S⓮MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 777–785 (2019) УДК 519.17
DOI 10.33048/semi.2019.16.052 MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$

А.А. МАХНЕВ, В.В. БИТКИНА

Abstract. Prime divisors of orders of automorphisms and the fixed point subgraphs of automorphisms of prime orders are studied for a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$. Let $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ is nonsolvable group. If Γ is arc-transitive then G is is an extension of some group P by $PGL_2(11)$, $|P : O_3(P)| = 2$, $|G_a : P_a| = 11$ and $|P : P_a| = 9$.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*).

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathcal{L}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит ровно $s + 1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t + 1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой, и для любого антифлага $(a, l) \in (P, \mathcal{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекаюших l (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф

Makhnev, A.A., Bitkina, V.V., On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$.

Поступила 11 апреля 2019 г., опубликована 8 июня 2019 г.

геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s-1+t(\alpha-1)$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечения графа Γ. Граф называется вершинно симметричным, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве вершин.

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется e-кодом, если минимальное расстояний между двумя вершинами из C не меньше $2e+1$. Для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $|C| \le p^d_{dd} + 2$. В случае равенства код называется максимальным. Для максимального e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $c_d \ge a_d p^d_{dd}$. В случае равенства код называется локально регулярным. Наконец, для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $|C| \le k_d / \sum_{i=0}^{e} p^d_{id} + 1$. В случае равенства код называется совершенным относительно последней окрестности.

Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код C, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности, то по предложению 5 из [1] Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3, c = c_2, p = p^3_{33}$. В первом случае Γ имеет собственное значение $\theta_2 = -1$ и граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{ap}((p+1)a, p)$. Отсюда Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(p+1, a)$.

В случае $c = a-1$ граф Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), (a-1)p, a+1; 1, a-1, ap\}$, собственные значения $\theta_1 = a+p$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = -a$ и $\bar\Gamma_2$ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(p+1, 2a)$.

В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$ ($a = 4, p = 10$). Граф с массивом пересечений $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$ имеет $v = 1+44+440+55 = 540$ вершин и спектр $44^1, 14^{88}, -1^{176}, -4^{275}$. Максимальный порядок клики C из Γ не больше 12. Далее, граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(11, 4)$, $\bar\Gamma_2$ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(11, 8)$.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка*

p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,11\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

(1) *Ω — пустой граф, либо $p=2$, $\alpha_1(g)=0$ и $\alpha_3(g)=180l$, либо $p=3$, $\alpha_3(g)=45l$ и $\alpha_1(g)=54e+9l$, либо $p=5$, $\alpha_3(g)=75l$ и $\alpha_1(g)=90e+15l$;*

(2) *Ω является n-кликой, либо $n=1$, $p=11$, $\alpha_3(g)=165l+55$ и $\alpha_1(g)=198e+33l+44$, либо $n=5$, $p=5$, $\alpha_3(g)=75l-25$ и $\alpha_1(g)=90e+15l-20$;*

(3) *Ω является m-кокликой, Ω состоит из вершин попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, $p=2$, $m \le 12$, $\alpha_3(g)=30l-5m$ и $\alpha_1(g)=28e+6l-4m$;*

(4) *Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик, любые две вершины из разных клик находятся на расстоянии 3 в Γ, либо $p=5$ и порядки максимальных клик в Ω равны 5, либо $p=3$ и порядки максимальных клик в Ω равны 2 или 5, либо $p=2$ и порядки максимальных клик в Ω равны 1, 3 или 5;*

(5) *Ω содержит геодезический 2-путь и $p \le 5$.*

Теорема 2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(540,55,10,5)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,11\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Δ — пустой граф, $p=2$ и $\alpha_1(g)=30s+4$ или $p=5$ и $\alpha_1(g)=75t$;*

(2) *Δ является n-кликой, либо $n=1$, $p=11$ и $\alpha_1(g)=165s+55$, либо $p=2$, $n \in \{4,6,...,12\}$ и $\alpha_1(g)=30t-5n$, либо $p=3$, $n \in \{3,6,...,12\}$ и $\alpha_1(g)=45t-5n$;*

(3) *Δ является m-кокликой, $m>1$, $p=5$, $m \in \{5,10,...,45\}$ и $\alpha_1(g)=75s-4m$;*

(4) *Δ содержит геодезический 2-путь и $p \le 7$.*

Следствие. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{44,30,5;1,3,40\}$. Если неразрешимая группа $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве дуг графа, то G — расширение группы P с помощью $PGL_2(11)$, $|P:O_3(P)|=2$, $|G_a:P_a|=11$ и $|P:P_a|=9$.*

Сначала приведем один вспомогательный результат.

