S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 786–811 (2019) УДК 517.958
DOI 10.33048/semi.2019.16.053 MSC 35L20,35R30,35Q99

ОДНОМЕРНЫЕ ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Ж.Д. ТОТИЕВА

Abstract. We consider the problem of finding the moduli of elasticity $c_{11}(x_3)$, $c_{12}(x_3)$, $c_{44}(x_3)$, $x_3 > 0$, occurring in the system of integro-differential viscoelasticity equations for gomogenious anisotropic medium. The density of medium is contant. The matrix kernel $k(t) = diag(k_1, k_2, k_3)(t)$, $t \in [0, T]$ is known. As additional information is the Fourier transform of the first and third component of the displacements vector for $x_3 = 0$. The results are the theorems on the existence of a unique solution of the inverse problems and the theorems of stability.

Keywords: inverse problem, stability, moduli of elasticity, delta function, kernel.

1. Введение

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений вязкоупруго-сти:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $\rho > 0$ — постоянная плотность среды, $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ — вектор смещений, в вязкоупругих анизотропных средах для

Totieva, Zh.D., One-dimensional inverse coefficient problems of anisotropic viscoelasticity.

Поступила 25 ноября 2018 г., опубликована 11 июня 2019г.

тензора напряжений имеет место представление:

$$T_{ij} = \sum_{m,l=1}^{3} c_{ijkl}[S_{ml} + \int_0^t k_i(t-\tau)S_{ml}(x,\tau)d\tau], \ i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3, \tag{1.2}$$

$$S_{ml} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_m}\right), \ m = 1,2,3, \quad l = 1,2,3,$$

$c_{ijml} = c_{ijml}(x)$ — модули упругости, $k(t) = diag(k_1, k_2, k_3)(t)$ — матричная релаксационная функция.

Положим $c_{ijml} = c_{jiml} = c_{ijlm} = c_{mlij}$. Симметричность тензора напряжений уменьшает число независимых модулей упругости с 81 до 21. Если принять, что $c_{\alpha\beta} = c_{ijkl}$, где $\alpha = (ij)$ и $\beta = (kl)$, в соответствии с обозначениями $(11) \to 1$, $(22) \to 2$, $(33) \to 3$, $(23) = (32) \to 4$, $(13) = (31) \to 5$, $(12) = (21) \to 6$, то матрице независимых модулей упругости можно придать вид симметрической матрицы порядка 6×6, поскольку в паре индексов (i,j) порядок не играет роли и существует только шесть различных парных комбинаций. Будем рассматривать анизотропные среды с матрицей независимых модулей упругости следующего вида:

$$c_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} \end{matrix} & \mathrm{O}_{(3\times 3)} \\ \mathrm{O}_{(3\times 3)} & \begin{matrix} c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{matrix} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Обратные задачи для системы уравнений упругости рассматривались многими авторами. Подробный обзор источников, имеющихся в российской и зарубежной литературе до 1990 года приведен в монографии [1], в которой приводятся результаты об однозначной разрешимости, оценки устойчивости, численные методы построения решения для целого ряда постановок обратных задач изотропной и анизотропной упругости. Полученные результаты служат основой теории обратных задач для анизотропных упругих сред с импульсными направленными воздействиями на границу сред. Продолжение данных исследований нашло отражение в статье [2]. В ней рассматриваются прямые и обратные коэффициентные задачи анизотропной электроупругой среды кубической структуры: определяются модули упругости и пьезоэлектрический модуль по некоторой информации о решении прямых задач. Отметим также работы [3-5], в которых решаются задачи по определению параметров Ламэ для уравнений изотропной упругости, а также по определению модулей упругости и пьезомодуля (поляризованная керамика) анизотропной электроупругости.

Коэффициентные обратные задачи для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругости рассматривались, например, в работах [6-11]. В частности, отметим [6], где для системы уравнений вязкоупругости с граничным условием Неймана специального вида решается обратная задача определения четырех неизвестных: плотности $\rho(x_3)$, коэффициентов Ламэ $\lambda(x_3)$, $\mu(x_3)$, ядра $K(t)$ при $x_3 > 0$, $t \geq 0$. Показывается, что исходная задача сводится сначала к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода относительно $K(t)$, а затем к обратным задачам для скалярных гиперболических уравнений, содержащих $\rho(x_3)$, $\lambda(x_3)$, $\mu(x_3)$. Доказываются теоремы существования, единственности и устойчивости решения обратной задачи. В работе [9] рассматривается задача определения плотности $\rho(x_2, x_3)$, $x_3 > 0$, входящей в систему интегро-дифференциальных уравнений изотропной вязкоупругости, в которой параметры Ламэ зависят только от одной пространственной переменной. Ядро интегрального оператора считается известной функцией. В качестве дополнительной информации задается преобразование Фурье первой компоненты вектор-функции смещения при $x_3 = 0$. Результатами исследования являются теоремы о существовании единственного решения обратной задачи и теорема об устойчивости. Список литературы работы [9] содержит достаточное количество публикаций по обратным задачам вязкоупругости.

Авторами исследований [12-18] решены задачи по определению функций памяти среды — одномерных и многомерных ядер систем интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругости. Это лишь часть результатов за последние годы, наиболее близкая к теме исследования.

Целью представленной работы является решение обратной задачи определения модулей упругости среды для системы дифференциальных уравнений анизотропной вязкоупругости по некоторой информации о решении прямой задачи. В качестве источника распространения волн используется дельта-функция Дирака, задаваемая на границе рассматриваемой пространственной области.

Актуальность работы следует из необходимости более точного исследования математическими методами процессов распространения упругих волн. В частности, представленная математическая модель анизотропной упругой среды учитывает предысторию процесса или память среды.

2. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим при $x = (x_1,\ x_2,\ x_3) \in R^3,\ t \in R,\ x_3 > 0$ систему интегро-дифференциальных уравнений динамической вязкоупругости

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.1}$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$u_j \mid_{t<0} \equiv 0, \tag{2.2}$$

$$T_{j3}|_{x_3=+0} = f_j(x_1, x_2, t),\ j = 1, 2, 3. \tag{2.3}$$

Далее предполагаем, что модули упругости c_{11}, c_{12}, c_{44} являются функциями только одной переменной x_3, вектор-функция (c_{11}, c_{12}, c_{44}) принадлежит классу Λ,

$$\Lambda = \Big\{(c_{11}(x_3), c_{12}(x_3), c_{44}(x_3)) : c_{11} > 0,\ c_{44} > 0,\ c_{11} > c_{12},\ c_{11} + 2c_{12} > 0,$$

$$c_{11},\ c_{44} \in C^2(R_+),\ c_{12} \in C(R_+)\Big\},\ R_+ = [0, \infty),$$

$k_i(t) \in C^2(R_+),\ i = 1, 2, 3$. Не ограничивая общности предположим, что $k_i(0) = 0,\ {k_i}'(0) = 0,\ i = 1, 2, 3$. Эти условия в дальнейшем сильно упрощают громоздкие вычисления, но никак не влияют на суть метода исследования.

Определим биллинейный интегральный оператор L по формуле:

$$L[k(t), u(x,t)] = u(x,t) + \int_0^t k(t-\tau)u(x,\tau)d\tau$$

(здесь $k(t)$, $u(x,t)$ – скалярные функции).

В дальнейшем для сокращения записи иногда не будем в операторе L указывать зависимость функций от переменных, подразумевая зависимость первой - от t, а второй — от x, t.

Равенства (2.1)–(2.3) для анизотропных сред с матрицей (1.3) могут переписаны в следующем виде:

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = L\Big[K_1, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) + c_{12}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + c_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}$$
$$+ (c_{12}+c_{44})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\Big], \tag{2.4}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = L\Big[K_2, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + c_{12}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + c_{11}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$$
$$+ (c_{12}+c_{44})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}\Big], \tag{2.5}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = L\Big[K_3, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{11}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + c_{44}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\Big], \tag{2.6}$$

$$L\left[K_1, c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + c_{44}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right]\Big|_{x_3=+0} = f_1(x_1,t), \tag{2.7}$$

$$L\left[K_2, c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + c_{44}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right]\Big|_{x_3=+0} = f_2(x_1,t), \tag{2.8}$$

$$\left(L\left[K_3, c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{11}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]\right)\Big|_{x_3=+0} = f_3(x_1,t), \tag{2.9}$$

$$u_i\mid_{t<0} \equiv 0, \quad i = 1,2,3. \tag{2.10}$$

Определение 1. *Задачу определения вектора смещения $u(x,t)$, удовлетворяющих (в обобщенном смысле) равенствам (2.1)–(2.3) при заданных функциях $c_{11}(x_3)$, $c_{12}(x_3)$, $c_{44}(x_3)$, $k_j(t)$, $f_j(x_1,t)$, $j = 1,2,3$, будем называть* **прямой задачей**.

Рассмотрим случай, когда в (2.7)–(2.9)

$$f_j \equiv -\frac{1}{2}\delta(t)\delta(x_1),\ j = 1,2,3,$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

Замечание 1. В этом случае решение прямой задачи u не будет зависит от x_2, так как коэффициенты уравнений и граничные условия в системе (2.4)–(2.10) не зависят от переменной x_2 [19].

