_{\alpha,\beta}(x,y) = \frac{1}{xy}\int\limits_0^{\infty}\phi(-\alpha, 0; -\tau x^{-\alpha})\phi(-\beta, 0; -\tau y^{-\beta})d\tau.$$

Вопрос о гёльдеровой гладкости решения уравнения

$$D_{0x}^{\alpha}[u(x,y) - u_0(y)] + c(x,y)u_y(x,y) = f(x,y), \quad x, y > 0,$$

удовлетворяющих краевым условиям $u(0,y) = u_0(y)$ и $u(x,0) = u_1(x)$, исследован в работе [5].

В работах [6] и [7] доказаны теоремы существования и единственности регулярного в прямоугольной области решения краевой задачи для уравнения

$$D_{0x}^{\alpha}u(x,y) + \lambda D_{0y}^{\beta}u(x,y) + \mu u(x,y) = f(x,y),\ 0<\alpha,\beta<1,\ \lambda>0,\ x,y>0. \tag{4}$$

При $\lambda = 1$ фундаментальное решение имеет вид

$$w(x,y) = \frac{1}{xy}\int\limits_0^{\infty} e^{-\mu\tau}\phi(-\alpha,0;-\tau x^{-\alpha})\phi(-\beta,0;-\tau y^{-\beta})d\tau,$$

а при $\mu = 0$ –

$$w(x,y) = \frac{x^{\alpha-1}}{y}e_{\alpha,\beta}^{\alpha,0}\left(-\lambda\frac{x^{\alpha}}{y^{\beta}}\right),$$

где

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+\alpha k)\Gamma(\nu-\beta k)}$$

– функция типа Райта [7]. При $\alpha = 1$, $\mu = 0$, исследована краевая задача для уравнения (4) с отрицательным коэффициентом $\lambda < 0$.

Для уравнения (4) при $\alpha = 1$ с переменными коэффициентами $\lambda \equiv \lambda(x)$ и $\mu \equiv \mu(x)$ (причем $\lambda(x)$ может иметь при $x = 0$ ноль порядка $m \geq 0$), в работах [8] – [10] доказаны теоремы существования и единственности решений краевой задачи в прямоугольной области и задачи Коши, построено фундаментальное решение

$$w(x,y;t,s) = \frac{\exp(\Lambda(x,t))}{y-s}\phi\left(-\beta,0;-M(x,t)(y-s)^{-\beta}\right),$$

где $\Lambda(x,t) = \int\limits_t^x \lambda(\xi)d\xi$, $M(x,t) = \int\limits_t^x \mu(\xi)d\xi$.

В работе [11] доказана однозначная разрешимость аналога задачи 1 для уравнения с операторами дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна в случае $n = 1$, $A_i = \lambda_i > 0$ $(i = \overline{1,m})$, $B = \lambda_0$, и построено фундаментальное решение

$$w(x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda_0\tau}\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{x_i}\phi\left(-\alpha_i,0;-\lambda_i\tau x_i^{-\alpha_i}\right)d\tau.$$

Для двумерной системы

$$D_{0x}^{\alpha}u(x,y) + AD_{0y}^{\beta}u(x,y) = Bu(x,y) + f(x,y), \tag{5}$$

задача 1 решена в явном виде, в случаях когда матрица A единичная [12], и положительно определенная [13]. В работе [13] фундаментальное решение системы (5) построено в терминах функции Райта матричного аргумента. В настоящей работе мы используем аналогичный подход для решения задачи 1 в многомерном случае.

2. Функция Райта

Функцией Райта [3], [4] называется целая функция, зависящая от двух параметров ρ и μ, представимая рядом

$$\phi(\rho,\mu;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma(\rho k+\mu)}, \quad \rho > -1, \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

Для функции Райта справедливо интегральное представление [3] (см. также [14])

$$\phi(\rho,\mu;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{H}a}\exp\left(\zeta+z\zeta^{-\rho}\right)\zeta^{-\mu}d\zeta,\quad \rho>-1,\quad \mu\in\mathbb{C}, \tag{6}$$

где Ha – контур Ханкеля один раз обходящий в положительном направлении точку $\zeta=0$ с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси $\arg\zeta=\pi$.

Из (6) в силу ханкелева интегрального представления гамма-функции

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{H}a}e^{\zeta}\zeta^{-\mu}d\zeta=\frac{1}{\Gamma(\mu)},\quad \mu\in\mathbb{C},$$

получим

$$\phi(\rho,\mu;z)\big|_{z=0}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}. \tag{7}$$

Имеют место следующие формулы дифференцирования [4], [6]

$$\frac{d}{dz}\phi(\rho,\mu;z)=\phi(\rho,\mu+\rho;z), \tag{8}$$

$$D_{0y}^{\nu}y^{\mu-1}\phi(\rho,\mu;-\lambda y^{\rho})=y^{\rho-\nu-1}\phi(\rho,\rho-\nu;-\lambda y^{\rho}), \tag{9}$$

где $\lambda>0$, $\rho>-1$, $\mu,\nu\in\mathbb{R}$. Из равенств (8) и (9) следует

$$\left(\frac{d}{dz}+\lambda D_{0y}^{\beta}\right)y^{\mu-1}\phi(-\beta,\mu;-\lambda zy^{-\beta})=0,\quad \beta<1,\quad \lambda>0. \tag{10}$$

Для функции Райта справедливы следующие оценки [7]

$$|y^{\mu-1}\phi(-\beta,\mu;-\tau y^{-\beta})|\le C\tau^{-\theta}y^{\mu+\beta\theta-1},\quad \tau>0,\quad y>0, \tag{11}$$

где $\beta\in(0,1)$ и $\theta\ge 0$ при $\mu\ne 0,-1,-2,...$, и $\theta\ge -1$ при $\mu=0,-1,-2,...$,

$$|\phi(-\beta,\mu;-z)|\le C\exp\left(-\sigma z^{\frac{1}{1-\beta}}\right),\quad z\ge 0, \tag{12}$$

где $\beta\in(0,1)$, $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma<(1-\beta)\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}$, здесь и далее C – положительная постоянная.