Лемма 1. *[2, теорема 3.2]. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v,k,λ,μ) и вторым собственным значением r. Если g — автоморфизм Γ и $\Delta=\mathrm{Fix}(g)$, то $|\Delta| \le v \cdot \max\{\lambda,\mu\}/(k-r)$.*

По лемме 1 для графа с параметрами $(540,55,10,5)$ получим $|\Delta| \le 540 \cdot 10/45 = 120$.

Лемма 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44,30,5;1,3,40\}$. Тогда для чисел пересечений графа Γ верны равенства*

(1) $p^1_{11}=13$, $p^1_{12}=30$, $p^1_{22}=360$, $p^1_{23}=50$, $p^1_{33}=5$;

(2) $p^2_{11}=3$, $p^2_{12}=36$, $p^2_{13}=5$, $p^2_{22}=358$, $p^2_{23}=45$, $p^2_{33}=5$;

(3) $p^3_{12}=40$, $p^3_{13}=4$, $p^3_{22}=360$, $p^3_{23}=40$, $p^3_{33}=10$.

Доказательство. Следует из [3, лемма 4.1.7]. □

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [4]. При этом гаф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X,\mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа,

R_0 — отношение равенства на X и для $i \leq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$ для чисел пересечений p_{ij}^l.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l. Тогда собственные значения $p_1(0), ..., p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, ..., m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом даёт матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. § 3.7 [4]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

Лемма 3. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 88, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 176, то $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$, $\chi_1(g) = (15\alpha_0(g) + 5\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/90 - 2$ и $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/15 - 4$. Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 88$ и $\chi_2(g) - 176$ делятся на p.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 88 & 28 & -2 & -8 \\ 176 & -4 & -4 & 32 \\ 275 & -25 & 5 & -25 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = (44\alpha_0(g) + 14\alpha_1(g) - \alpha_2(g) - 4\alpha_3(g))/270$. Подставляя $\alpha_2(g) = 540 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (15\alpha_0(g) + 5\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/90 - 2$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (44\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 8\alpha_3(g))/135$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 540 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/15 - 4$.

Остальные утверждения леммы следуют из [5, лемма 2] . □

В леммах 5–6 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(540, 55, 10, 5)$ и спектром $55^1, 10^{176}, -5^{363}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. Ввиду границы Хофмана максимальный порядок клики из Γ не больше $1 - k/\theta_d = 12$, максимальный порядок коклики из Γ не больше $-v\theta_d/(k - \theta_d) = 45$.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Δ — пустой граф, то $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 30s+4$ или $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 75t$;*

(2) *если Δ является n-кликой, то либо $n = 1$, $p = 11$ и $\alpha_1(g) = 165s + 55$, либо $p = 2$, $n \in \{4, 6, ..., 12\}$ и $\alpha_1(g) = 30t - 5n$, либо $p = 3$, $n \in \{3, 6, ..., 12\}$ и $\alpha_1(g) = 45t - 5n$;*

(3) *если Δ является m-кокликой, $m > 1$, то $p = 5$, $m \in \{5, 10, ..., 45\}$ и $\alpha_1(g) = 75s - 4m$;*

(4) *если Δ является объединением изолированных клик, то Δ является кликой или кокликой.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 176 & 32 & -4 \\ 363 & -33 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пусть φ_1 — проекция мономиального представления G на подпространство размерности 176. Тогда $\varphi_1(g) = (44\alpha_0(g) + 8\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/135$. Подставляя $\alpha_2(g) = 540 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\varphi_1(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/15 - 4$.

Пусть Δ — пустой граф. Так как $v = 2^6 \cdot 25$, то p равно 2 или 5. В случае $p = 2$ число $\varphi_1(g) = \alpha_1(g)/15 - 4$ четно и $\alpha_1(g) = 30s + 4$.