Запишем соотношения (2.4)–(2.10) в терминах преобразования Фурье по переменной x_1:

$$\rho\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = L\Big[K_1, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right) + i\nu c_{12}\frac{\partial U_3}{\partial x_3} + i\nu\frac{\partial}{\partial x_3}(c_{44}U_3) - \nu^2 c_{11}U_1\Big], \quad (2.11)$$

$$\rho\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = L\Big[K_2, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right) - \nu^2 c_{44}U_2\Big], \quad (2.12)$$

$$\rho\frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = L\Big[K_3, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{11}\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right) + i\nu c_{44}\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + i\nu\frac{\partial}{\partial x_3}(c_{12}U_1) - \nu^2 c_{44}U_3\Big], \quad (2.13)$$

$$L\left[K_1, ic_{44}\nu U_3 + c_{44}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right]|_{x_3=+0} = F_1(\nu, t), \quad (2.14)$$

$$L\left[K_2, c_{44}\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right]|_{x_3=+0} = F_2(\nu, t), \quad (2.15)$$

$$L\left[K_3, i\nu c_{12}U_1 + c_{11}\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right]|_{x_3=+0} = F_3(\nu, t), \quad (2.16)$$

$$U_j\,|_{t<0} \equiv 0, \quad j = 1, 2, 3; \quad (2.17)$$

где

$$U_j(x_3, t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_3, t)\exp(i\nu x_1)d\,x_1, \ j = 1, 2, 3,$$

$$F_j(t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x_1, t)\exp(i\nu x_1)d\,x_1, \ j = 1, 2, 3,$$

ν — параметр, функции $U_j \in C^1(R; C(\tilde{D}))$, $\tilde{D} = \{(x_3, t) : x_3 \geq 0, \ 0 \leq t \leq T\}$, $T > 0$.

Систему (2.11)–(2.17) можно рассматривать в совокупности двух подсистем. Первая включает равенства (2.11), (2.13), (2.14), (2.16), (2.17) и определяет функции U_1 и U_3. Вторая подсистема (2.12), (2.15), (2.17) определяет функцию U_2.

Предметом настоящего исследования является **обратная задача** определения модулей упругости $c_{44}(x_3)$, $c_{11}(x_3)$, $c_{12}(x_3)$, $x_3 > 0$ (именно в этой последовательности они будут определяться), входящих в равенства (2.1) посредством формулы (1.2), если относительно компонент U_j, $j = 1, 3$ решения прямой задачи известна дополнительная информация при $t > 0$

$$U_1(x_3, t, \nu)\,|_{x_3=+0,\nu=+0} = g_1(t), \quad (2.18)$$

$$U_3(x_3, t, \nu)\,|_{x_3=+0,\nu=+0} = g_3(t), \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \nu}(x_3, t, \nu)\,|_{x_3=+0,\nu=+0} = g_2(t), \quad (2.20)$$

где $g_j(t)$, $j = 1, 2, 3$ – заданные функции.

Решение обратной задачи может быть сведено к последовательному решению некоторых вспомогательных обратных задач для скалярных гиперболических уравнений.

Из равенств (2.11), (2.14), (2.17), (2.18) для функции

$$U_1^0(x_3, t) = U_1(x_3, t, \nu)\,|_{\nu=+0}$$

получаем

$$\rho \frac{\partial^2 U_1^0}{\partial t^2} = L\Big[k_1, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial U_1^0}{\partial x_3}\right)\Big],\ x_3 > 0, \tag{2.21}$$

$$U_1^0 \mid_{t<0} \equiv 0, \tag{2.22}$$

$$L\left[k_1, c_{44}\frac{\partial U_1^0}{\partial x_3}\right] \mid_{x_3=+0} = -\frac{1}{2}\delta(t), \tag{2.23}$$

$$U_1^0 \mid_{x_3=0} = g_1(t). \tag{2.24}$$

Эти равенства позволяют рассмотреть следующую обратную задачу.

Обратная задача 1. Найти функцию $c_{44}(x_3) > 0$ из класса $C^2(R_+)$, входящую в дифференциальное уравнение (2.21), такую, что решение задачи (2.21)–(2.23) удовлетворяет равенству (2.24), где $g_1(t),\ k_1(t),\ t \in [0,T]$ – известные функции, ρ — заданная положительная постоянная.

Из соотношений (2.13), (2.16), (2.17), (2.19) для функции

$$U_3^0(x_3,t) = U_3(x_3,t,\nu) \mid_{\nu=+0}$$

получаем

$$\rho \frac{\partial^2 U_3^0}{\partial t^2} = L\Big[k_3, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{11}\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3}\right)\Big],\ x_3 > 0, \tag{2.25}$$

$$U_3^0 \mid_{t<0} \equiv 0, \tag{2.26}$$

$$L\left[k_3, c_{11}\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3}\right] \mid_{x_3=+0} = -\frac{1}{2}\delta(t), \tag{2.27}$$

$$U_3^0 \mid_{x_3=0} = g_3(t). \tag{2.28}$$

Обратная задача 2. Найти функцию $c_{11}(x_3) > 0$ из класса $C^2(R_+)$, входящую в дифференциальное уравнение (2.25), такую, что решение задачи (2.25)–(2.27) удовлетворяет равенству (2.28), где $g_3(t),\ k_3(t),\ t \in [0,T]$ – известные функции, ρ — заданная положительная постоянная.

Из соотношений (2.12), (2.15), (2.17), (2.20) для функции

$$U_1^1(x_3,t) = \frac{\partial}{\partial \nu}U_1(x_3,t,\nu) \mid_{\nu=+0}$$

получаем

$$\rho \frac{\partial^2 U_1^1}{\partial t^2} = L\Big[k_1, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial U_1^1}{\partial x_3}\right) + ic_{12}\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3} + i\frac{\partial}{\partial x_3}(c_{44}U_3^0)\Big],\ x_3 > 0, \tag{2.29}$$

$$U_1^1 \mid_{t<0} \equiv 0, \tag{2.30}$$

$$L\left[k_1, c_{44}\frac{\partial U_1^1}{\partial x_3} + ic_{44}U_3^0\right] \mid_{x_3=+0} = 0, \tag{2.31}$$

$$U_1^1 \mid_{x_3=0} = g_2(t). \tag{2.32}$$

Обратная задача 3. Найти функцию $c_{12}(x_3)$ из класса $C(R_+)$, входящую в дифференциальное уравнение (2.29), такую, что решение задачи (2.29)–(2.31) удовлетворяет равенству (2.32), где $g_2(t),\ k_1(t),\ t \in [0,T]$ – известные функции, ρ — заданная положительная постоянная, $c_{44},\ c_{11}$ – функции, определенные посредством решения обратных задач 1 и 2, а $U_3^0(x_3,t)$ – решение задачи (2.25)–(2.27). Введем в рассмотрение новые переменные $y,\ z$ по формулам

$$y=\psi_1(x_3):=\int_0^{x_3}\sqrt{\frac{\rho}{c_{44}(\xi)}}d\xi,\quad z=\psi_2(x_3):=\int_0^{x_3}\sqrt{\frac{\rho}{c_{11}(\xi)}}d\xi.$$

Через $\psi_i^{-1}(\cdot),\ i=1,2$, обозначим функцию, обратную к $\psi_i(x_3)$.

Пусть h_0,h_1,T,X – фиксированные положительные числа, $h_0<h_1, X=\frac{T}{2}\sqrt{\frac{h_1}{\rho}}$. Пусть $\Lambda_1(h_0,h_1,X)=\{c(x_3)\in C^2[0,X]:\|c\|_{C^2[0,X]}\le h_1,\ c(x_3)\ge h_0\}$.

Теорема 1. *Пусть T – фиксированное положительное число. Функция $g_1(t)\in C^2[0,T],\ g_1(+0)>0,\ k_1(t)\in C^2[0,T]$. Тогда существует единственное решение обратной задачи 1 $c_{44}(x_3)\in C^2[0,X],\ X\le\psi_1^{-1}(T/2)$.*

Теорема 2. *Пусть T,h_0,h_1 – фиксированные положительные числа, $h_0\le h_1,\ X_0=\frac{T}{2}\sqrt{\frac{h_0}{\rho}}$ и функции $c_{44}^{(1)}(x_3),\ c_{44}^{(2)}(x_3)$, принадлежащие классу $\Lambda_1(h_0,$ $h_1,\ X)$, являются решениями обратной задачи 1 с наборами данных $\{g_1^{(1)}(t),$ $k_1^{(1)}(t)\},\ \{g_1^{(2)}(t),k_1^{(2)}(t)\}$ соответственно. Тогда найдется такое положительное число $C=C(h_0,\ h_1,\ M_1,\ \rho,\ T),\ M_1=\max\{\|g_1^{(1)}(t)\|_{C^2[0,T]},\ \|k_1^{(1)}(t)\|_{C^2[0,T]},$ $\|g_1^{(2)}(t)\|_{C^2[0,T]},\ \|k_1^{(2)}(t)\|_{C^2[0,T]}\}$, что справедлива оценка устойчивости*

$$\|c_{44}^{(1)}-c_{44}^{(2)}\|_{C[0,X_0]})\le C\left(\|g_1^{(1)}-g_1^{(2)}\|_{C^2[0,T]}+\|k_1^{(1)}-k_1^{(2)}\|_{C^2[0,T]}\right). \tag{2.33}$$

Введем обозначения $\|\cdot\|(T)=\|\cdot\|_{C[0,T]}),\ \|\cdot\|_k(T)=\|\cdot\|_{C^k[0,T]},\ k=1,2,...$

Теорема 3. *Пусть T – фиксированное положительное число. Функция $g_3(t)\in C^2[0,T],\ g_3(+0)>0,\ k_3(t)\in C^2[0,T]$. Тогда существует единственное решение обратной задачи 2 $c_{11}(x_3)\in C^2[0,X],\ X\le\psi_2^{-1}(T/2)$.*

Теорема 4. *Пусть T,h_0,h_1 – фиксированные положительные числа, $h_0\le h_1$, $X_0=\frac{T}{2}\sqrt{\frac{h_0}{\rho}}$ и $c_{11}^{(1)}(x_3),c_{11}^{(2)}(x_3)$, принадлежащие классу $\Lambda_1(h_0,\ h_1,\ X)$, являются решениями обратной задачи 1 с наборами данных $\{g_3^{(1)}(t),\ k_3^{(2)}(t)\},\ \{g_3^{(1)}(t),$ $k_3^{(2)}(t)\}$ соответственно. Тогда найдется такое положительное число $C^*=C^*(h_0,\ h_1,\ M_2,\ \rho,\ T),\ M_2=\max\{\|g_3^{(1)}(t)\|_2(T),\ \|k_3^{(1)}(t)\|_2(T),\ \|g_3^{(2)}(t)\|_2(T),$ $\|k_3^{(2)}(t)\|_2(T)\}$, что справедлива оценка устойчивости*

$$\|c_{11}^{(1)}-c_{11}^{(2)}\|(X_0)\le C^*\left(\|g_3^{(1)}-g_3^{(2)}\|_2(T)+\|k_3^{(1)}-k_3^{(2)}\|_2(T)\right). \tag{2.34}$$

Теорема 5. *Пусть T – фиксированное положительное число, $X=\frac{T}{2}\sqrt{\frac{h_1}{\rho}}$. Функции $g_2(t)\in C^1[0,T],\ k_1(t)\in C^2[0,T],\ g_2(+0)=0,\ k_3(t)\equiv 0$. Кроме того, справливо следующее неравенство:*

$$\max\left[-g_2'(+0),2g_2'(+0)\right]<\frac{g_1(+0)}{2\rho[g_1(+0)+g_3(+0)]}.$$

Тогда существует единственное решение обратной задачи 3 $c_{12}(x_3)\in C[0,X]$.