В работе [14] получено следующее соотношение

$$\int\limits_0^{\infty}z^n\phi(-\beta,\mu;-z)dz=\frac{n!}{\Gamma(\mu+(n+1)\beta)},\quad n=0,1,.... \tag{13}$$

В частности, при $n=0$, имеем

$$\int\limits_0^{\infty}\phi(-\beta,\mu;-z)dz=\frac{1}{\Gamma(\mu+\beta)}. \tag{14}$$

3. Функция Райта матричного аргумента

1. Пусть A – квадратная матрица порядка n. В силу аналитичности функции $\phi(\rho,\mu;z)$ всюду в $\mathbb{C}$, следующий ряд

$$\phi(\rho,\mu;A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!\Gamma(\rho k+\mu)},\quad \rho>-1,\quad \mu\in\mathbb{C}$$

сходится для любой матрицы A заданной над полем $\mathbb{C}$, и определяет функцию Райта матричного аргумента.

Пусть матрица A с помощью матрицы H приводится к жордановой нормальной форме $J(\lambda)$, то есть

$$A=HJ(\lambda)H^{-1},$$

где $J(\lambda)=\mathrm{diag}[J_1(\lambda_1),...,J_p(\lambda_p)]$ – квазидиагональная матрица с клетками вида

$$J_k\equiv J_k(\lambda_k)=\begin{Vmatrix} \lambda_k & 1 & \dots & 0\\ & \lambda_k & \dots & 0\\ & 0 & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_k \end{Vmatrix},\quad k=1,...,p,$$

$\lambda_1,...,\lambda_p$ – собственные числа матрицы A, $J_k(\lambda_k)$ – квадратные матрицы порядка r_k+1, $\sum\limits_{k=1}^{p}r_k+p=n$. Тогда функцию $\phi(\rho,\mu;Az)$ можно представить в виде

$$\phi(\rho,\mu;Az)=H\phi(\rho,\mu;J(\lambda)z)H^{-1}, \tag{15}$$

где

$$\phi(\rho,\mu;J(\lambda)z)=\mathrm{diag}[\phi(\rho,\mu;J_1(\lambda_1)z),...,\phi(\rho,\mu;J_p(\lambda_p)z)],$$

$$\phi(\rho,\mu;J_k(\lambda_k)z)=\begin{Vmatrix} \phi^0_{\rho,\mu}(\lambda_k z) & \phi^1_{\rho,\mu}(\lambda_k z) & \dots & \phi^{r_k}_{\rho,\mu}(\lambda_k z)\\ & \phi^0_{\rho,\mu}(\lambda_k z) & \dots & \phi^{r_k-1}_{\rho,\mu}(\lambda_k z)\\ & 0 & \ddots & \vdots\\ & & & \phi^0_{\rho,\mu}(\lambda_k z) \end{Vmatrix},$$

$$\phi^m_{\rho,\mu}(\lambda z)=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\phi(\rho,\mu;\lambda z)=\frac{z^m}{m!}\phi(\rho,\mu+\rho m;\lambda z).$$

2. Пользуясь представлением (15) и равенством (7), получим

$$\phi(\rho,\mu;Az)\big|_{z=0}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}I, \tag{16}$$

где I – единичная матрица порядка n.

3. Справедлива следующая формула дифференцирования

$$\frac{d}{dz}\phi(\rho,\mu;Az)=A\phi(\rho,\rho+\mu;Az). \tag{17}$$

Действительно, в силу равенства (8) получим

$$\frac{d}{dz}\phi^m_{\rho,\mu}(\lambda z)=\lambda\frac{z^m}{m!}\phi(\rho,\mu+\rho+\rho m;\lambda z)+\frac{z^{m-1}}{(m-1)!}\phi(\rho,\mu+\rho m;\lambda z)=$$

$$=\lambda\phi^m_{\rho,\mu+\rho}(\lambda z)+\phi^{m-1}_{\rho,\mu+\rho}(\lambda z).$$

Откуда, в свою очередь имеем

$$\frac{d}{dz}\phi(\rho,\mu;J(\lambda)z)=J(\lambda)\phi(\rho,\rho+\mu;J(\lambda)z). \tag{18}$$

Из (18), учитывая равенство

$$H\frac{d}{dz}\phi(\rho,\mu;J(\lambda)z)H^{-1}=HJ(\lambda)H^{-1}H\phi(\rho,\rho+\mu;J(\lambda)z)H^{-1},$$

получим (17).

4. Пусть все собственные значения матрицы A положительны. Рассмотрим функцию

$$y^{\mu-1}\phi(-\beta,\mu;-A\tau y^{-\beta})=Hy^{\mu-1}\phi(-\beta,\mu;-J(\lambda)\tau y^{-\beta})H^{-1}.$$

Обозначив

$$w_m\equiv w_m^{\mu}(\tau,y)=\frac{y^{\mu-1}}{m!}\left(-\frac{\tau}{y^{\beta}}\right)^m\phi(-\beta,\mu-m\beta;-\lambda_k\tau y^{-\beta}),\quad m=0,...,r_k,$$

получим выражение

$$y^{\mu-1}\phi(-\beta,\mu;-J_k(\lambda_k)\tau y^{-\beta})=\begin{Vmatrix} w_0 & w_1 & \dots & w_{r_k}\\ & w_0 & \dots & w_{r_k-1}\\ & 0 & \ddots & \vdots\\ & & & w_0\end{Vmatrix},\quad k=1,...,p.$$

В силу (9) имеем

$$D_{0y}^{\delta}w_m^{\mu}(\tau,y)=\frac{(-\tau)^m}{m!}y^{\mu-\delta-\beta m-1}\phi(-\beta,\mu-\delta-\beta m;-\lambda\tau y^{-\beta})=w_m^{\mu-\delta}(\tau,y),$$

из которого, аналогично равенству (17), получим равенство

$$D_{0y}^{\delta}y^{\mu-1}\phi(-\beta,\mu;-A\tau y^{-\beta})=y^{\mu-\delta-1}\phi(-\beta,\mu-\delta;-A\tau y^{-\beta}). \tag{19}$$