В случае $p = 5$ число $\varphi_1(g) = \alpha_1(g)/15 - 4$ сравнимо с 1 по модулю 5 и $\alpha_1(g) = 75t$.

Пусть Δ является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 55 и 539, поэтому $p = 11$, $\varphi_1(g) = (\alpha_1(g) - 55)/15$ и $\alpha_1(g) = 165s + 55$.

Если $n > 1$, то для двух вершин $a, b \in \Delta$ элемент g действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b] - \Delta$, $[a] - b^\perp$ и на $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp)$. Отсюда p делит $12 - n$, 54 и 420, поэтому $p \in \{2, 3\}$.

В случае $p = 2$ имеем $n \in \{4, 6, ..., 12\}$. Далее, число $\varphi_1(g) = (5n + \alpha_1(g))/15 - 4$ четно и $\alpha_1(g) = 30t - 5n$.

В случае $p = 3$ имеем $n \in \{3, 6, ..., 12\}$. Далее, число $\varphi_1(g) = (5n + \alpha_1(g))/15 - 4$ сравнимо с 2 по модулю 3 и $\alpha_1(g) = 45t - 5n$.

Пусть Δ является m-кокликой, $m > 1$. Для двух вершин $a, b \in \Delta$ элемент g действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b]$, $[a] - b^\perp$ и на $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp \cup \Delta)$. Отсюда p делит 5, 50 и $435 - m$, поэтому $p = 5$, $m \in \{5, 10, ..., 45\}$. Далее, число $\varphi_1(g) = (5m + \alpha_1(g))/15 - 4$ сравнимо с 1 по модулю 5 и $\alpha_1(g) = 75s - 4m$.

Пусть Δ содержит ребро и является объединением изолированных клик. Тогда p делит 5 и 54, противоречие. □

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *$[a]$ не содержится в Δ для любой вершины a;*

(2) *Γ не содержит собственных сильно регулярных подграфов с параметрами $(v', k', 10, 5)$;*

(3) *$p \leq 7$.*

Доказательство. Пусть $[a] \subset \Delta$ для некоторой вершины a. Тогда для любой вершины $u \in \Gamma_2(a) - \Delta$ орбита $u^{\langle g \rangle}$ является кокликой и $a^\perp = \Delta$. Далее, $\varphi_1(g) = \alpha_0(g)/3 - 4 = 56/3 - 4$, противоречие.

Допустим, что Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Σ с параметрами $(v', k', 10, 5)$. Тогда $4(k' - 5) + 5^2 = n^2$, поэтому $n = 2l + 1$, $k' = l^2 + l - 1$, $l \leq 7$, Σ имеет неглавные собственные значения $l - 2, -l - 3$ и кратность $l - 2$ равна $(l+2)(l^2+l-1)(l^2+2l+2)/(10l+5)$. Отсюда $2l+1$ делит $3 \cdot 5 \cdot 11$ и $l = 5, 7$. Но в случае $l = 5$ число 5 не делит $(l+2)(l^2+l-1)(l^2+2l+2)$, противоречие.

Если $p \geq 11$, то Δ — сильно регулярный подграф с параметрами $(v', k', 10, 5)$, противоречие.

$\square$

Теорема 2 следует из лемм 5–6.

В леммах 7–8 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 2$, $\alpha_1(g) = 0$ и $\alpha_3(g) = 180l$, либо $p = 3$, $\alpha_3(g) = 45l$ и $\alpha_1(g) = 54e + 9l$, либо $p = 5$, $\alpha_3(g) = 75l$ и $\alpha_1(g) = 90e + 15l$;*

(2) *если Ω является n-кликой, то либо $n = 1$, $p = 11$, $\alpha_3(g) = 165l + 55$ и $\alpha_1(g) = 198e + 33l + 44$, либо $n = 5$, $p = 5$, $\alpha_3(g) = 75l - 25$ и $\alpha_1(g) = 90e + 15l - 20$;*

(3) *если Ω является m-кокликой, то Ω состоит из вершин попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, $p = 2$, $m \leq 12$, $\alpha_3(g) = 30l - 5m$ и $\alpha_1(g) = 28e + 6l - 4m$;*

(4) *если Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик, то любые две вершины из разных клик находятся на расстоянии 3 в Γ, либо $p = 5$ и порядки максимальных клик в Ω равны 5, либо $p = 3$ и порядки максимальных клик в Ω равны 2 или 5, либо $p = 2$ и порядки максимальных клик в Ω равны 1, 3 или 5.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $v = 540$, то p равно 2, 3 или 5.

