S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

*Том 16, стр. 748–756 (2019)* УДК 517.929.4

DOI 10.33048/semi.2019.16.050 MSC 34K20

# ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

И.И. МАТВЕЕВА

Abstract. We consider a class of linear time-varying delay systems of neutral type with periodic coefficients. We obtain conditions for the exponential stability of the zero solution and establish estimates characterizing the exponential decay rate of solutions at infinity.

**Keywords:** time-varying delay systems, neutral type, periodic coefficients, exponential stability, estimates for solutions.

## 1. Введение

В настоящее время имеется большое число работ, посвященных дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом (см., например, монографии [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] и имеющуюся в них библиографию). Повышенный интерес к таким уравнениям обусловлен тем, что они возникают во многих прикладных задачах при изучении процессов, скорость протекания которых определяется не только настоящим, но и предшествующим состояниями (см.,например, книги [9, 10] и библиографию, содержащуюся в них). Одной из важных является проблема исследования экспоненциальной устойчивости решений таких уравнений. В отличие от автономных уравнений эта проблема для неавтономных уравнений является менее изученной.

В статье рассматриваются системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)), \qquad t \geq 0, \tag{1.1}$$

Matveeva, I.I., On stability of solutions to neutral type systems.



Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086).

*Поступила 20 марта 2019 г., опубликована 7 июня 2019 г.*

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными комплекснозначными $T$-периодическими элементами, т. е.

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T) \equiv B(t), \quad C(t+T) \equiv C(t),$$

$\tau(t)$ — функция, определяющая запаздывание, $\tau(t) \in C^1([0,\infty))$,

$$0 < \tau_1 \le \tau(t) \le \tau_2, \qquad \tau_3 \le \frac{d}{dt}\tau(t) \le \tau_4 < 1. \tag{1.2}$$

Работа продолжает наши исследования экспоненциальной устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах (см, например, [11, 12, 13, 14, 15]). В [11, 12] рассматривались системы с $C(t) \equiv 0$, в [13, 14] — системы, когда $C(t) \equiv C$ — постоянная матрица, в [15] — системы, когда $C(t)$ — $T$-периодическая матрица. Были указаны условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения и получены оценки экспоненциального убывания решений на бесконечности. Однако во всех перечисленных статьях рассматривались системы вида (1.1) с постоянным запаздыванием $\tau(t) \equiv \tau$.

В данной статье исследуется экспоненциальная устойчивость решений систем вида (1.1) с переменным запаздыванием. Цель настоящей работы — указать условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1.1) и установить оценки экспоненциального убывания решений системы (1.1), при этом мы не требуем информации о спектре оператора монодромии или корнях соответствующих квазимногочленов в случае постоянных коэффициентов.

Для получения условий устойчивости исследователи часто используют функционалы Ляпунова – Красовского (типа Ляпунова) (например, см. библиографию в обзорах [16, 17]). Однако не каждый функционал Ляпунова – Красовского позволяет получать оценки, характеризующие скорость экспоненциального убывания решений на бесконечности. В последние годы исследования в этом направлении активно развиваются. Очень много работ посвящено уравнениям с постоянными коэффициентами, включая уравнения нейтрального типа (например, см. библиографию в [18]). В неавтономном случае наиболее изученными являются системы вида (1.1), когда $C(t)$ — постоянная матрица (см., например, библиографию в [8]). Крайне мало работ, в которых рассматриваются системы с матрицей $C(t)$, не являющейся постоянной ([8, гл. 6], [19, 20, 21], [22, гл. 5]). Однако в этих работах накладываются ограничения вида $\|C(t)\| < 1$. В [15] был предложен функционал Ляпунова – Красовского, который позволил получить условия экспоненциальной устойчивости и оценки решений системы (1.1) без дополнительных ограничений на норму $\|C(t)\|$.

В данной работе мы будем использовать некоторое обобщение функционала из [15] на случай переменного запаздывания. В § 2 мы вводим необходимые обозначения и формулируем основные результаты, их доказательство проводится в § 3.

Автор выражает благодарность профессору Г.В. Демиденко за полезные обсуждения и рецензенту за указанные замечания.