5. Из равенств (17) и (19) следует, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+AD_{0y}^{\beta}\right)y^{\mu-1}\phi(-\beta,\mu;-A\tau y^{-\beta})=0. \tag{20}$$

6. Пусть все собственные значения матрицы A положительны, тогда справедливо следующее равенство

$$\int\limits_0^{\infty}\phi(-\beta,\mu;-Az)dz=\frac{1}{\Gamma(\mu+\beta)}A^{-1}. \tag{21}$$

Действительно, в силу (13) имеем

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{(-z)^m}{m!}\phi(-\beta,\mu-\beta m;-\lambda z)dz=\frac{1}{\Gamma(\mu+\beta)}\frac{(-1)^m}{\lambda^{m+1}}. \tag{22}$$

Из (22) получаем

$$\int\limits_0^{\infty}\phi(-\beta,\mu;-J_kz)dz=\frac{1}{\Gamma(\mu+\beta)}\begin{Vmatrix} \frac{1}{\lambda_k} & -\frac{1}{\lambda_k^2} & \frac{1}{\lambda_k^3} & \cdots & \frac{(-1)^{r_k}}{\lambda_k^{r_k+1}}\\ & \frac{1}{\lambda_k} & -\frac{1}{\lambda_k^2} & \cdots & \frac{(-1)^{r_k-1}}{\lambda_k^{r_k}}\\ & 0 & & \ddots & \vdots\\ & & & & \frac{1}{\lambda_k}\end{Vmatrix}=$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu+\beta)} J_k^{-1}. \tag{23}$$

Из (23), (15) и равенства

$$J^{-1}(\lambda) = \mathrm{diag}\left[J_1^{-1}(\lambda_1), ..., J_p^{-1}(\lambda_p)\right]$$

следует (21).

7. Будем обозначать $|A(x)|_*$ скалярную функцию принимающую в каждой точке x наибольшее из значений модулей элементов матрицы $A(x) = \|a_{ij}(x)\|$, то есть $|A(x)|_* = \max\limits_{i,j} |a_{ij}(x)|$. Аналогично для вектора $b(x)$ с компонентами $b_i(x)$ будем обозначать $|b(x)|_* = \max\limits_i |b_i(x)|$.

Из оценки (11) следует, что

$$|w_m^\mu(\tau, y)| \le \left| \frac{\tau^m}{m!} y^{\mu-\beta m-1} \phi(-\beta, \mu - \beta m; -\lambda\tau y^{-\beta}) \right| \le$$

$$\le C\tau^{-(\theta_m - m)} y^{\mu+\beta(\theta_m - m)-1},$$

где $\theta_0 \ge \left\{ \begin{array}{rl} 0, & \mu \ne 0, -1, -2, ..., \\ -1, & \mu = 0, -1, -2, ..., \end{array} \right.$ а при $m > 0$ можно принять $\theta_m \ge 0$. Поэтому при $m > 0$ всегда можно выбрать θ_m таким, что $\theta_m - m = \theta_0 = \theta$. Таким образом,

$$|y^{\mu-1}\phi(-\beta, \mu; -A\tau y^{-\beta})|_* \le C\tau^{-\theta} y^{\mu+\beta\theta-1}, \quad \tau > 0, \quad y > 0, \tag{24}$$

где $\beta \in (0,1)$ и $\theta \ge 0$ при $\mu \ne 0, -1, -2, ...$, и $\theta \ge -1$ при $\mu = 0, -1, -2, \dots$.

8. Из (12) и (15) следует оценка

$$|\phi(-\beta, \mu; -Az)|_* \le C \exp\left(-\sigma z^{\frac{1}{1-\beta}}\right), \quad z \ge 0, \tag{25}$$

где $\beta \in (0,1)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma < (1-\beta)\left(\lambda\beta^\beta\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$, $\lambda = \min\limits_{i=\overline{1,p}} \{\lambda_i\}$, $\lambda_1, ..., \lambda_p$ – собственные значения матрицы A.

4. Формулировка основного результата

Рассмотрим следующую функцию

$$\Phi_\alpha^\delta(x) = \int\limits_0^\infty e^{B\tau} \prod_{i=1}^m h_i^{\delta_i}(x_i, \tau) d\tau, \quad h_i^{\delta_i}(x_i, \tau) = x_i^{\delta_i - 1} \phi(-\alpha_i, \delta_i; -A_i \tau x_i^{-\alpha_i}),$$

где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, $\delta = (\delta_1, ..., \delta_m)$.

Из оценок (24), (25) и

$$|\exp(B\tau)|_* \le Ce^{\gamma\tau}, \quad \gamma = \max_{1\le i\le q} \{|\mathrm{Re}\gamma_i|\}, \tag{26}$$

где $\gamma_1, ..., \gamma_q$ – собственные числа матрицы B, следует сходимость интеграла $\Phi_\alpha^\delta(x)$ для всех $\alpha_i, \delta_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$.

Определение 1. *Регулярным решением системы (1) в области Ω назовём вектор-функцию $u(x)$, удовлетворяющую во всех точках $x \in \Omega$ системе (1), такую, что $D_{0x_i}^{\alpha_i} u \in C(\Omega)$, $\prod\limits_{i=1}^m x_i^{1-\mu_i} u(x) \in C(\bar{\Omega})$, для некоторых положительных $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$.*

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть матрицы A_1, A_2, ... A_m и B попарно коммутативны, все собственные числа матриц A_i положительны, $\mu_i < \alpha_i$, $(i = \overline{1,m})$,*

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} x_i^{1-\mu_i} \varphi_j(x_{(j)}) \in C(\overline{\Omega^j}), \quad j = \overline{1,m}, \tag{27}$$

$$\prod_{i=1}^{m} x_i^{1-\mu_i} f(x) \in C(\overline{\Omega}), \tag{28}$$

$f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера. Тогда существует единственное регулярное решение задачи (1), (2), представимое в виде

$$u(x) = \int_{\Omega_x} G(x-t) f(t) dt + \sum_{i=1}^{m} \int_{\Omega_x^i} A_i G(x - t^i) \varphi_i(t_{(i)}) dt_{(i)}, \tag{29}$$

где $G(x) = \Phi_\alpha^0(x)$, $\Omega_x = \omega_{x_1} \times \omega_{x_2} \times ... \times \omega_{x_m}$, $\Omega_x^i = \omega_{x_1} \times ... \times \omega_{x_{i-1}} \times \omega_{x_{i+1}} \times ... \times \omega_{x_m}$, $\omega_{x_j} = \{t_j : 0 < t_j < x_j\}$, $t^i = (t_1, ..., t_{i-1}, 0, t_{i+1}, ..., t_m)$.