Пусть $p = 2$. Так как $p^1_{11} = 13$, то $\alpha_1(g) = 0$. Далее, число $\chi_1(g) = -\alpha_3(g)/90 - 2$ четно, поэтому $\alpha_3(g) = 180l$.

Пусть $p = 3$. Тогда число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/15 - 4$ сранимо с 2 по модулю 3 и $\alpha_3(g) = 45l$. Далее, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 9l)/18 - 2$ сранимо с 1 по модулю 3, то $\alpha_1(g) = 54e + 9l$.

Пусть $p = 5$. Тогда число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/15 - 4$ сранимо с 1 по модулю 5 и $\alpha_3(g) = 75l$. Далее, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 15l)/18 - 2$ сранимо с 3 по модулю 5, то $\alpha_1(g) = 90e + 15l$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 44 и 529, поэтому $p = 11$. Имеем $\chi_2(g) = (\alpha_3(g) - 55)/15$ и $\alpha_3(g) = 165l + 55$. Далее, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 33l - 44))/18$, поэтому $\alpha_1(g) = 198e + 33l + 44$.

Если $n > 1$, то p делит $15 - n$, 30 и 55, поэтому $p = 5$ и $n = 5$. Далее, число $\chi_2(g) = (25 + \alpha_3(g))/15 - 4$ сранимо с 1 по модулю 5 и $\alpha_3(g) = 75l - 25$. Аналогично, число $\chi_1(g) = (15 + \alpha_1(g) - (15l - 5))/18 - 2$ сранимо с 3 по модулю 5 и $\alpha_1(g) = 90e + 15l - 20$.

Пусть Ω является m-кокликой.

Если Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3, то $m \leq 12$. Так как $p^3_{13} = 4$, $p^3_{33} = 10$, то $p = 2$ делит $12 - m$. Число $\chi_2(g) = (5m + \alpha_3(g))/15 - 4$ четно и $\alpha_3(g) = 30l - 5m$. Далее, число $\chi_1(g) = (3m + \alpha_1(g) - (6l - m))/14 - 2$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 28e + 6l - 4m$.

Пусть Ω содержит вершины a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Тогда $c_2 = 3$ влечет $p = 3$, а $b_2 = 5$ дает противоречие.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик. Если Ω содержит вершины a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ, то $c_2 = 3$ влечет $p = 3$, а $b_2 = 5$ влечет, что $[b] \cap \Gamma_3(a)$ содержит 2 или 5 вершин из Ω.

Далее, $a_2 = 36$ влечет, что $[b] \cap \Gamma_2(a)$ содержит кратное 3 число вершин из Ω. С другой стороны, $a_3 = 4$ дает противоречие.

Итак, любые две вершины из разных клик находятся на расстоянии 3 в Γ, $p^3_{13} = 4$ влечет, что порядки максимальных клик в Ω не больше 5. Итак, либо $p = 5$, либо $p = 3$ и порядки максимальных клик в Ω равны 2 или 5, либо $p = 2$ и порядки максимальных клик в Ω равны 1, 3 или 5. $\square$

Лемма 7. *Если Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c, то $p \leq 5$.*

Доказательство. Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c и $p = 7$. Тогда $\Gamma_3(a) \cap \Gamma_3(b)$ содержит не менее 6 вершин из Ω. Пусть $z \in \Gamma_3(a) \cap \Omega$. По лемме 6 подграф $\Sigma = \Gamma_3(z)$ не содержится в Ω. Заметим, что $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = |\Gamma_2(z) \cap \Omega|$, поэтому степени вершин a, z в Ω равны. Так как $p^3_{13} = 5$, то степени вершин a, b в Ω равны. Итак, Ω — регулярный граф.