Теорема 6. *Пусть T,h_0,h_1 – фиксированные положительные числа, $h_0\le h_1,\ X_0=\frac{T}{2}\sqrt{\frac{h_0}{\rho}},\ k_3(t)\equiv 0$ и $c_{12}^{(1)}(x_3),\ c_{12}^{(2)}(x_3)$, принадлежащие классу $\Lambda_2(h_1,X)$ $=\{c(x_3)\in C[0,X]:\|c\|\le h_1\}$, являются решениями обратной задачи 3 с наборами данных $\{c_{11}^{(1)}(x_3),c_{44}^{(1)}(x_3),g_3^{(1)}(t),k_1^{(1)}(t)\},\ \{c_{11}^{(2)}(x_3),c_{44}^{(2)}(x_3),g_3^{(2)}(t),k_1^{(2)}(t)\}$ соответственно. При этом функции $c_{44}^{(1)}(x_3),\ c_{44}^{(2)}(x_3)$ из класса $\Lambda_1(h_0,h_1,X)$*

являются решениями обратной задачи 1, отвечающими информациям $\{g_1^{(1)}(t),$ $k_1^{(1)}(t)\}$, $\{g_1^{(2)}(t),\ k_1^{(2)}(t)\}$; *функции* $c_{11}^{(1)}(x_3)$, $c_{11}^{(2)}(x_3)$ *из класса* $\Lambda_1(h_0,h_1,X)$ *являются решениями обратной задачи 2, отвечающими информациям* $\{g_3^{(1)}(t),$ $k_3^{(1)}(t)\}$, $\{g_3^{(2)}(t),\ k_3^{(2)}(t)\}$ *соответственно при* $t\in[0,T]$. *Тогда найдется такое положительное число* $C^{**}=C^{**}(h_0,\ h_1,\ M_3,\ \rho,\ T)$, $M_3=\max\{\|g_3^{(1)}(t)\|_2(T),$ $\|g_2^{(1)}(t)\|_1(T),\ \|k_1^{(1)}(t)\|_2(T),\ \|g_3^{(2)}(t)\|_2(T),\ \|g_2^{(2)}(t)\|_1(T),\ \|k_1^{(2)}(t)\|_2(T)\}$, *что справедлива оценка устойчивости*

$$\|c_{12}^{(1)}-c_{12}^{(2)}\|(X_0)\le C^{**}\Big(\|c_{44}^1-c_{44}^2\|_2(X_0)+\|c_{11}^1-c_{11}^2\|_2(X_0)$$

$$+\|g_1^{(1)}-g_1^{(2)}\|_2(T)+\|g_2^{(1)}-g_2^{(2)}\|_1(T)+\|g_3^{(1)}-g_3^{(2)}\|_2(T)+\|k_1^{(1)}-k_1^{(2)}\|_2(T)\Big). \quad (2.35)$$

3. Обратная задача 1

Пусть

$$v(y,t):=\frac{U_1^0\left(\psi_1^{-1}(y),t\right)}{s(y)},\ s(y):=\left(\frac{c_{44}(+0)}{c_{44}\left(\psi_1^{-1}(y)\right)}\right)^{1/4}.$$

Тогда обратная задача (2.21)–(2.24) в терминах вновь введенных функций и переменной y принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=L\Big[k_1,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+q(y)v\Big],\quad y>0,\ t\in R, \quad (3.1)$$

$$v|_{t<0}\equiv 0, \quad (3.2)$$

$$L\left[k_1,\frac{\partial v(y,t)}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{a'(0)}{a(0)}v(y,t)\right]_{y=+0}=-\frac{a(0)\delta(t)}{2}, \quad (3.3)$$

$$v(y,t)|_{y=+0}=g_1(t),\quad t>0, \quad (3.4)$$

где введены обозначения $q(y)=\frac{s''(y)}{s(y)}-2\left[\frac{s'(y)}{s(y)}\right]^2$, $a(y)=\frac{1}{\sqrt{\rho\cdot c_{44}(\psi_1^{-1}(y))}}$.

Пусть $L[k_1,v(y,t)]=w(y,t)$. Тогда $v(y,t)=L[r_1,w(y,t)]$, где

$$r_1(t)=-k_1(t)-\int_0^t k_1(t-\tau)r_1(\tau)d\tau. \quad (3.5)$$

Для функции $w(y,t)$ выводим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+q(y)w-\int_0^t r_1''(t-\tau)w(y,\tau)d\tau,\quad y>0,\ t\in\mathbb{R}, \quad (3.6)$$

$$w|_{t<0}\equiv 0, \quad (3.7)$$

$$\left[\frac{\partial w(y,t)}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{a'(0)}{a(0)}w(y,t)\right]_{y=+0}=-\frac{a(0)\delta(t)}{2}, \quad (3.8)$$

$$w(y,t)|_{y=+0}=L\left[k_1,g_1\right],\quad t>0. \quad (3.9)$$

Вышеприведенные построения приводят к следующей **обратной задаче 1***: определить функцию $q(y)\in C(0,T/2)$, входящей в дифференциальное уравнение (3.6), если решение $w(y,t)$ задачи (3.6)–(3.8) удовлетворяет равенству (3.9).

Решение задачи (3.6)–(3.8) можно искать в виде [6], [19]:

$$w(y,t)=\theta(t-y)\Big[\frac{a(0)}{2}+\tilde{w}(y,t)\Big],$$

где $\theta(t-y)$ – функция Хевисайда, а неизвестная фукнция $\tilde{w}$ удовлетворяет следующим равенствам в области $y>0,\ t\in\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial y^2}$$

$$+q(y)\theta(t-y)\Big[\frac{a(0)}{2}+\tilde{w}(y,t)\Big]-\theta(t-y)\int_y^t r_1''(t-\tau)\Big[\frac{a(0)}{2}+\tilde{w}(y,\tau)\Big]d\tau, \quad (3.10)$$

$$\tilde{w}|_{t<0}\equiv 0, \quad (3.11)$$

$$\Big[\frac{\partial\tilde{w}(y,t)}{\partial y}+\frac{a'(0)}{4}+\frac{1}{2}\frac{a'(0)}{a(0)}\tilde{w}(y,t)\Big]_{y=+0}=0, \quad (3.12)$$

$$\tilde{w}(y,t)|_{y=+0}=L\left[k_1,g_1\right]-\frac{a(0)}{2},\ t>0. \quad (3.13)$$

С учетом (3.13) условие (3.12) можно переписать в виде

$$\left.\frac{\partial\tilde{w}(y,t)}{\partial y}\right|_{y=+0}=-\frac{1}{2}\frac{a'(0)}{a(0)}L[k_1,g_1]\equiv f(t). \quad (3.12')$$

Решение задачи (3.10), (3.11), (3.12′) $\tilde{w}(y,t)$ можно представить как

$$\tilde{w}(y,t)=w_1(y,t)+w_2(y,t), \quad (3.14)$$

где $w_1(y,t)$ есть решение задачи:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}+\theta(t-y)q(y)w_1$$

$$-\theta(t-y)\int_y^t r_1''(t-\tau)w_1(y,\tau)d\tau,\ y>0,\ t\in\mathbb{R}, \quad (3.15)$$

$$w_1|_{t<0}\equiv 0, \quad (3.16)$$

$$\left.\frac{\partial w_1(y,t)}{\partial y}\right|_{y=+0}=f(t), \quad (3.17)$$

а $w_2(y,t)$ есть решение задачи:

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}+\theta(t-y)\Big[\frac{a(0)}{2}q(y)+w_2(y,t)\Big]$$

$$-\theta(t-y)\int_y^t r_1''(t-\tau)\Big[\frac{a(0)}{2}+w_2(y,\tau)\Big]d\tau,\ y>0,\ t\in\mathbb{R}, \quad (3.18)$$

$$w_2|_{t<0}\equiv 0, \quad (3.19)$$

$$\left.\frac{\partial w_2(y,t)}{\partial y}\right|_{y=+0}=0, \quad (3.20)$$

Рассмотрим задачу (3.15)–(3.17). Ее решение представимо в виде:

$$w_1(y,t)=\theta(t-y)\Big[w_1^*(y,t)-F(t-y)\Big],\ \text{где}\ F(t-y):=\int_0^{t-y}f(s)ds, \quad (3.21)$$

тогда для $w_1^*(y,t)$ справедливо:

$$\frac{\partial^2 w_1^*}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial y^2} + q(y)\theta(t-y)\Big[w_1^*(y,t) - F(t-y)\Big] -$$

$$\theta(t-y)\int_y^t r_1''(t-\tau)\left[w_1^*(y,\tau) - F(\tau-y)\right]d\tau,\ y>0,\ t\in\mathbb{R}, \tag{3.22}$$

$$w_1^*(y,t)|_{t<0} \equiv 0, \tag{3.23}$$

$$\left.\frac{\partial w_1^*(y,t)}{\partial y}\right|_{y=+0} = 0, \tag{3.24}$$

Продолжим функцию $q(y),\ \theta(t-y),\ F(t-y)$ при $y<0$ четным образом. Решение задачи (3.22)–(3.24) эквивалентно задаче нахождения четной по y функции $w_1^*(y,t)$, удовлетворяющей равенствам (3.22), (3.23).