5. Вспомогательные утверждения

Далее будем предполагать, что матрицы A_1, A_2, ... A_m и B попарно коммутативны и все собственные числа матриц A_i положительны $(i = \overline{1,m})$. Докажем некоторые утверждения, которые нам понадобятся при доказательстве теоремы 1.

5.1. **Свойства функции $\Phi_\alpha^\delta(x)$.**

Лемма 1. *Для всех $x_1 \in [0, x_{1,0}]$ при любом конечном $x_{1,0}$ справедлива оценка*

$$\left|\Phi_\alpha^\delta(x)\right|_* \leq C \prod_{i=1}^{m} x_i^{\delta_i + \alpha_i \theta_i - 1}, \quad \sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1, \tag{30}$$

где $\theta_i > 0$, при $\delta_i \neq 0$, $\theta_i > -1$, при $\delta_i = 0$; константа C зависит от $x_{1,0}$.

Доказательство. В силу (24) и (26) получим

$$\left|\Phi_\alpha^\delta(x)\right|_* \leq C \prod_{i=2}^{m} x_i^{\delta_i + \alpha_i \theta_i - 1} \int_0^\infty e^{\gamma\tau} \tau^{\theta_1 - 1} x_1^{\delta_1 - 1} \phi\left(-\alpha_1, \delta_1; -\tau x_1^{-\alpha_1}\right) d\tau,$$

или, после замены $\tau = x_1^{\alpha_1} z$,

$$\left|\Phi_\alpha^\delta(x)\right|_* \leq C \prod_{i=1}^{m} x_i^{\delta_i + \alpha_i \theta_i - 1} \int_0^\infty e^{\gamma x_1^{\alpha_1} z} z^{\theta_1 - 1} \phi(-\alpha_1, \delta_1; -z) dz. \tag{31}$$

Интеграл в правой части (31) представим в виде суммы

$$J_1(x) + J_2(x) = \left(\int_0^{z_0} + \int_{z_0}^\infty \right) z^{-\theta} e^{\gamma x_1^{\alpha_1} z} \phi(-\alpha_1, \mu; -z) dz. \tag{32}$$

В силу ограниченности функции $\phi(-\alpha_1, \mu; -z)$ на любом конечном отрезке $[0, z_0]$, получим, что

$$|J_1(x)| \le Ce^{\gamma x_{1,0}^{\alpha_1} z_0} \int\limits_0^{z_0} z^{-\theta} dz = C_1 e^{\gamma x_{1,0}^{\alpha_1} z_0}. \tag{33}$$

Используя оценку (12), имеем

$$|J_2(x)| \le C z_0^{-\theta} \int\limits_{z_0}^{\infty} \exp(\gamma x_{1,0}^{\alpha_1} z - \rho_0 z^{\varepsilon}) dz,$$

где $\rho_0 \le \alpha_1^{\alpha_1/(1-\alpha_1)}(1-\alpha_1)$, $\varepsilon = 1/(1-\alpha_1) > 1$. Заметим, что $\gamma x_{1,0}^{\alpha_1} z - \rho_0 z^{\varepsilon} \le -z$ при $z \ge z_0 = ((\gamma x_{1,0}^{\alpha_1} z + 1)/\rho_0)^{(1-\alpha_1)/\alpha_1} > 1$, поэтому

$$|J_2(x)| \le C_2 z_0^{-\theta} e^{-z_0}. \tag{34}$$

Из (32), (33), (34) и (31) следует оценка (30), где

$$C \equiv C(x_{1,0}) = C_1 e^{\gamma x_{1,0}^{\alpha_1} z_0} + C_2 z_0^{-\theta} e^{-z_0}.$$

□

Замечание. Из равенств (17) и (19) легко видеть, что формула

$$D_{0x_i}^{\nu} \Phi_{\alpha}^{\delta}(x) = \Phi_{\alpha}^{(\delta_1, \dots, \delta_i - \nu, \dots, \delta_m)}(x) \tag{35}$$

справедлива безусловно при $\nu = 0$ и $\nu \in \mathbb{N}$. В остальных случаях требуется чтобы функция $\Phi_{\alpha}^{\delta}(x)$ имела интегрируемую особенность при $x_i = 0$. Как следует из оценки (30), для этого достаточно чтобы $\delta_i + \alpha_i > 0$.

Лемма 2. *Пусть $\delta_i + \alpha_i > 0$ $(i = \overline{1,m})$, тогда для любых $x \in \Omega$ справедливо равенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} A_i D_{0x_i}^{\alpha_i} - B \right) \Phi_{\alpha}^{\delta}(x) = \prod_{i=1}^{m} \frac{x_i^{\delta_i - 1}}{\Gamma(\delta_i)} I, \tag{36}$$

где I – единичная матрица.