## 2. Основные результаты

Сформулируем основные утверждения. Здесь и далее матричное неравенство $S > 0$ (или $S < 0$) означает, что $S$ — положительно (или отрицательно) определенная эрмитова матрица. Для матриц мы используем спектральную норму.

**Теорема 1.** *Предположим, что существуют матрицы $H(t) \in C^1[0,T]$, $K(s)$, $L(s) \in C^1[0,\tau_2]$:*

$$H(t) = H^*(t), \quad t \in [0,T], \quad H(0) = H(T) > 0, \tag{2.1}$$

$$K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau_2], \tag{2.2}$$

$$L(s) = L^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}L(s) < 0, \quad s \in [0,\tau_2], \tag{2.3}$$

*такие, что матрица*

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) & Q_{13}(t) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) & Q_{23}(t) \\ Q_{13}^*(t) & Q_{23}^*(t) & Q_{33}(t) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

*с элементами*

$$\begin{aligned} &Q_{11}(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0) - A^*(t)L(0)A(t), \\ &Q_{12}(t) = -H(t)B(t) - A^*(t)L(0)B(t), \\ &Q_{13}(t) = -H(t)C(t) - A^*(t)L(0)C(t), \\ &Q_{22}(t) = (1-\tau_4)K(\tau_2) - B^*(t)L(0)B(t), \\ &Q_{23}(t) = -B^*(t)L(0)C(t), \\ &Q_{33}(t) = (1-\tau_3)^{-1}L(\tau_2) - C^*(t)L(0)C(t), \end{aligned} \tag{2.5}$$

*положительно определена при $t \in [0,T]$. Тогда нулевое решение системы (1.1) экспоненциально устойчиво.*

Рассмотрим начальную задачу для системы (1.1)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)), \quad t > 0, \\ &y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau_2, 0], \\ &y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $\varphi(t) \in C^1[-\tau_2, 0]$ — заданная вектор-функция. Ниже мы указываем оценки для решений начальной задачи (2.6), характеризующие скорость экспоненциального убывания при $t \to \infty$.

Для формулировки результатов введем ряд обозначений. Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) < -K(0) - A^*(t)L(0)A(t),$$

т. е. $H(t)$ является решением специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -G(t), \qquad t \in [0,T], \\ &H(0) = H(T) > 0, \end{aligned}$$

где $G(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица с непрерывными элементами. В этом случае из результатов работы [23] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0, T]$. Продолжим эту матрицу $T$-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя эту матрицу $H(t)$ и матрицы $K(s)$, $L(s)$ удовлетворяющие условиям теоремы 1, введем следующие обозначения:

$$V(0,\varphi) = \langle H(0)\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int\limits_{-\tau(0)}^{0} \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle ds$$

$$+ \int\limits_{-\tau(0)}^{0} \left\langle L(-s)\frac{d}{ds}\varphi(s), \frac{d}{ds}\varphi(s)\right\rangle ds, \tag{2.7}$$

$$P(t) = Q_{11}(t) - \Big[Q_{12}(t) - Q_{13}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{23}^*(t)\Big]\Big[Q_{22}(t) - Q_{23}(t)Q_{33}^{-1}Q_{23}^*(t)\Big]^{-1}$$

$$\times\Big[Q_{12}(t) - Q_{13}(t)Q_{33}^{-1}Q_{23}^*(t)\Big]^* - Q_{13}(t)Q_{33}^{-1}Q_{13}^*(t), \tag{2.8}$$

где матрицы $Q_{ij}(t)$ определены в (2.5). Нетрудно показать, что $P(t)$ положительно определена, если $Q(t)$ в (2.4) положительно определена (см. лемму в следующем параграфе). Обозначим через $p_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $P(t)$, через $h_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$.

**Теорема 2.** *Предположим, что выполнены условия теоремы 1. Пусть $k$, $l > 0$ — максимальные числа такие, что*

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leq 0, \quad \frac{d}{ds}L(s) + lL(s) \leq 0, \quad s \in [0, \tau_2]. \tag{2.9}$$

*Тогда для решения задачи (2.6) имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right), \quad t > 0, \tag{2.10}$$

*где*

$$\gamma(t) = \min\left\{\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k, l\right\} > 0.$$

**Замечание.** Существование $k$, $l > 0$ в теореме 2 обеспечивается условиями (2.2), (2.3).

## 3. Доказательство основных результатов

Очевидно, утверждение теоремы 1 непосредственно вытекает из оценки (2.10). Поэтому достаточно доказать теорему 2.