Тогда решение задачи (3.22), (3.23) представляется в виде:

$$w_1^*(y,t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{R^2}\Big\{\theta(t-\tau-|y-\xi|)\theta(\tau-|\xi|)q(\xi)\Big[w_1^*(\xi,\tau) - F(\tau-|\xi|)\Big]$$

$$-\int\limits_{|\xi|}^{\tau} r_1''(\tau-\eta)\Big[w_1^*(\xi,\eta) - F(\eta-|\xi|)\Big]d\eta\Big\}d\tau d\xi,$$

где $\frac{1}{2}\theta(t-|y|)$ – фундаментальное решение оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Отсюда

$$w_1^*(y,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}}\int\limits_{|\xi|}^{t-|y-\xi|}\int\limits_{|\xi|}^{\tau} r_1''(\tau-\eta)F(\eta-|\xi|)d\eta d\tau d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}}\int\limits_{|\xi|}^{t-|y-\xi|}\left\{q(\xi)\Big[w_1^*(\xi,\tau) - F(\tau-|\xi|)\Big] - \int\limits_{|\xi|}^{\tau} r_1''(\tau-\eta)w_1^*(\xi,\eta)d\eta\right\}d\tau d\xi. \tag{3.25}$$

Из (3.25) следует, что $w_1^*(y,|y|+0)=0,\ w_1^*(y,+0)=0$.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что решение задачи (3.18)–(3.20) при четном продолжении функций $q(y),\ \theta(t-y)$ в область $y<0$ эквивалентно решению интегрального уравнения:

$$w_2(y,t) = \frac{a(0)}{4}\int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}} r_1(t-|y-\xi|-|\xi|)d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}}\int\limits_{|\xi|}^{t-|y-\xi|}\left\{q(\xi)\Big[\frac{a(0)}{2} + w_2(\xi,\tau)\Big] - \int\limits_{|\xi|}^{\tau} r_1''(\tau-\eta)w_2(\xi,\tau)d\eta\right\}d\tau d\xi. \tag{3.26}$$

Из (3.26) следует, что $w_2(y,|y|+0)=0,\ w_2(y,+0)=0$.

Теорема 7. *(о локальной однозначной разрешимости обратной задачи 1*). Пусть T – фиксированное положительное число, $g_1(t) \in C^2[0,T]$, $g_1(+0) > 0$, $g_1'(+0) > 0$, $k_1(t) \in C^2[0,T]$. Тогда при достаточно малых T существует единственное решение обратной задачи 1*, принадлежащее $C[-T/2,T/2]$.*

Определим множество $\tilde{Q}(q_0,T) = \{q(y) : \|q\|_{C[-T/2,T/2]} \le q_0\}$.

Теорема 8. *(об устойчивости обратной задачи 1*). Пусть $q^{(1)}(y)$, $q^{(2)}(y) \in \tilde{Q}(q_0,T)$ – два решения обратной задачи 1* с наборами данных $\{g_1^{(1)}(t),\ k_1^{(1)}(t)\}$, $\{g_1^{(2)}(t),\ k_1^{(2)}(t)\}$ соответственно. Тогда найдется такое положительное число $C^* = C^*(q_0,\ a(0),\ a'(0),\ M_1,\ \rho,\ T)$, $M_1 = \max\{\|g_1^{(1)}(t)\|_2(T),\ \|k_1^{(1)}(t)\|_2(T),$ $\|g_1^{(2)}(t)\|_2(T),\ \|k_1^{(2)}(t)\|_2(T)\}$, что справедлива оценка устойчивости*

$$\|q^{(1)} - q^{(2)}\|_{C[-T/2,T/2]} \le C^* \left(\|g_1^{(1)} - g_1^{(2)}\|_2(T) + \|k_1^{(1)} - k_1^{(2)}\|_2(T)\right). \tag{3.27}$$

Доказательство. Докажем теорему 7. Продифференцируем последовательно равенства (3.25) и (3.26) по t до второго порядка включительно:

$$\frac{\partial w_1^*}{\partial t}(y,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}} \Bigg\{ q(\xi)\Big[w_1^*(\xi, t-|y-\xi|) - F(t-|y-\xi|-|\xi|)\Big]$$
$$- \int\limits_0^{t-|y-\xi|-|\xi|} r_1''(\eta)\Big[w_1^*(\xi, t-|y-\xi|-\eta) - F(t-|y-\xi|-|\xi|-\eta)\Big]d\eta\Bigg\}d\xi, \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t}(y,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}} \Bigg\{ q(\xi)\Big[\frac{a(0)}{2} + w_2(\xi, t-|y-\xi|)$$
$$- \int\limits_0^{t-|y-\xi|-|\xi|} r_1''(\eta)\Big[\frac{a(0)}{2} + w_2(\xi, t-|y-\xi|-\eta)\Big]d\eta\Bigg\}d\xi, \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial^2 w_1^*}{\partial t^2}(y,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}} \Bigg\{ q(\xi)\Big[\frac{\partial w_1^*}{\partial t}(\xi, t-|y-\xi|) - f(t-|y-\xi|-|\xi|)\Big]$$
$$- \int\limits_0^{t-|y-\xi|-|\xi|} r_1''(\eta)\Big[\frac{\partial w_1^*}{\partial t}(\xi, t-|y-\xi|-\eta) - f(t-|y-\xi|-\eta-|\xi|)\Big]d\eta\Bigg\}d\xi, \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}(y,t) = \frac{a(0)}{8}\left[q\left(\frac{y+t}{2}\right) + q\left(\frac{y-t}{2}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}} \Bigg\{ q(\xi)\frac{\partial w_2}{\partial t}(\xi, t-|y-\xi|) - \frac{a(0)}{2}r_1''(t-|y-|\xi||)$$
$$- \int\limits_0^{t-|y-\xi|-|\xi|} r_1''(\eta)\frac{\partial w_2}{\partial t}(\xi, t-|y-\xi|-\eta)d\eta\Bigg\}d\xi, \tag{3.31}$$

Заметим, что из представления (3.14) следует, что

$$\tilde{w}(0,t) = w_1^*(0,t) + w_2(0,t) - \int\limits_0^t f(s)ds,$$

отсюда

$$\tilde{w}_t'(0,t) = (w_1^*)_t'(0,t) + {w_2}_t'(0,t) + \frac{a'(0)}{2a(0)} L[k_1, g_1(t)],$$

с другой стороны, из (3.13) имеем $\tilde{w}(0,t) = L[k_1, g_1(t)] - \frac{a(0)}{2}$, следовательно,

$$g_1'(t) + \int_0^t k_1'(t-\tau)g_1(\tau)d\tau = (w_1^*)_t'(0,t) + {w_2}_t'(0,t) + \frac{a'(0)}{2a(0)} L[k_1, g_1(t)], \quad (3.32)$$

$$(w_1^*)_{tt}''(0,t) + {w_2}_{tt}''(0,t)$$
$$= g_1''(t) + \int_0^t k_1''(t-\tau)g_1(\tau)d\tau - \frac{a'(0)}{2a(0)}\left[g_1'(t) + \int_0^t k_1'(t-\tau)g_1(\tau)d\tau\right]. \quad (3.33)$$

Из (3.32) при $t = 0$ получаем значение $a'(0) = 4g_1'(0)$, так как из (3.13) следует $a(0) = 2g_1(0)$. Таким образом, значения $a(0)$, $a'(0)$ в дальнейшем считаются известными.

Складывая равенства (3.30) и (3.31) (при $y = 0$) с учетом (3.33), получаем интегральное уравнение для $q(y)$:

$$q(y) = \frac{2a'(0)}{a^2(0)}\left[g_1'(2|y|) + sign(y)\int\limits_0^{2y} k_1'(2|y|-\tau)g_1(\tau)d\tau\right]$$
$$-\frac{4}{a(0)}\left[g_1''(2|y|) + sign(y)\int\limits_0^{2y} k_1''(2|y|-\tau)g_1(\tau)d\tau\right]$$
$$-\frac{4}{a(0)} sign(y)\int\limits_0^y \Bigg\{q(\xi)\Big[\frac{\partial w_1^*}{\partial t}(\xi, 2|y|-\xi) - f(2|y|-2\xi)\Big]$$
$$-\int\limits_0^{2|y|-2\xi} r_1''(\eta)\Big[\frac{\partial w_1^*}{\partial t}(\xi, 2|y|-\xi-\eta) - f(2|y|-2\xi-\eta)\Big]d\eta\Bigg\}d\xi - \frac{4}{a(0)} sign(y)$$
$$\times\int\limits_0^y \Bigg\{q(\xi)\frac{\partial w_2}{\partial t}(\xi, 2|y|-\xi) - \frac{a(0)}{2} r_1''(2|y|-2\xi) - \int\limits_0^{2|y|-2\xi} r_1''(\eta)\frac{\partial w_2}{\partial t}(\xi, 2|y|-\xi-\eta)d\eta\Bigg\}d\xi. \quad (3.34)$$

Пусть $\Diamond(y,t) = \{(\xi,\tau):\ |\xi| \le \tau \le t - |y-\xi|\}$.