Доказательство. В силу (9), для производных по x_k получим выражение

$$D_{0x_k}^{\alpha_k} \Phi_{\alpha}^{\delta}(x) = \int\limits_0^{\infty} e^{B\tau} D_{0x_k}^{\alpha_k} h_k^{\delta_k}(x_k, \tau) \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne k}}^{m} h_i^{\delta_i}(x_i, \tau) d\tau, \quad k = 1, ..., m. \tag{37}$$

Преобразуем предыдущую формулу при $k = 1$. Пользуясь равенством (10), формулой интегрирования по частям, и соотношениями (7), (16), (12) и (25), получим

$$D_{0x_1}^{\alpha_1} \Phi_{\alpha}^{\delta}(x) = - \int\limits_0^{\infty} e^{B\tau} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} h_1^{\delta_1}(x_1, \tau) \right] \prod_{i=2}^{m} h_i^{\delta_i}(x_i, \tau) d\tau =$$

$$= -e^{B\tau} \prod_{i=1}^{m} h_i^{\delta_i}(x_i, \tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=\infty} + \int\limits_0^{\infty} h_1^{\delta_1}(x_1, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[e^{B\tau} \prod_{i=2}^{m} h_i^{\delta_i}(x_i, \tau) \right] d\tau =$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{x_i^{\delta_i - 1}}{\Gamma(\delta_i)} I + B\Phi_\alpha^\delta(x) + \int_0^\infty h_1^{\delta_1}(x_1, \tau) e^{B\tau} \frac{\partial}{\partial\tau} \prod_{i=2}^{m} h_i^{\delta_i}(x_i, \tau) d\tau =$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{x_i^{\delta_i - 1}}{\Gamma(\delta_i)} I + B\Phi_\alpha^\delta(x) + \sum_{k=2}^{m} \int_0^\infty e^{B\tau} \left[\frac{\partial}{\partial\tau} h_k^{\delta_k}(x_k, \tau)\right] \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{m} h_i^{\delta_i}(x_i, \tau) d\tau. \tag{38}$$

Из соотношений (37) и (38) следует

$$\left(\sum_{k=1}^{m} A_k D_{0x_k}^{\alpha_k} - B\right) \Phi_\alpha^\delta(x) = \prod_{i=1}^{m} \frac{x_i^{\delta_i - 1}}{\Gamma(\delta_i)} I +$$

$$+ \sum_{k=2}^{m} \int_0^\infty e^{B\tau} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{m} h_i^{\delta_i}(x_i, \tau) \left[\frac{\partial}{\partial\tau} + A_k D_{0x_k}^{\alpha_k}\right] h_k^{\delta_k}(x_k, \tau) d\tau.$$

Отсюда с учетом (20) получим (36). □

5.2. **Представление решения.**

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда любое регулярное в области Ω решение $u(x)$ задачи (1) – (2) представимо в виде (29).*

Доказательство. Пусть матрица $V(x)$ – решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{m} D_{0x_i}^{\alpha_i} V(x) A_i = V(x)B + I, \tag{39}$$

удовлетворяющее условиям

$$V(x^i) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{40}$$

где I – единичная матрица порядка n. Функция

$$V(x) = \int_{\Omega_x} G(t)dt = \Phi_\alpha^{(1,\ldots,1)}(x),$$

в силу леммы 2, является решением уравнения

$$\sum_{i=1}^{m} A_i D_{0x_i}^{\alpha_i} V(x) = BV(x) + I. \tag{41}$$

Отсюда, с учетом того, что матрица $\Phi_\alpha^\delta(x)$ коммутирует с матрицами A_i и B, получим, что $V(x)$ – решение уравнения (39).

Из (30) следует оценка

$$|V(x)|_* \le \prod_{i=1}^{m} x_i^{\alpha_i \theta_i}, \quad \theta_i > 0,$$

из которой, в свою очередь, следует (40). То есть, $V(x)$ является решением задачи (39), (40).

В силу формулы интегрирования по частям и (40) получим

$$\int_{\Omega_x \setminus \Omega_\varepsilon} V(x-t) \sum_{i=1}^{m} A_i D_{0t_i}^{\alpha_i} u(t)dt = -\sum_{i=1}^{m} \int_{\Omega_x \setminus \Omega_\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial t_i} V(x-t)\right] A_i D_{0t_i}^{\alpha_i - 1} u(t)dt -$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\Omega_x^i\setminus\Omega_\varepsilon^i} V(x-t^i)\big|_{t_i=\varepsilon_i} A_i D_{0\varepsilon_i}^{\alpha_i-1}u(t)dt_{(i)}, \quad i=1,...,m,$$

где $\Omega_\varepsilon=\omega_{\varepsilon_1}\times...\times\omega_{\varepsilon_n}$, $\Omega_\varepsilon^i=\omega_{\varepsilon_1}\times...\times\omega_{\varepsilon_{i-1}}\times\omega_{\varepsilon_{i+1}}\times...\times\omega_{\varepsilon_n}$, $\omega_{\varepsilon_j}=\{t_j : 0 < t_j < \varepsilon_j\}$, $\varepsilon=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$.

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon_i\to 0$, с учетом (1), (2), (39) и равенства [1, с. 34]

$$\int\limits_0^x v_1(t)D_{0t}^{\nu}v_2(t)dt=\int\limits_0^x D_{xt}^{\nu}v_1(t)v_2(t)dt, \quad \nu<0,$$

получим

$$\int\limits_{\Omega_x} u(t)dt=\int\limits_{\Omega_x} V(x-t)f(t)dt+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\Omega_x^i} V(x-t^i)A_i\varphi_i(t_{(i)})dt_{(i)}. \tag{42}$$

Дифференцируя (42) по всем x_i с учетом (40), получим

$$u(x)=\int\limits_{\Omega_x} V_{x_1...x_m}(x-t)f(t)dt+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\Omega_x^i} V_{x_1...x_m}(x-t^i)A_i\varphi_i(t_{(i)})dt_{(i)}. \tag{43}$$

Из (43), и равенства $V_{x_1...x_m}(x)=G(x)$, получим (29). □

5.3. **Свойства фундаментального решения.**

Лемма 4. *Справедливы оценки*

$$|G(x)|_*\le C\prod_{i=1}^{m}x_i^{\alpha_i\theta_i-1}, \quad \sum_{i=1}^{m}\theta_i=1, \quad \theta_i>-1; \tag{44}$$

$$|D_{0x_s}^{\alpha_s-1}G(x)|_*\le Cx_s^{1-\alpha_s}\prod_{i=1}^{m}x_i^{\alpha_i\theta_i-1}, \quad \sum_{i=1}^{m}\theta_i=1, \quad \theta_i>\begin{cases}0, i=s,\\ -1, i\ne s;\end{cases} \tag{45}$$

$$|D_{0x_s}^{\alpha_s}G(x)|_*\le Cx_s^{-\alpha_s}\prod_{i=1}^{m}x_i^{\alpha_i\theta_i-1}, \quad \sum_{i=1}^{m}\theta_i=1, \quad \theta_i>-1, \tag{46}$$

где C – положительная постоянная.