*Доказательство.* Будем следовать схеме рассуждений из работы [11]. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (2.6). Используя матрицы $H(t)$, $K(s)$, $L(s)$, указанные в предыдущем параграфе, рассмотрим на решении следующий функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds. \tag{3.1}$$

Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)=\left\langle \frac{d}{dt}H(t)y(t),y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)\frac{d}{dt}y(t),y(t)\right\rangle+\left\langle H(t)y(t),\frac{d}{dt}y(t)\right\rangle$$

$$+\langle K(0)y(t),y(t)\rangle-\left(1-\frac{d}{dt}\tau(t)\right)\langle K(\tau(t))y(t-\tau(t)),y(t-\tau(t))\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds$$

$$+\left\langle L(0)\frac{d}{dt}y(t),\frac{d}{dt}y(t)\right\rangle-\left(1-\frac{d}{dt}\tau(t)\right)^{-1}\left\langle L(\tau(t))\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)),\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Тогда, учитывая, что $y(t)$ удовлетворяет системе (1.1), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)=\left\langle \frac{d}{dt}H(t)y(t),y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)\left(A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau(t))+C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right),y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)y(t),\left(A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau(t))+C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right)\right\rangle$$

$$+\langle K(0)y(t),y(t)\rangle-\left(1-\frac{d}{dt}\tau(t)\right)\langle K(\tau(t))y(t-\tau(t)),y(t-\tau(t))\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds$$

$$+\left\langle L(0)\left(A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau(t))+C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right),A(t)y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle L(0)\left(A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau(t))+C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right),B(t)y(t-\tau(t))\right\rangle$$

$$+\left\langle L(0)\left(A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau(t))+C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right),C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\rangle$$

$$-\left(1-\frac{d}{dt}\tau(t)\right)^{-1}\left\langle L(\tau(t))\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)),\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

В силу условий (1.2), (2.2) и (2.3) имеем

$$\left(1-\frac{d}{dt}\tau(t)\right)\langle K(\tau(t))y(t-\tau(t)),y(t-\tau(t))\rangle \geq (1-\tau_4)\langle K(\tau_2)y(t-\tau(t)),y(t-\tau(t))\rangle,$$

$$\left(1-\frac{d}{dt}\tau(t)\right)^{-1}\left\langle L(\tau(t))\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)),\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\rangle$$
$$\geq (1-\tau_3)^{-1}\left\langle L(\tau_2)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)),\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\rangle.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\leq -\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\\ \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\\ \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds, \quad (3.2)$$

где матрица $Q(t)$ определена в (2.4).

Для дальнейших преобразований воспользуемся вспомогательной леммой из теории матриц (см., например, [24]).

**Лемма 1.** *Пусть*

$$R(t)=\begin{pmatrix} R_{11}(t) & R_{12}(t) & R_{13}(t)\\ R_{12}^*(t) & R_{22}(t) & R_{23}(t)\\ R_{13}^*(t) & R_{23}^*(t) & R_{33}(t)\end{pmatrix}, \qquad t\in[0,T],$$

*— положительно определенная эрмитова матрица с непрерывными элементами. Тогда имеет место представление*

$$R(t)=\begin{pmatrix} I & \widetilde{R}_1(t)\widetilde{R}_2^{-1}(t) & R_{13}(t)R_{33}^{-1}(t)\\ 0 & I & R_{23}(t)R_{33}^{-1}(t)\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} R_{11}(t)-\widetilde{R}_1(t)\widetilde{R}_2^{-1}(t)\widetilde{R}_1^*(t)-R_{13}(t)R_{33}^{-1}(t)R_{13}^*(t) & 0 & 0\\ 0 & \widetilde{R}_2(t) & 0\\ 0 & 0 & R_{33}(t)\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ \widetilde{R}_2^{-1}(t)\widetilde{R}_1^*(t) & I & 0\\ R_{33}^{-1}(t)R_{13}^*(t) & R_{33}^{-1}(t)R_{23}^*(t) & I\end{pmatrix},$$