Пусть $\Omega(a)$ содержит γ вершин степени 13. Если степень вершины a в Ω равна 19, то число ребер между $\Gamma_2(a) \cap \Omega$ и $\Gamma_3(a) \cap \Omega$ равно $5|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = 15|\Gamma_3(a) \cap \Omega|$. Отсюда $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = 5\gamma/3 + 4(19 - \gamma)$. Далее, число $|\Gamma_2(a) - \Omega| = 440 - (5\gamma/3 + 4(19 - \gamma) = 516 - 17\gamma/3$ делится на 7 и $\gamma = 12$. В этом случае $|\Gamma_3(a) \cap \Omega| = 16$ и $|\Gamma_3(a) - \Omega/$ не делится на 7, противречие.

Если степень вершины a в Ω равна β и не равна 19, то $|\Gamma_3(a) \cap \Omega| = 20$ и число ребер между $\Gamma_2(a) \cap \Omega$ и $\Gamma_3(a) \cap \Omega$ равно $5|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = 20(\beta - 4)$. Далее, число $|\Gamma_2(a) - \Omega| = 456 - 4\beta$ делится на 7 и β сравнимо с 2 по модулю 7. С другой стороны, $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = 4(\beta - 4) = 5\gamma/3 + 4(\beta - \gamma)$ и $7\gamma/3 = 16$, противоречие. Лемма доказана. $\square$

Из лемм 7-8 следует теорема 1.

До конца работы будем предполагать, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$ и неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве дуг графа. Для смежных вершины $a, b \in \Gamma$ получим $|G : G_a| = 540$, $|G_a : G_{a,b}| = 44$. Ввиду теоремы 1 имеем $p \in \{2, 3, 5, 11\}$. Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$.

Лемма 8. *Если f — элемент порядка 11 из G, g — элемент простого порядка $p < 7$ из $C_G(f)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, то $\mathrm{Fix}(f) = \{a\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω является 12-кокликой, состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 132, 440$;*

(2) *Ω содержит геодезический 2-путь, либо $p \leq 3$, либо $p = 5$, $[a]$ содержится в Ω, $\Gamma_3(a)$ является $\langle fg \rangle$-орбитой, $|\Omega| = 45$, $\alpha_1(g) = 495$ или $|\Omega| = 100$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 330$.*

Доказательство. Ввиду теоремы 1 имеем $\mathrm{Fix}(f) = \{a\}$, $\alpha_3(f) = 165l + 55$ и $\alpha_1(f) = 198e + 33l + 44$.

Так как $|\Omega| - 1$ делится на 11, то по теореме 1 либо Ω является 12-кокликой, Ω состоит из вершин попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, $p = 2$, $\alpha_3(g) = 30l - 60 = 0$ и $\alpha_1(g) = 28e + 6l - 48$ делится на 11, либо Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leq 5$.

В первом случае $l = 2$ и $4(7e - 9)$ делится на 11. Отсюда $e = 6, 17$ и $\alpha_1(g) = 132, 440$.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь. Если $p = 5$, то $[a]$ содержится в Ω, $\Gamma_3(a)$ является $\langle fg \rangle$-орбитой и $\Gamma_3(a)$ — объединение 11 изолированных 5-клик.

Если $|\Omega| = 45$, то число $\chi_2(g) = (225+\alpha_3(g))/15-4$ сравнимо с 1 по модулю 5 и $\alpha_3(g) = 75l = 0$. Далее, число $\chi_1(g) = (135+\alpha_1(g))/14-2$ сравнимо с 3 по модулю 5 и $\alpha_1(g) = 5(14e+1)$ делится на 11. Отсюда $\alpha_1(g) = 495$ и любая $\langle g\rangle$-орбита длины 5 является кликой.