Лемма 5. *Для любых $x\in\Omega$ справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{m}D_{0x_i}^{\alpha_i}G(x)=BG(x).$$

Леммы 4 и 5 следуют из лемм 1 и 2 и формулы (35).

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда функция $u(x)$ определяемая равенством (29) есть решение уравнения (1), такое, что $D_{0x_i}^{\alpha_i}u\in C(\Omega)$.*

Доказательство. Обозначим

$$u_f(x)=\int\limits_{\Omega_x} G(x-t)f(t)dt, \quad u^i(x)=A_i\int\limits_{\Omega_x^i} G(x-t^i)\varphi_i(t_{(i)})dt_{(i)}, \quad i=1,...,m.$$

Из (46) получим

$$|D^{\alpha_s}_{x_s t_s} G(x-t^i)|_* < C x_i^{\alpha_i\theta_i-1}(x_s-t_s)^{-\alpha_s}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}(x_j-t_j)^{\alpha_j\theta_j-1}, \quad s\neq i, \tag{47}$$

$$|D^{\alpha_s}_{0t_s} G(x-t^s)|_* < C x_s^{\alpha_s\theta_s-\alpha_s-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}(x_j-t_j)^{\alpha_j\theta_j-1}, \tag{48}$$

где $\theta_i > \left\{\begin{array}{l} 1, i=s, \\ -1, i\neq s, \end{array}\right. \quad \sum\limits_{i=1}^{n}\theta_i = 1.$

В силу формулы [15, с. 99]

$$D^{\nu}_{0x}\int\limits_0^x v_1(x-t)v_2(t)dt = \int\limits_0^x v_1(x-t)D^{\nu}_{0t}v_2(t)dt +$$

$$+v_1(x)\lim_{x\to 0} D^{\nu-1}_{0x}v_2(t), \quad 0<\nu<1,$$

и оценок (47) и (48) справедливы включения

$$D^{\alpha_s}_{0x_s}u^i(x) = A_i\int\limits_{\Omega_x^i}[D^{\alpha_s}_{x_s t_s}G(x-t^i)]\varphi_i(t_{(i)})dt_{(i)} \in C(\Omega), \quad i\neq s, \tag{49}$$

$$D^{\alpha_s}_{0x_s}u^s(x) = A_s\int\limits_{\Omega_x^s}[D^{\alpha_s}_{0x_s}G(x-t^s)]\varphi_s(t_{(s)})dt_{(s)} \in C(\Omega). \tag{50}$$

и равенства

$$\sum_{j=1}^{m} A_j D^{\alpha_j}_{0x_j}u^i(x) = Bu_i(x), \quad i=1,...,m. \tag{51}$$

Рассмотрим следующие интегралы

$$J(x,t_{(k)}) = \int\limits_0^{x_k}[D^{\alpha_k-1}_{x_k t_k}G(x-t)]f(t)dt_k,$$

$$J_\varepsilon(x,t_{(k)}) = \int\limits_0^{x_k-\varepsilon}[D^{\alpha_k-1}_{x_k t_k}G(x-t)]f(t)dt_k.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(x,t_{(k)}) = J(x,t_{(k)})$. В силу (46), и того, что $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера, получим

$$\left|D^{\alpha_k}_{x_k t_k}G(x-t)[f(t_k,t_{(k)})-f(x_k,t_{(k)})]\right|_* \leq$$

$$\leq C(x_k-t_k)^{q+\alpha_k(\theta_k-1)-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} t_j^{\mu_j-1}(x_j-t_j)^{\alpha_j\theta_j-1},$$

здесь $\theta_k > 1-\frac{q}{\alpha_k}$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\theta_j = 1$. Отсюда нетрудно видеть, что интеграл в правой части равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_k}J_\varepsilon(x,t_{(k)}) = \int\limits_0^{x_k-\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}D^{\alpha_k-1}_{x_k t_k}G(x-t)\right][f(t_k,t_{(k)})-f(x_k,t_{(k)})]dt_k -$$

$$-D^{\alpha_k-1}_{x_kt_k}G(x-t)|^{t_k=x_k-\varepsilon}_{t_k=0}f(x_k,t_{(k)})+[D^{\alpha_k-1}_{x_k,x_k-\varepsilon}G(x-t)]f(x_k-\varepsilon,t_{(k)})$$

сходится равномерно на множестве $\Omega\times\Omega^k_x$ для любого $q\in(0,1]$. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial x_k}J_\varepsilon(x,t_{(k)})=\frac{\partial}{\partial x_k}J(x,t_{(k)})=\left[D^{\alpha_k-1}_{x_kt_k}G(x-t)|_{t_k=0}\right]f(x_k,t_{(k)})+$$

$$+\int\limits_0^{x_k}[D^{\alpha_k}_{x_kt_k}G(x-t)][f(t_k,t_{(k)})-f(x_k,t_{(k)})]dt_k.$$

Из последнего, с учетом

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k}J_\varepsilon(x,t_{(k)})\right|_*\le Cx_k^{q-\alpha_k+\alpha_k\theta_k}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n t_j^{\mu_j-1}(x_j-t_j)^{\alpha_j\theta_j-1},$$

получим

$$D^{\alpha_k}_{0x_k}u_f(x)=\frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{\Omega_x}[D^{\alpha_k-1}_{x_kt_k}G(x-t)]f(t)dt=\int\limits_{\Omega_x}\frac{\partial}{\partial x_k}J(x,t_{(k)})dt_{(k)}\in C(\Omega). \tag{52}$$