*где*

$$\widetilde{R}_1(t)=R_{12}(t)-R_{13}(t)R_{33}^{-1}(t)R_{23}^*(t), \qquad \widetilde{R}_2(t)=R_{22}(t)-R_{23}(t)R_{33}^{-1}(t)R_{23}^*(t),$$

*причем матрицы*

$$R_{11}(t)-\widetilde{R}_1(t)\widetilde{R}_2^{-1}(t)\widetilde{R}_1^*(t)-R_{13}(t)R_{33}^{-1}(t)R_{13}^*(t), \qquad \widetilde{R}_2(t), \quad R_{33}(t)$$

*положительно определены.*

В силу леммы для матрицы $Q(t)$ в (2.4) имеем

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}\right\rangle \ge \langle P(t)y(t), y(t)\rangle,$$

где $P(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица, заданная в (2.8). Тогда

$$\langle P(t)y(t), y(t)\rangle \ge p_{\min}(t)\|y(t)\|^2,$$

где $p_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Следовательно, из (3.2) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\langle p_{\min}(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Очевидно,

$$h_{\min}(t)\|y(t)\|^2 \le \langle H(t)y(t), y(t)\rangle \le \|H(t)\|\,\|y(t)\|^2, \tag{3.3}$$

где $h_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$. Тогда

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\,\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Используя условие (2.9), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\,\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$-k\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\,ds - l\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (3.1) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t) = \min\left\{\dfrac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k, l\right\}$. Из этого дифференциального неравенства имеем оценку

$$V(t,y) \le V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right),$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (2.7). Используя (3.3), с учетом определения функционала (3.1) получаем

$$\|y(t)\|^2 \le \frac{1}{h_{\min}(t)}\,\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \le \frac{V(t,y)}{h_{\min}(t)} \le \frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}\exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right).$$

Отсюда имеем требуемое неравенство (2.10).

Теорема 2 доказана. $\square$

Опираясь на доказательство теоремы 2, можно переформулировать теорему 1 следующим образом.

**Теорема 3.** *Предположим, что существуют матрицы* $H(t) \in C^1[0,T]$, $K(s)$, $L(s) \in C^1[0,\tau_2]$, *удовлетворяющие условиям (2.1)–(2.3) и такие, что*

$$P(t) > 0, \quad Q_{22}(t) - Q_{23}(t)Q_{33}^{-1}Q_{23}^*(t) > 0, \quad Q_{33}(t) > 0$$

*при* $t \in [0,T]$. *Тогда нулевое решение системы (1.1) экспоненциально устойчиво.*

*Доказательство.* В силу леммы, сформулированной при доказательстве теоремы 2, матрица $Q(t)$ в (2.4) положительно определена тогда и только тогда, когда матрицы $P(t)$, $Q_{22}(t) - Q_{23}(t)Q_{33}^{-1}Q_{23}^*(t)$ и $Q_{33}(t)$ положительно определены. □

**Замечание.** Результаты легко обобщаются на случай систем с несколькими запаздываниями

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)y(t-\tau_j(t)) + \sum_{j=1}^{m} C_j(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau_j(t)), \qquad t \geq 0,$$

где $A(t)$, $B_j(t)$, $C_j(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными комплексно-значными $T$-периодическими элементами, $\tau_j(t) \in C^1([0,\infty))$ — функции, определяющие запаздывание,

$$0 < \tau_1 \leq \tau_j(t) \leq \tau_2, \quad \tau_3 \leq \frac{d}{dt}\tau_j(t) \leq \tau_4 < 1, \quad j = 1,\dots,m.$$

Для этого можно использовать функционал Ляпунова – Красовского следующего вида

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t-\tau_j(t)}^{t} \langle K_j(t-s)y(s), y(s)\rangle ds$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t-\tau_j(t)}^{t} \left\langle L_j(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

## References


[1] L.E. El′sgol′ts, S.B. Norkin, *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, New York–London: Academic Press, 1973. Zbl 0287.34073

[2] J.K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, **3**, New York–Heidelberg–Berlin: Springer–Verlag, 1977. Zbl 0352.34001

[3] D.G. Korenevskii, *Stability of Dynamical Systems under Random Perturbations of Parameters. Algebraic Criteria*, Kiev: Naukova Dumka, 1989 (Russian).