Рассмотрим в области $\Diamond(0,T)$ равенства (3.25), (3.26), (3.28), (3.29), (3.34). Эти равенства определяют замкнутую систему нелинейных интегральных уравнений второго рода относительно функций $w_1^*(y,t)$, $w_2(y,t)$, $\left(\frac{\partial w_1^*}{\partial t}\right)(y,t)$, $\left(\frac{\partial w_2}{\partial t}\right)(y,t)$, $q(y)$. Запишем систему (3.25), (3.26), (3.28), (3.29), (3.34) в виде операторного уравнения

$$\varphi = A\varphi, \quad (3.35)$$

здесь
$$\varphi := \Big[w_1^*(y,t), w_2(y,t), \frac{\partial w_1^*}{\partial t}(y,t), \frac{\partial w_2}{\partial t}(y,t), q(y)\Big]$$
– векторная функция с компонентами φ_i $(i = 1,2,3,4,5)$, а оператор A определен на множестве функций $\varphi \in C(\Diamond(0,T))$ и в соответствии равенствами (3.25),(3.26),(3.28),(3.29),(3.34) имеет вид $A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$:
$$A_1\varphi = \varphi_{01} + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}}\int\limits_{|\xi|}^{t-|y-\xi|}\left\{\varphi_5(\xi)\Big[\varphi_1(\xi,\tau) - F(\tau-|\xi|)\Big] - \int\limits_{|\xi|}^{\tau} r_1''(\tau-\eta)\varphi_1(\xi,\eta)d\eta\right\}d\tau d\xi,$$
$$A_2\varphi = \varphi_{02} + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}}\int\limits_{|\xi|}^{t-|y-\xi|}\left\{\varphi_5(\xi)\Big[\frac{a(0)}{2} + \varphi_2(\xi,\tau)\Big] - \int\limits_{|\xi|}^{\tau} r_1''(\tau-\eta)\varphi_2(\xi,\tau)d\eta\right\}d\tau d\xi,$$
$$A_3\varphi = \varphi_{03} + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}}\left\{\varphi_5(\xi)\Big[\varphi_1(\xi, t-|y-\xi|) - F(t-|y-\xi|-|\xi|)\Big]\right.$$
$$\left. - \int\limits_{0}^{t-|y-\xi|-|\xi|} r_1''(\eta)\varphi_1(\xi, t-|y-\xi|-\eta)d\eta\right\}d\xi,$$
$$A_4\varphi = \varphi_{04} + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}}\left\{\varphi_5(\xi)\Big[\frac{a(0)}{2} + \varphi_2(\xi, t-|y-\xi|)\Big] - \int\limits_{0}^{t-|y-\xi|-|\xi|} r_1''(\eta)\varphi_2(\xi, t-|y-\xi|-\eta)d\eta\right\}d\xi,$$
$$A_5\varphi = \varphi_{05} - \frac{4}{a(0)}sign(y)\int\limits_0^y\left\{\varphi_5(\xi)\Big[\varphi_2(\xi, 2|y|-\xi) - f(2|y|-2\xi)\Big]\right.$$
$$\left. - \int\limits_0^{2|y|-2\xi} r_1''(\eta)\varphi_2(\xi, 2|y|-\xi-\eta)d\eta\right\}d\xi$$
$$-\frac{4}{a(0)}sign(y)\int\limits_0^y\left\{\varphi_1(\xi)\varphi_4(\xi, 2|y|-\xi) - \int\limits_0^{2|y|-2\xi} r_1''(\eta)\varphi_4(\xi, 2|y|-\xi-\eta)d\eta\right\}d\xi,$$
где
$$\varphi_{01} = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}}\int\limits_{|\xi|}^{t-|y-\xi|}\int\limits_{|\xi|}^{\tau} r_1''(\tau-\eta)F(\eta-|\xi|)d\eta d\tau d\xi; \quad \varphi_{02} = \frac{a(0)}{4}\int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}} r_1(t-|y-\xi|-|\xi|)d\xi;$$
$$\varphi_{03} = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}}\int_0^{t-|y-\xi|-|\xi|} r_1''(\eta)F(t-|y-\xi|-|\xi|-\eta)d\eta d\xi;$$

$$\varphi_{04} = -\frac{a(0)}{4} \int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}} r_1'(t - |y-\xi| - |\xi|) d\xi;$$

$$\varphi_{05} = \frac{2a'(0)}{a^2(0)} \left[g_1'(2|y|) + sign(y) \int\limits_0^{2y} k_1'(2|y| - \tau) g_1(\tau) d\tau \right]$$

$$- \frac{4}{a(0)} \left[g_1''(2|y|) + sign(y) \int\limits_0^{2y} k_1''(2|y| - \tau) g_1(\tau) d\tau \right]$$

$$- \frac{4}{a(0)} sign(y) \int\limits_0^{y} \int_0^{2|y|-2\xi} r_1''(\eta) f(2|y| - 2\xi - \eta) d\eta d\xi + 2 sign(y) \int\limits_0^{y} r_1''(2|y| - 2\tau) d\tau.$$

Обозначим

$$\varphi_0 = [\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03}, \varphi_{04}, \varphi_{05}],$$

$$\|\varphi\|(T) = \max \left\{ \max_{(y,t)\in\Diamond(0,T)} |\varphi_i|,\ i = 1,2,3,4;\ \max_{y\in[-T/2,T/2]} |\varphi_5| \right\}.$$

Система (3.35) является замкнутой системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода с непрерывными свободными членами и ядрами относительно неизвестных функций. В качестве малого параметра система (3.35) содержит промежуток интегрирования, который не превосходит число T. Поэтому при малых T к ней применим принцип Банаха, обеспечивающий существование единственного решения системы.

Определим в пространстве $C(\Diamond(0,T))$ множество функций $Q = \{\varphi | \ \|\varphi - \varphi_0\| \le \|\varphi_0\|\}$. Для $\varphi \in Q$ имеет место оценка $\|\varphi\| \le 2\|\varphi_0\|$.

Покажем, что при достаточно малых T оператор A осуществляет сжатое отображение множества Q на себя. Оценивая интегралы, входящие в формулы системы (3.35), находим:

$$\|A_1\varphi - \varphi_{01}\| \le T^2 \|\varphi_0\| \Big[2\|\varphi_0\| + \|F\| + T\|r''\| \Big],$$

$$\|A_2\varphi - \varphi_{02}\| \le T^2 \|\varphi_0\| \Big[\frac{a(0)}{2} + 2\|\varphi_0\| + T\|r_1''\| \Big],$$

$$\|A_3\varphi - \varphi_{03}\| \le T \|\varphi_0\| \Big[2\|\varphi_0\| + \|F\| + T\|r_1''\| \Big],$$

$$\|A_4\varphi - \varphi_{04}\| \le T \|\varphi_0\| \Big[\frac{a(0)}{2} + 2\|\varphi_0\| + T\|r_1''\| \Big],$$

$$\|A_5\varphi - \varphi_{05}\| \le \frac{4}{a(0)} T \|\varphi_0\| \Big[2\|\varphi_0\| + \|f\| + T\|r_1''\| \Big].$$

Отсюда выводим

$$\|A\varphi - \varphi_0\|(T) \le \alpha \|\varphi_0\|,$$

где

$$\alpha = \mu \cdot \Big[\frac{a(0)}{2} + 2\|\varphi_0\| + T\|r_1''\| + \|f\| \max\{1, T\} \Big],\ \mu = \max\left\{ T, T^2, \frac{4T}{a(0)} \right\}.$$

Очевидно, что существует такое T^*, при котором $\alpha < 1$ и для $T \in (0, T^*)$ оператор A переводит множество Q в себя.

Пусть теперь $\varphi^1,\ \varphi^2$ — любые два элемента из $Q(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Тогда, используя вспомогательные неравенства вида

$$\left|\varphi_i^1\varphi_j^1 - \varphi_i^2\varphi_j^2\right| \le \left|\varphi_i^1\right|\left|\varphi_j^1 - \varphi_j^2\right| + \left|\varphi_j^2\right|\left|\varphi_i^1 - \varphi_i^2\right| \\ \le 4\|\varphi_0\|\left\|\varphi^1 - \varphi^2\right\|,$$

для $(y,t) \in \Diamond(0,T)$ получим

$$\left\|A\varphi^1 - A\varphi^2\right\| \le \tilde{\alpha}\left\|\varphi^1 - \varphi^2\right\|,$$

где

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}\mu \cdot \Big[\frac{a(0)}{2} + 4\|\varphi_0\| + T\|r_1''\| + \|f\|\max\{1,T\}\Big].$$

Заметим, что из условия $\alpha < 1$ следует $\tilde{\alpha} < 1$. Поэтому можно сделать вывод о том, что оператор A является сжимающим на $Q(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Тогда согласно принципу Банаха уравнение (3.35) имеет и притом единственное решение в $Q(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ при $T \in (0, T^*)$.

Решая систему уравнений (3.35) методом последовательных приближений, можно однозначно построить в области $\Diamond(0,T)$ для $T \in (0,T^*)$ вектор-функцию φ и тем самым определить функцию $q(y) \in C[-T/2, T/2]$ [20].

Теорема 7 о разрешимости доказана. □

Докажем теорему 8 об устойчивости.

Доказательство. Как известно, область $\Diamond(0,T)$ допускает эквивалентное описание $\{(y,t)|\ 0 \le t \le T,\ 0 \le |y| \le \frac{T}{2} - |t - \frac{T}{2}|\}$.

Пусть $\varphi^{(j)},\ j = 1,2$ — вектор-функции, которые являются решениями (3.35) с набором данных $\{k_1^{(j)}(t),\ g_1^{(j)}(t)\},\ j = 1,2$, соответственно, т.е. справедливы уравнения $\varphi^{(j)} = A\varphi^{(j)}$ для $j = 1,2$.

Введем обозначение

$$\tilde{\varphi}(t) = \max\{\max_{0\le|\xi|\le\frac{t}{2}-|\tau-\frac{t}{2}|}|\varphi_i^{(1)}(\xi,\tau) - \varphi_i^{(2)}(\xi,\tau)|,\ i = \overline{1,4};\ \max_{\xi\in[-\frac{t}{2},\frac{t}{2}]}|\varphi_5^{(1)}(\xi) - \varphi_5^{(2)}(\xi)|\}.$$

Учтем, что из (3.5) следует оценка

$$\|r_1(t)\|_2(T) \le \|k_1(t)\|_2(T)\exp\left(T\|k_1(t)\|_2(T)\right).$$

Известные функции $k_1^{(j)},\ g_1^{(j)},\ j = 1,2$ в свободные члены интегральных уравнений системы (3.34) входят соответствующим образом через функции $r_1''^{(j)}(t),\ F^{(j)}(t),\ f^{(j)}(t),\ j = 1,2$.