Если $|\Omega| = 100$, то число $\chi_2(g) = (500+\alpha_3(g))/15-4$ сравнимо с 1 по модулю 5 и $\alpha_3(g) = 75l = 0$. Далее, число $\chi_1(g) = (300+\alpha_1(g))/14-2$ сравнимо с 3 по модулю 5 и $\alpha_1(g) = 10(7e-30)$ делится на 11. Отсюда $\alpha_1(g) = 330$. □

Лемма 9. *Если* 11 *делит* $|\bar{T}|$, *то выполняются следующие утверждения:*

(1) *группа* $\bar{T}$ *изоморфна* $L_2(11)$, M_{11}, M_{12} *или* $U_5(2)$;

(2) *либо группа* $\bar{T}$ *изоморфна* $L_2(11)$, *группа* $\bar{T}_a$ *имеет индекс* 12 *или* 60 *в* $\bar{T}$, *либо группа* $\bar{T}$ *изоморфна* M_{11}, *группа* $\bar{T}_a$ *имеет индекс* 12 *в* $\bar{T}$, *либо группа* $\bar{T}$ *изоморфна* M_{12}, *группа* $\bar{T}_a$ *имеет индекс* 12 *в* $\bar{T}$;

(3) 5 *делит* $|\bar{T} : \bar{T}_a|$.

Доказательство. Если 11 делит $|\bar{T}|$, то ввиду таблицы 1 из [6] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(11)$, M_{11}, M_{12} или $U_5(2)$.

Так как $\bar{T}$ содержит подгруппу индекса, делящего 540, то либо группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(11)$, группа $\bar{T}_a$ имеет индекс 12 или 60 в $\bar{T}$, либо группа $\bar{T}$ изоморфна M_{11}, группа $\bar{T}_a$ имеет индекс 12 в $\bar{T}$, либо группа $\bar{T}$ изоморфна M_{12}, группа $\bar{T}_a$ имеет индекс 12 в $\bar{T}$.

Если 5 не делит $|\bar{T} : \bar{T}_a|$, P — силовская 5-подгруппа из $S(G)$, то $|P : P_a| = 5$, противоречие с леммой 9. Лемма доказана.

Если 11 делит $|\bar{T}|$, то ввиду леммы 10 имеем $|S(G) : S(G)_a| = 9$. Так как $S(G)$ не содержит нормальных в G подгрупп из G_a, то $|S(G) : O_3(G)|$ делит 2. Из транзитивности действия G_a на $[a]$ следует, что $|S(G) : O_3(G)| = 2$, группа $G/S(G)$ изоморфна $PGL_2(11)$ и заключение следствия выполняется. □

Лемма 10. *Если 11 не делит* $|\bar{T}|$, f *— элемент порядка* 11 *из* G_a, *то* $G) = S(G)G_a$ *и группа* $\bar{T}$ *изоморфна* A_5, A_6 *или* $U_4(2)$.

Доказательство. Если 11 не делит $|\bar{T}|$, то $G) = S(G)G_a$ и ввиду таблицы 1 из [6] группа $\bar{T}$ изоморфна A_5, A_6 или $U_4(2)$. Лемма доказана. □

Завершим доказательство следствия. Если 11 не делит $|\bar{T}|$, то из действия $N_G(\langle f\rangle)$ на $[a]$ следует, что последний член ряда коммутантов N_0 группы $N_G(\langle f\rangle)$ поточечно фиксирует $[a]$. Противоречие с действием N_0 на $\Gamma_3(a)\cap\Gamma_3(b)$. Следствие доказано.

References

[1] A. Jurishich , J. Vidali, *Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3*, Des. Codes Cryptogr., **65**:1–2 (2012), 29–47. Zbl 1245.05036

[2] M. Behbahani, C. Lam, *Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms*, Discrete Math., **311** (2011), 132–144. Zbl 1225.05248

[3] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1989. Zbl 0747.05073

[4] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts **45**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. Zbl 0922.20003

[5] A.L. Gavrilyuk, A.A. Makhnev, *On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Doklady Mathematics, **81**:3 (2010), 439–442. Zbl 1250.05059

[6] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Sibirean electr. Math. Reports, **6** (2009), 1–12. Zbl 1289.20021

Alexandr Alekseevich Makhnev
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Meckhanics,
16, S. Kovalevskoy str.,
Ekaterinburg, 620990, Russia
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin,
19, Mira str.,
Ekaterinburg, 620002, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

Viktoriya Vasil'evna Bitkina
North Ossetian State University after Kosta Levanovich Khetagurov,
46, Vatutina stk.,
Vladikavkaz, 362025, Russia
E-mail address: bviktoriyav@mail.ru