[4] N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina, *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations: Methods and Applications*, Contemporary Mathematics and Its Applications, **3**, Cairo: Hindawi Publishing Corporation, 2007. Zbl 1202.34002

[5] V.B. Kolmanovskii, A.D. Myshkis, *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Mathematics and its Applications, **463**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. Zbl 0917.34001

[6] K. Gu, V.L. Kharitonov, J. Chen, *Stability of Time-Delay Systems*, Control Engineering, Boston: Birkhäuser, 2003. Zbl 1039.34067

[7] R.P. Agarwal, L. Berezansky, E. Braverman, A. Domoshnitsky, *Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications*, New York–Berlin: Springer, 2012. Zbl 1253.34002

[8] M.I. Gil'; *Stability of Neutral Functional Differential Equations*, Atlantis Studies in Differential Equations, **3**, Amsterdam: Atlantis Press, 2014. Zbl 1315.34002

[9] Y. Kuang, *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Mathematics in Science and Engineering, **191**, Boston: Academic Press, 1993. Zbl 0777.34002

[10] T. Erneux, *Applied Delay Differential Equations*, Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, **3**, New York: Springer, 2009. Zbl 1201.34002

[11] G.V. Demidenko, I.I. Matveeva, *Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms*, Siberian Math. J., **48**:5 (2007), 824–836. Zbl 1164.34529

[12] I.I. Matveeva, *Estimates of solutions to a class of systems of nonlinear delay differential equations*, J. Appl. Indust. Math., **7**:4 (2013), 557–566. Zbl 1340.34270

[13] G.V. Demidenko, I.I. Matveeva, *On estimates of solutions to systems of differential equations of neutral type with periodic coefficients*, Siberian Math. J., **55**:5 (2014), 866–881. Zbl 1315.34077

[14] G.V. Demidenko, I.I. Matveeva, *Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **2015** (2015), Paper No. 83. Zbl 1349.34296

[15] I.I. Matveeva, *On exponential stability of solutions to periodic neutral-type systems*, Siberian Math. J., **58**:2 (2017), 264–270. Zbl 1376.34062

[16] A.S. Andreev, *The method of Lyapunov functionals in the problem of the stability of functional-differential equations*, Autom. Remote Control, **70**:9 (2009), 1438–1486. Zbl 1182.93096

[17] E. Fridman, *Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems*, European J. Control., **20**:6 (2014), 271–283. Zbl 1403.93158

[18] V.L. Kharitonov, *Time-Delay Systems. Lyapunov Functionals and Matrices*, Control Engineering, New York: Birkhauser/Springer, 2013. Zbl 1285.93071

[19] D.Ya. Khusainov, A.T. Kozhametov, *Convergence of solutions of the neutral type nonautonomous systems*, Russian Math., **50**:1 (2006), 65–69. Zbl 1180.34085

[20] A. Domoshnitsky, M. Gitman, R. Shklyar, *Stability and estimate of solution to uncertain neutral delay systems*, Boundary Value Problems, **2014** (2014), Paper No. 55, 1–14. Zbl 1309.34133

[21] S. Sh. Alaviani, *A necessary and sufficient condition for delay-independent stability of linear time-varying neutral delay systems*, J. Frankl. Inst., **351**:5 (2014), 2574–2581. Zbl 1372.93163

[22] R.K. Romanovskii, L.V. Bel'gart, S.M. Dobrovol'skii, A.V. Rogozin, G.A. Trotsenko, *Method of Lyapunov Functions for Almost Periodic Systems*, Publishing House SB RAS, Novosibirsk, 2015.

[23] G.V. Demidenko, I.I. Matveeva, *On stability of solutions to linear systems with periodic coefficients*, Siberian Math. J., **42**:2 (2001), 282–296. Zbl 0977.34046

[24] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 2013. Zbl 1267.15001

Inessa Izotovna Matveeva
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Novosibirsk State University,
2, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
*E-mail address*: matveeva@math.nsc.ru