В силу (41), имеем

$$\int\limits_{\Omega_x}\left[\sum_{k=1}^m A_kD^{\alpha_k}_{0t_k}-B\right]u_f(t)dt=\int\limits_{\Omega_x}\left[\sum_{k=1}^m A_kD^{\alpha_k}_{x_kt_k}-B\right]V(x-t)f(t)dt=\int\limits_{\Omega_x}f(t)dt,$$

Откуда следует, что

$$\sum_{k=1}^m A_kD^{\alpha_k}_{0x_k}u_f(x)-Bu_f(x)=f(x). \tag{53}$$

Из (49) – (53) следует справедливость леммы. □

Лемма 7. *Пусть функция $\varphi_j(x_{(j)})$ удовлетворяет условию (27), тогда выполняются соотношения*

$$\lim_{x_s\to 0}D^{\alpha_s-1}_{0x_s}\int\limits_{\Omega^j_x}G(x-t^j)\varphi_j(t_{(j)})dt_{(j)}=0,\quad s\neq j,\quad x_{(s)}\in\Omega^s\setminus\Omega^s_\varepsilon, \tag{54}$$

$$\lim_{x_s\to 0}D^{\alpha_s-1}_{0x_s}\int\limits_{\Omega^s_x}G(x-t^s)\varphi_s(t_{(s)})dt_{(s)}=\varphi_s(x_{(s)}),\quad x_{(s)}\in\Omega^s\setminus\Omega^s_\varepsilon, \tag{55}$$

причем пределы являются равномерными на любом замкнутом подмножестве области Ω^s.

Доказательство. В силу (45) при $x_{(s)}\in\Omega^s\setminus\Omega^s_\varepsilon$ имеем оценку

$$\left|D^{\alpha_s-1}_{0x_s}u^i(x)\right|_*\le Cx_s^{\alpha_s\theta_s+\mu_{sj}-\alpha_s},\quad s\neq j, \tag{56}$$

из которой следует справедливость (54).

Рассмотрим далее интеграл

$$D^{\alpha_s-1}_{0x_s}u^s(x)=A_sD^{\alpha_s-1}_{0x_s}\int\limits_{\Omega^s_x}G(x-t^s)\varphi_s(t_{(s)})dt_{(s)}=$$

$$= A_s \left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} + \int\limits_{\Omega_x^s \setminus \Omega_\varepsilon^s} \right) D_{0x_s}^{\alpha_s - 1} G(x_s, t_{(s)}) \varphi_s(x_{(s)} - t_{(s)}) dt_{(s)}, \tag{57}$$

где $G(x_s, t_{(s)}) = G(t)|_{t_s = x_s}$, $\Omega_\varepsilon^i = \omega_{\varepsilon_1} \times ... \times \omega_{\varepsilon_{i-1}} \times \omega_{\varepsilon_{i+1}} \times ... \times \omega_{\varepsilon_n}$, $\omega_{\varepsilon_j} = \{t_j : 0 < t_j < \varepsilon_j\}$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$. Предел второго интеграла при $x_s \to 0$, в силу оценки

$$\left| D_{0x_s}^{\alpha_s - 1} G(x_s, t_{(s)}) \right| \le C x_s^{\alpha_s \theta}, \quad 0 < \theta \le 1, \quad x_{(s)} \in \Omega^s \setminus \Omega_\varepsilon^s,$$

и ограниченности интеграла $\int\limits_{\Omega_x^s \setminus \Omega_\varepsilon^s} \varphi_s(x_{(s)} - t_{(s)}) dt_{(s)}$ равен нулю. Обозначим первый интеграл $I_1(x)$, тогда

$$I_1(x) = A_s \int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} D_{0x_s}^{\alpha_s - 1} G(x_s, t_{(s)}) \left[\varphi_s(x_{(s)} - t_{(s)}) - \varphi_s(x_{(s)}) \right] dt_{(s)} +$$

$$+ A_s \left[\int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} D_{0x_s}^{\alpha_s - 1} G(x_s, t_{(s)}) dt_{(s)} \right] \varphi_s(x_{(s)}) =$$

$$= A_s \int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} \left[\int\limits_0^\infty e^{B\tau} h_s^{1-\alpha_s}(x_s, \tau) \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne s}}^m h_i^0(t_i, \tau) d\tau \right] \left[\varphi_s(x_{(s)} - t_{(s)}) - \varphi_s(x_{(s)}) \right] dt_{(s)} +$$

$$+ A_s \left[\int\limits_0^\infty e^{B\tau} h_s^{1-\alpha_s}(x_s, \tau) d\tau \int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne s}}^m h_i^0(t_i, \tau) dt_{(s)} \right] \varphi_s(x_{(s)}). \tag{58}$$

Пользуясь тем, что в силу (19)

$$\int\limits_0^{\varepsilon_i} \frac{1}{t_i} \phi\left(-\alpha_i, 0; -A_i \tau t_i^{-\alpha_i}\right) dt_i = \phi\left(-\alpha_i, 1; -A_i \tau \varepsilon_i^{-\alpha_i}\right),$$

и заменив затем переменную интегрирования, преобразуем интеграл

$$\int\limits_0^\infty e^{B\tau} h_s^{1-\alpha_s}(x_s, \tau) d\tau \int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne s}}^m h_i^0(t_i, \tau) dt_{(s)} = \int\limits_0^\infty e^{B\tau} h_s^{1-\alpha_s}(x_s, \tau) \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne s}}^m h_i^1(\varepsilon_i, \tau) d\tau =$$

$$= \int\limits_0^\infty \phi(-\alpha_s, 1 - \alpha_s; -A_s z) F(x_s, z) dz. \tag{59}$$

где $F(x_s, z) = e^{B x_s^{\alpha_s} z} \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \ne s}}^n \phi\left(-\alpha_i, 1; -A_i \varepsilon_i^{-\alpha_i} x_s^{\alpha_s} z\right)$.