Перейдем в этих выражениях к разностям $k_1^{(1)} - k_1^{(2)}$, $g_1^{(1)} - g_1^{(2)}$ подобно тому, как это сделано в монографии [1, сс. 95-110]. Тогда

$$\tilde{\varphi}(t) \le C_1\left(\|g^{(1)} - g^{(2)}\|_{C^2[0,T]} + \|k^{(1)} - k^{(2)}\|_{C^2[0,T]}\right) + C_2\int_0^t \tilde{\varphi}(\tau)d\tau,$$

где $C_1 = C_1(a(0),\ a'(0),\ M_1,\ \rho,\ T)$, $C_2 = C_2(q_0,\ a(0),\ a'(0),\ M_1,\ \rho,\ T)$.

Применяя лемму Гронуолла к последнему неравенству, выводим

$$\tilde{\varphi}(t) \le C_1\exp\left(C_2T\right)\left(\|g_1^{(1)} - g_1^{(2)}\|_2(T) + \|k_1^{(1)} - k_1^{(2)}\|_2(T)\right). \tag{3.36}$$

Из (3.36) следует оценка (3.27). Теорема 8 доказана. □

Из теоремы устойчивости следует справедливость теоремы единственности для любого фиксированного T [20]:

Теорема 9. *Если в условиях теоремы 7 решение обратной задачи 1* существует и принадлежит классу $C[-T/2, T/2]$, то оно единственно.*

Далее считаем $q(y)$ известной функцией.

4. Доказательства теорем 1–4

Докажем теорему 1.

Доказательство. Определим $K(y) = \frac{d}{dy} ln a(y)$ как решение задачи Коши для уравнения Риккати:

$$K'(y) + \frac{1}{2}K^2(y) = 2q(y), \quad K(0) = \frac{a'(0)}{a(0)}. \tag{4.1}$$

Существование единственного решения задачи Коши (4.1) при выполнении условия $T\left(\left|\frac{a'(0)}{a(0)}\right| + Tq_0\right) \leq 1$ для $T \in (0, \min(T^*, T_1)$ (здесь T_1 – положительный корень соответствующего квадратного уравнения относительно T) следует из принципа сжатых отображений для интегрального уравнения:

$$K(y) = \frac{a'(0)}{a(0)} + 2\int_0^y q(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int_0^y K^2(\xi)d\xi.$$

По известной функции $a(y)$ находим $c_{44}(\psi_1^{-1}(y))$:

$$a(y) = a(0)\exp\left(\int_0^y K(\xi)d\xi\right) \Rightarrow c_{44}(\psi_1^{-1}(y)) = \frac{1}{\rho a^2(y)}.$$

Теперь определим функцию $\psi_1^{-1}(y)$. При дифференцировании по переменной y равенства

$$y = \int_0^{\psi_1^{-1}(y)} \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}(\xi)}}d\xi$$

находим

$$1 = \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}(\psi_1^{-1}(y))}}\frac{d\psi_1^{-1}(y)}{dy} \Rightarrow \frac{1}{\rho a(y)} = \frac{d\psi_1^{-1}(y)}{dy}.$$

Окончательно, $\psi_1^{-1}(y) = \frac{1}{\rho}\int\limits_0^y \frac{1}{a(\xi)}d\xi$.

Последняя формула определяет функцию $\psi_1^{-1}(y)$ при $y \in (0, T/2)$ через известную функцию $a(y) \in C^2[0, T/2]$ с положительными значениями. Теорема 1 доказана. □

Докажем теорему 2.

Доказательство. Интегрируя в пределах от 0 до y соответствующие уравнения (4.1) для $K^{(1)}(y)$ и для $K^{(2)}(y)$, а затем вычитая почленно одно уравнение из другого, можно перейти к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} |K^{(1)}(y) - K^{(2)}(y)| \leq \frac{1}{2}\int_0^y |K^{(1)}(\xi) - K^{(2)}(\xi)||K^{(1)}(\xi) + K^{(2)}(\xi)|d\xi \\ +2\int_0^y |q^{(1)}(\xi) - q^{(2)}(\xi)|d\xi. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Примененяя лемму Гронуолла к (4.2), получаем

$$\|K^{(1)} - K^{(2)}\|_{C[-T/2,T/2]} \le C_3(h_0, h_1, \rho, T)\|q^{(1)} - q^{(2)}\|_{C[-T/2,T/2]}$$
$$\le C_3 C^* \left(\|g_1^{(1)} - g_1^{(2)}\|_2(T) + \|k_1^{(1)} - k_1^{(2)}\|_2(T)\right), \tag{4.3}$$

Из определения функций $K^{(1)}(y)$ и $K^{(2)}(y)$ следует, что

$$a^{(j)}(y) = a(0)\exp\left(\int_0^{\psi_1^{(j)}(x_3)} K^{(j)}(\xi)d\xi\right), \quad j = 1, 2,$$

отсюда

$$c_{44}^{(j)}(x_3) = \frac{1}{a^2(0)\rho}\exp\left(-2\int_0^{\psi_1^{(j)}(x_3)} K^{(j)}(\xi)d\xi\right), \quad j = 1, 2.$$

Составляя разность

$$c_{44}^{(1)}(x_3) - c_{44}^{(2)}(x_3)$$
$$= \frac{1}{a^2(0)\rho}\left[\exp\left(-2\int_0^{\psi_1^{(1)}(x_3)} K^{(1)}(\xi)d\xi\right) - \exp\left(-2\int_0^{\psi_1^{(2)}(x_3)} K^{(2)}(\xi)d\xi\right)\right]$$

и ссылаясь на полностью идентичные выкладки [2, сс. 172–173], получаем требуемую оценку устойчивости (2.33). □

Пусть

$$\hat{v}(z,t) := \frac{U_3^0\left(\psi_2^{-1}(z), t\right)}{p(z)}, \; p(z) := \left(\frac{c_{11}(+0)}{c_{11}\left(\psi_2^{-1}(z)\right)}\right)^{1/4}.$$

Тогда обратная задача (2.32)–(2.35) в терминах вновь введенных функций и переменной z принимает вид

$$\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial t^2} = L\Big[k_3, \frac{\partial^2\hat{v}}{\partial z^2} + \tilde{q}(z)\hat{v}\Big], \; z > 0, \; t \in R, \tag{4.4}$$

$$\hat{v}|_{t<0} \equiv 0, \tag{4.5}$$

$$L\left[k_3, \frac{\partial\hat{v}(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{b'(0)}{b(0)}\hat{v}(z,t)\right]_{z=+0} = -\frac{b(0)\delta(t)}{2}, \tag{4.6}$$

$$\hat{v}(z,t)|_{z=+0} = g_3(t), \quad t > 0, \tag{4.7}$$

где введены обозначения $\tilde{q}(z) = \frac{p''(z)}{p(z)} - 2\left[\frac{p'(z)}{p(z)}\right]^2, \; b(z) = \frac{1}{\sqrt{\rho\cdot c_{11}(\psi_2^{-1}(z))}}$.

Применяя в равенствах (4.4)–(4.7) те же подстановки, что и в случае обратной задачи 1, мы получим задачу, аналогичную задаче (3.6)–(3.8):

$$\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\hat{w}}{\partial z^2} + \tilde{q}(z)\hat{w} - \int_0^t r_3''(t-\tau)\hat{w}(z,\tau)d\tau, \; z > 0, \; t \in \mathbb{R}, \tag{4.8}$$

$$\hat{w}|_{t<0} \equiv 0, \tag{4.9}$$

$$\left[\frac{\partial\hat{w}(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{b'(0)}{b(0)}\hat{w}(z,t)\right]_{z=+0} = -\frac{b(0)\delta(t)}{2}, \tag{4.10}$$

$$\hat{w}(z,t)|_{z=+0} = L\left[k_3, g_3\right], \quad t > 0, \tag{4.11}$$

где $\hat{w}(z,t) = L[k_3, \hat{v}(z,t)]$, $\hat{v}(z,t) = L[r_3, \hat{w}(z,t)]$, $r_3(t) = -k_3(t) - \int_0^t k_3(t-\tau)r_3(\tau)d\tau$.

Заметим, что решение обратной задачи 2 (4.8)–(4.11) аналогично обратной задаче 1. Поэтому теоремы 3 и 4 доказываются подобно теоремам 1 и 2.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится структура функций U_3^0, $\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3}$. В силу аналогии прямой задачи (5.5)–(5.7) задаче (3.6)–(3.8) для $x_3 \in R$, $t \in R$ имеем

$$U_3^0(x_3,t) = \theta(t - |\psi_2(x_3)|)\tilde{U}(x_3,t),$$

где

$$\tilde{U}(x_3,t) = p(\psi_2(x_3))L\left[r_3, \frac{b(0)}{2} + \tilde{W}(\psi_2(x_3),t)\right] \tag{4.12}$$

– четная функция по переменной x_3, $\tilde{U}(x_3,t) \in C^1(\bigtriangledown(T))$, $\bigtriangledown(T) = \{(x_3,t)|\ |\psi_2(x_3)| \le t \le T\}$ (здесь $\tilde{W}(\psi_2(x_3),t)$ есть аналог регулярной части $\tilde{w}(y,t)$ в обратной задаче 1).

Из (4.12), учитывая структуру $\tilde{W}(\psi_2(x_3),t)$, получаем

$$\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3} = D_1(x_3)\delta(t - |\psi_2(x_3)|) + \theta(t - |\psi_2(x_3)|)D_2(x_3,t),$$

$$D_1(x_3) = -\sqrt{\frac{\rho}{c_{11}(x_3)}}\tilde{U}(x_3, |\psi_2(x_3)|)sign(x_3),\ D_2(x_3,t) = \frac{\partial \tilde{U}(x_3,t)}{\partial x_3}. \tag{4.13}$$

5. Обратная задача 3

Докажем теорему 5.

Доказательство. Пусть

$$v_1(y,t) := \frac{U_1^1\left(\psi_1^{-1}(y),t\right)}{s(y)}, \quad s(y) := \left(\frac{c_{44}(+0)}{c_{44}\left(\psi_1^{-1}(y)\right)}\right)^{1/4}.$$

Тогда обратная задача (2.29)–(2.32) в терминах вновь введенных функций и переменной y в области $y > 0$, $t \in R$ принимает вид

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = L\Big[k_1, \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + q(y)v_1 + \frac{i}{\rho s(y)}\left(\tilde{c}_{12}(y)\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}(c_{44}U_3^0)\right)\Big|_{x_3=\psi_1^{-1}(y)}\Big], \tag{5.1}$$

$$v_1|_{t<0} \equiv 0, \tag{5.2}$$

$$L\left[k_1, \frac{\partial v_1(y,t)}{\partial y}\right]_{y=+0} = f_1(t), \tag{5.3}$$

$$v_1(y,t)|_{y=+0} = g_2(t), \quad t > 0, \tag{5.4}$$

где $\tilde{c}_{12}(y) = c_{12}(\psi_1^{-1}(y))$, $f_1(t) = -i\sqrt{\frac{c_{44}(+0)}{\rho}}L[k_1, g_3(t)] - \frac{1}{2}\frac{a'(0)}{a(0)}L[k_1, g_2(t)]$.

Пусть $L[k_1, v_1(y,t)] = W(y,t) \ \Rightarrow\ v_1(y,t) = L[r_1, W(y,t)]$.

Тогда

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + q(y)W - \int_0^t r_1''(t-\tau)W(y,\tau)d\tau$$

$$+\frac{i}{\rho s(y)}L\left[k_1, \tilde{c}_{12}(y)\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}(c_{44}U_3^0)\right]\Big|_{x_3=\psi_1^{-1}(y)}, \quad y>0,\ t\in R, \tag{5.5}$$

$$W|_{t<0} \equiv 0, \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}\Big|_{y=+0} = f_1(t), \tag{5.7}$$

$$W(y,t)|_{y=+0} = L\left[k_1, g_2\right], \quad t>0. \tag{5.8}$$

Решение прямой задачи (5.5)–(5.7) ищем в виде:

$$W(y,t) = W_1(y,t) + W_2(y,t),$$

где $W_1(y,t)$ – решение задачи

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + q(y)W_1 - \int_0^t r_1''(t-\tau)W_1(y,\tau)d\tau,\ y>0,\ t\in R, \tag{5.9}$$

$$W_1|_{t<0} \equiv 0, \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial y}\Big|_{y=+0} = f_1(t), \tag{5.11}$$

а $W_2(y,t)$ – решение задачи

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} + q(y)W_2 - \int_0^t r_1''(t-\tau)W_2(y,\tau)d\tau$$

$$+\frac{i}{\rho s(y)}L\left[k_1, \tilde{c}_{12}(y)\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}(c_{44}U_3^0)\right]\Big|_{x_3=\psi_1^{-1}(y)}, \quad y>0,\ t\in R, \tag{5.12}$$

$$W_2|_{t<0} \equiv 0, \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial y}\Big|_{y=+0} = 0, \tag{5.14}$$

Решение (5.9)–(5.11) подобно решению задачи (3.15)–(3.17) с известной функцией $q(y)$. Поэтому будем считать $W_1(y,t)$ известной функцией.

Далее, продолжим функцию $W_2(y,t)$ четным образом, а $\tilde{c}_{12}(y)$ – нечетным образом в область $y>0$, при этом условие (5.13) выполняется автоматически. Здесь функции $c_{44}(x_3)$, $c_{11}(x_3)$, $U_3^0(x_3,t)$ являются четными по переменной x_3 (см. обратные задачи 1 и 2).

Тогда для четной $W_2(y,t)$ имеем:

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} + q(y)W_2 - \int_0^t r_1''(t-\tau)W_2(y,\tau)d\tau$$

$$+\frac{i}{\rho s(y)}L\left[k_1, \tilde{c}_{12}(y)\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}(c_{44}U_3^0)\right]\Big|_{x_3=\psi_1^{-1}(y)},\ y\in R,\ t\in R, \tag{5.15}$$

$$W_2|_{t<0} \equiv 0, \tag{5.16}$$

Решение (5.15)–(5.16) представляется в виде

$$W_2(y,t) = \iint\limits_{R^2} G(y,t,\xi,\tau)\frac{i}{\rho s(\xi)} L\left[k_1, \tilde{c}_{12}(\xi)\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}(c_{44}U_3^0)\right]_{x_3=\psi_1^{-1}(\xi)} d\tau d\xi, \tag{5.17}$$

где $G(y,t,y_0,t_0)$ является фундаментальным решением оператора $\tilde{L}$:

$$\tilde{L}W_2 = \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} - q(y)W_2 + \int_0^t r''(t-\tau)W_2(y,\tau)$$

и, как показано в работе [10], имеет следующую структуру:

$$G(y,t,y_0,t_0) = \theta(t-t_0-|y-y_0|)\left[\frac{1}{2} + \tilde{G}(y,t,y_0,t_0)\right],\ y_0,\ t_0 \in R. \tag{5.18}$$

Рассмотрим более подробно выражения, входящие в (5.17):

$$L\left[k_1, \tilde{c}_{12}(\xi)\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3}\right]_{x_3=\psi_1^{-1}(\xi)} = \tilde{c}_{12}(\xi)\Bigg[D_1(x_3)\delta(\tau-|\psi_2(x_3)|) + \theta(\tau-|\psi_2(x_3)|)$$

$$\Big(D_2(x_3,\tau) + k_1(\tau-|\psi_2(x_3)|)D_1(x_3) + \int\limits_{|\psi_2(x_3)|}^{\tau} k_1(\tau-s)D_2(x_3,s)ds\Big)\Bigg]_{x_3=\psi_1^{-1}(\xi)}, \tag{5.19}$$

$$L\left[k_1, \frac{\partial}{\partial x_3}(c_{44}U_3^0)\right]_{x_3=\psi_1^{-1}(\xi)} = \Bigg[c_{44}(x_3)D_1(x_3)\delta(\tau-|\psi_2(x_3)|)$$

$$+\theta(\tau-|\psi_2(x_3)|)\Big(\frac{dc_{44}}{dx_3}\tilde{U}(x_3,\tau) + c_{44}(x_3)[D_2(x_3,\tau) + D_1(x_3)k_1(\tau-|\psi_2(x_3)|)]$$

$$+\int\limits_{|\psi_2(x_3)|}^{\tau} k_1(\tau-s)\Big[\frac{dc_{44}}{dx_3}\tilde{U}(x_3,s) + c_{44}(x_3)D_2(x_3,s)\Big]ds\Big)\Bigg]_{x_3=\psi_1^{-1}(\xi)}. \tag{5.20}$$

Введем следующие обозначения:

$$d(y) = \psi_2(\psi_1^{-1}(y))),\ \triangle(y,t) = \{(\xi,\tau):\ 0 \le \tau \le t-|y-\xi|\},\ \nabla = \{(\xi,\tau) : |d(\xi)| \le \tau\},$$
$$\Theta = \{(y,t):\ 0 < t \le \psi(y)\}.$$

Функция $\psi(y)$ определена посредством значений y и $d(y)$ в точности как в работе [2, сс. 206–208].

С учетом (5.18)–(5.20) перепишем формулу (5.17)

$$W_2(y,t) = \iint\limits_{R^2} \theta(t-\tau-|y-\xi|)\left[\frac{1}{2} + \tilde{G}(y,t,\xi,\tau)\right]\frac{i}{\rho s(\xi)}\tilde{c}_{12}(\xi)$$

$$\times\Bigg[D_1(x_3)\delta(\tau-|d(\xi)|) + \theta(\tau-|d(\xi)|)$$

$$\Big(D_2(x_3,\tau) + k_1(\tau-|d(\xi)|)D_1(x_3) + \int_{|d(\xi)|}^{\tau} k_1(\tau-s)D_2(x_3,s)ds\Big)\Bigg]_{x_3=\psi_1^{-1}(\xi)} d\tau d\xi$$

$$+\iint\limits_{R^2} \theta(t-\tau-|y-\xi|)\left[\frac{1}{2} + \tilde{G}(y,t,\xi,\tau)\right]\frac{i}{\rho s(\xi)}\Bigg[c_{44}(x_3)D_1(x_3)\delta(\tau-|\psi_2(x_3)|)$$

$$+\theta(\tau-|\psi_2(x_3)|)\Big(\frac{dc_{44}}{dx_3}\tilde U(x_3,\tau)+c_{44}(x_3)[D_2(x_3,\tau)+D_1(x_3)k_1(\tau-|\psi_2(x_3)|)]$$

$$+\int\limits_{|\psi_2(x_3)|}^{\tau}k_1(\tau-s)\Big[\frac{dc_{44}}{dx_3}\tilde U(x_3,s)+c_{44}(x_3)D_2(x_3,s)\Big]ds\Big)\Bigg]_{x_3=\psi_1^{-1}(\xi)}d\tau d\xi. \quad (5.21)$$

Из определения функций $\psi(y)$, $d(y)$ и множеств $\triangle(y,t)$, $\bigtriangledown$, Θ вытекают следующие формулы:

$$\triangle(y,t)\bigcap\bigtriangledown=\varnothing,\ (y,t)\in\Theta,$$

$$\triangle(y,t)\bigcap\bigtriangledown=\bigcup_{i=1}^{n}B_i(y,t),\ (y,t)\in R^2\setminus\Theta,$$

$$B_i(y,t)=\{(\xi,\tau):\ y_{*i}(y,t)\le\xi\le y_i^*(y,t),\ |d(\xi)|\le\tau\le t-|y-\xi|\},$$

причем

$$\triangle(0,t)\bigcap\bigtriangledown=B_1(0,t),$$

функции $y_{*i}(y,t)$, $y_i^*(y,t)$ являются решениями уравнения $t-|y-\xi|=|d(\xi)|$ относительно ξ и $y_{*i}(y,t)\le y_i^*(y,t)$.