Из оценки (11) следует, что существует равномерный предел по всем $z \in [0, z_0]$ $z_0 < \infty$

$$\lim_{x_s \to 0} F(x_s, z) = I, \tag{60}$$

и, что $|F(x_s,z)|_* \le \exp(\gamma x_{s,0}^{\alpha_s} z)$, для любого конечного $x_s \le x_{s,0}$. Из последнего следует, что интеграл (59) сходится равномерно по всем $x_s \in [0, x_{s,0}]$. Переходя в интеграле (59) к пределу при $x_s \to 0$, с учетом (60) и формулы (21), получим

$$\lim_{x_s\to 0}\int\limits_0^\infty e^{B\tau} h_s^{1-\alpha_s}(x_s,\tau)d\tau \int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} \prod_{\substack{i=1\\ i\ne s}}^m h_i^0(t_i,\tau)dt_{(s)} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \phi(-\alpha_s, 1-\alpha_s; -A_s z)dz = A_s^{-1}. \tag{61}$$

Функция $\varphi_s(t_{(s)})$ непрерывна на $[x-\varepsilon, x]$, поэтому

$$\omega(\varepsilon) = \sup|\varphi_s(x_{(s)} - t_{(s)}) - \varphi_s(x_{(s)})| \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. В силу произвольности выбора ε и (61) при $x_s \to 0$ первое слагаемое в (58) стремится к нулю, а второе – к $\varphi_s(x_{(s)})$. Таким образом,

$$\lim_{x_s\to 0} I_1(x) = \varphi_s(x_{(s)}),$$

из последнего вместе с (57) следует (55). □

6. Доказательство теоремы 1

Доказательство. Учитывая, что $f^*(x) = \prod\limits_{i=1}^m x_i^{1-\mu_i} f(x) \in C(\overline{\Omega})$ и пользуясь (28) и (44) получим

$$|u_f(x)|_* \le C\prod_{i=1}^m x_i^{\mu_i+\alpha_i\theta_i-1}, \quad \theta_i > 0, \quad \sum_{i=1}^m \theta_i = 1. \tag{62}$$

Из (62) следует, что

$$\lim_{x_s\to 0} D_{0x_s}^{\alpha_s-1} u_f(x) = 0.$$

Из леммы 7 и последнего соотношения следует выполнение краевых условий (2). Из оценки (62) также следует, что $\prod\limits_{i=1}^n x_i^{1-\mu_i} u_f \in C(\overline{\Omega})$.

Пользуясь (27) и (44) получим

$$|u_k(x)|_* \le C x_k^{\alpha_k\theta_k-1} \prod_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^m x_i^{\alpha_i\theta_i+\mu_i-1}.$$

Из последнего неравенства следует, что $\prod\limits_{i=1}^m x_i^{1-\mu_i}(u-u_f) \in C(\overline{\Omega})$. Вышесказанное вместе с леммой 6 доказывает существование регулярного решения задачи (1) – (2).

Единственность решения задачи следует из леммы 3. Действительно, в силу леммы 3, задача 1 с однородными условиями (2) и правой частью уравнения (1) имеет только тривиальное решение. Отсюда, в силу линейности операторов дробного интегродифференцирования, следует единственность решения задачи 1. □

References

[1] A. M. Nakhushev, *Fractional calculus and its applications*, Moscow: Fizmatlit, 2003. (In Russian). Zbl 1066.26005

[2] Ph. Clement, G. Gripenberg, S-O. Londen, *Schauder estimates for equations with fractional derivatives*, Trans. of the Amer. Math. Soc., **352**:5 (2000), 2239–2260. Zbl 0947.35023

[3] E. M. Wright, *On the coefficients of power series having exponential singularities*, J. London Math. Soc., **8:**29 (1933), 71–80. Zbl 0006.19704

[4] E. M. Wright, *The asymptotic expansion of the generalized Bessel function*, Proc. London Math. Soc. Ser. II, **38** (1935), 257–270.

[5] Ph. Clement, G. Gripenberg, S-O. Londen, *Holder regularity for a linear fractional evolution equation*, Progr. Nonlinear Differ. Equat. and Their Appl., **35** (1999), 62–82. Zbl 0920.35004

[6] A. V. Pskhu, *Solution of a boundary value problem for a fractional partial differential equation*, Differential Equation, **39:**8 (2003), 1092-1099. (In Russian). Zbl 1065.35096

[7] A. V. Pskhu, *Fractional partial differential equations*, Moscow: Nauka, 2005. (In Russian). Zbl 1193.35245

[8] M. O. Mamchuev, *A boundary value problem for a first-order equation with a partial derivative of a fractional order with variable coefficients*, Reports of Circassian International Academy of Sciences, **11:**1 (2009), 32–35. (In Russian).

[9] M. O. Mamchuev, *Cauchy problem in non-local statement for first order equation with partial derivatives of fractional order with variable coefficients*, Reports of Circassian International Academy of Sciences, **11:**2 (2009), 21–24. (In Russian).

[10] M. O. Mamchuev, *Boundary value problems for equations and systems with the partial derivatives of fractional order*, Nalchik: Publishing house KBSC of RAS, 2013. (In Russian).

[11] A. V. Pskhu, *Boundary value problem for a multidimensional fractional partial differential equation*, Differential Equation, **47:**3 (2011), 382–392. (In Russian). Zbl 1223.35303

[12] M. O. Mamchuev, *Boundary value problem for a system of fractional partial differential equations*, Differential Equations, **44:**12 (2008), 1737–1749. Zbl 1175.35151

[13] M. O. Mamchuev, *Boundary value problem for a linear system of equations with the partial derivatives of fractional order*, Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal, **2:**3 (2017), 295–311. (In Russian).

[14] R. Gorenflo, Yu. Luchko, F. Mainardi, *Analytical properties and applications of the Wright function*, Fractional Calculus and Applied Analysis, **2:**4 (1999), 383–414. Zbl 1027.33006

[15] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, New-York: Acad. press, 1999. Zbl 0924.34008

Murat Osmanovich Mamchuev
Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS,
89 A, Shortanov"str.,
Nal'chik, 360000, Russia
E-mail address: mamchuev@rambler.ru