Тогда

$$W_2(y,t)=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{y_{*i}(y,t)}^{y_i^*(y,t)}\tilde c_{12}(\xi)\hat D_1(\xi)\left[\frac12+\tilde G(y,t,\xi,|d(\xi)|)\right]d\xi$$

$$+\theta(t-|\psi(y)|)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{y_{*i}(y,t)}^{y_i^*(y,t)}\int_{|d(\xi)|}^{t-|y-\xi|}\tilde c_{12}(\xi)\left[\frac12+\tilde G(y,t,\xi,\tau)\right]$$

$$\times\left(\hat D_2(\xi,\tau)+k_1(\tau-|d(\xi)|)\hat D_1(\xi)+\int_{|d(\xi)|}^{\tau}k_1(\tau-s)\hat D_2(\xi,s)ds\right)d\tau d\xi+F(y,t), \quad (5.22)$$

где

$$\hat D_1(\xi)=\frac{i}{\rho s(\xi)}D_1(\psi_1^{-1}(\xi)),\ \hat D_2(\xi,\tau)=\frac{i}{\rho s(\xi)}D_2(\psi_1^{-1}(\xi),\tau),$$

$$F(y,t)=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{y_{*i}(y,t)}^{y_i^*(y,t)}\frac{i}{\rho s(\xi)}c_{44}(\psi_1^{-1}(\xi))D_1(\psi_1^{-1}(\xi))\left[\frac12+\tilde G(y,t,\xi,|d(\xi)|)\right]d\xi$$

$$+\theta(\tau-|\psi(y)|)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{y_{*i}(y,t)}^{y_i^*(y,t)}\int_{|d(\xi)|}^{t-|y-\xi|}\left[\frac12+\tilde G(y,t,\xi,\tau)\right]\frac{i}{\rho s(\xi)}$$

$$\times\Bigg[\frac{dc_{44}}{dx_3}\tilde U(x_3,\tau)+c_{44}(x_3)\Big(D_2(x_3,\tau)+D_1(x_3)k_1(\tau-|d(\xi)|)\Big)$$

$$+\int\limits_{|d(\xi)|}^{\tau}k_1(\tau-s)\Big(\frac{dc_{44}}{dx_3}\tilde U(x_3,s)+c_{44}(x_3)D_2(x_3,s)\Big)ds\Bigg]_{x_3=\psi_1^{-1}(\xi)}d\tau d\xi. \quad (5.23)$$

Подставляя в (5.22) $y = 0$, для $t > 0$ получаем

$$W_2(0,t) = \int\limits_{y_{*1}(0,t)}^{y_1^*(0,t)} \tilde{c}_{12}(\xi)\Bigg\{\hat{D}_1(\xi)\left[\frac{1}{2}+\tilde{G}(0,t,\xi,|d(\xi)|)\right] + \int\limits_{|d(\xi)|}^{t-|\xi|}\left[\frac{1}{2}+\tilde{G}(0,t,\xi,\tau)\right]$$

$$\times\left(\hat{D}_2(\xi,\tau)+k_1(\tau-|d(\xi)|)\hat{D}_1(\xi)+\int\limits_{|d(\xi)|}^{\tau} k_1(\tau-s)\hat{D}_2(\xi,s)ds\right)d\tau\Bigg\}d\xi+F(0,t), \quad (5.24)$$

Дифференцируя (5.24) по переменной t, учитывая четность подынтегральной функции и тот факт, что $W_2(0,t) = L[k_1, g_2(t)] - W_1(0,t)$, получаем

$$\tilde{c}_{12}(y_1^*(0,t))\hat{D}_1(y_1^*(0,t)){y_1^*}'(0,t) + \int\limits_0^{y_1^*(0,t)} \tilde{c}_{12}(\xi)K(\xi,t)d\xi$$

$$= F'(0,t) - L[k_1, g_2'(t)] + W_1'(0,t), \quad (5.25)$$

где

$$K(\xi,t) = 2\hat{D}_1(\xi)\tilde{G}_t'(0,t,\xi,|d(\xi)|)$$

$$+\hat{D}_2(\xi,t-|\xi|) + k_1(t-|\xi|-|d(\xi)|)\hat{D}_1(\xi) + \int\limits_{|d(\xi)|}^{t-|\xi|}\Big[k_1(t-|\xi|-\tau)\hat{D}_2(\xi,\tau)$$

$$+2\tilde{G}_t'(0,t,\xi,\tau)\Big[\hat{D}_2(\xi,\tau)+k_1(\tau-|d(\xi)|)\hat{D}_1(\xi)+\int\limits_{|d(\xi)|}^{\tau}k_1(\tau-s)\hat{D}_2(\xi,s)ds\Big]d\tau, \quad (5.26)$$

здесь учитывалось, что $W_2'(0,t) = L[k_1, g_2'(t)] - W_1'(0,t)$ в силу (5.8), (5.9).

Покажем, что $-\hat{D}_1(y_1^*(0,t))\cdot{y_1^*}'(0,t) > 0$, если пренебречь третьей компонентой памяти, то есть принять $k_3(t) \equiv 0 \Rightarrow r_3(t) \equiv 0$ (с физической точки зрения это оправдано тем, что в некоторых средах с памятью может отсутствовать вязкость по вертикальному направлению).

Действительно, так как ${y_1^*}'(0,t)$ удовлетворяет равенству $t - \xi = d(\xi)$, то

$$1 - {y_1^*}'(0,t) = d'(y_1^*(0,t)){y_1^*}'(0,t) \ \Rightarrow\ {y_1^*}'(0,t) = \frac{1}{1+d'(y_1^*(0,t))},$$

$$d'(y_1^*(0,t)) = \sqrt{\frac{c_{44}(\psi_1^{-1}(y_1^*(0,t)))}{c_{11}(\psi_1^{-1}(y_1^*(0,t)))}},$$

следовательно, ${y_1^*}'(0,t) > 0$. Функция $-\hat{D}_1(y_1^*(0,t)) > 0$ в силу (4.12), (4.13) и того факта, что $\tilde{W}(\psi_2(x_3), |\psi_2(x_3)|) \equiv 0$. Тогда (5.25) можно переписать в виде

$$\tilde{c}_{12}(y_1^*(0,t)) = \int\limits_0^{y_1^*(0,t)} \tilde{c}_{12}(\xi)\tilde{K}(\xi,t)d\xi + \tilde{F}(t), \quad (5.27)$$

$$\tilde{K}(\xi,t) = -\frac{K(\xi,t)}{\hat{D}_1(y_1^*(0,t)){y_1^*}'(0,t)},\ \ \tilde{F}(t) = \frac{F'(0,t) - L[k_1, g_2'(t)] + W_1'(0,t)}{\hat{D}_1(y_1^*(0,t)){y_1^*}'(0,t)}. \quad (5.28)$$

Здесь $\tilde{K}(\xi,t) \in C(\Omega(T))$, $\Omega(T) = \{(\xi,t) : 0 \le \xi \le t \le T/2\}$, что, очевидно, следует из непрерывности в этой области правой части (5.26).

Уравнение (5.27) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода.

Покажем, что $\tilde{F}(t) \in C[0,T]$. Продифференцируем (5.23) при $y=0$ по переменной t, учитывая четность подынтегральных функций:

$$F'(0,t) = \int\limits_0^{y_1^*(0,t)} \frac{i}{\rho s(\xi)} \Bigg[2c_{44}(x_3) D_1(x_3) \tilde{G}'_t(0,t,\xi,|d(\xi)|)$$

$$+\frac{dc_{44}}{dx_3}\tilde{U}(x_3, t-|\xi|) + c_{44}(x_3)\Big(D_2(x_3, t-|\xi|) + D_1(x_3) k_1(t-|\xi|-|d(\xi)|)\Big)$$

$$+\int\limits_{|d(\xi)|}^{t-|\xi|} k_1(t-|\xi|-s)\Big(\frac{dc_{44}}{dx_3}\tilde{U}(x_3,s) + c_{44}(x_3) D_2(x_3,s)\Big) ds \Bigg]_{x_3=\psi_1^{-1}(\xi)} d\xi$$

$$+2\int\limits_0^{y_1^*(0,t)} \int\limits_{|d(\xi)|}^{t-|\xi|} \tilde{G}'_t(0,t,\xi,\tau) \frac{i}{\rho s(\xi)} \Bigg[\frac{dc_{44}}{dx_3}\tilde{U}(x_3,\tau)$$

$$+c_{44}(x_3)\Big(D_2(x_3,\tau) + D_1(x_3) k_1(\tau - |d(\xi)|)\Big)$$

$$+\int\limits_{|d(\xi)|}^{\tau} k_1(\tau - s)\Big(\frac{dc_{44}}{dx_3}\tilde{U}(x_3,s) + c_{44}(x_3) D_2(x_3,s)\Big) ds \Bigg]_{x_3=\psi_1^{-1}(\xi)} d\tau d\xi. \qquad (5.29)$$

Из непрерывности правой части равенства (5.29) следует непрерывность левой части в области интегрирования.

Далее, $W_1'(0,t) \in C[0,T]$ в силу аналогии с (3.21) и непрерывности правой части равенства (3.28) при $y=0$. Таким образом, уравнение (5.27) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода относительно функции $c_{12}(y_1^*(0,t))$ с непрерывным ядром и непрерывным свободным членом. Как известно, в этом случае существует единственное непрерывное решение.

После определения $\tilde{c}_{12}(y_1^*(0,t)) \in C[0,T/2]$ функция $c_{12}(x_3)$ находится при $x_3 \in [0, \psi_1^{-1}(T/2)]$ из равенства $c_{12}(x_3) = \tilde{c}_{12}(\psi_1(x_3))$.

Замечание 2. Так как функции $c_{11},\ c_{12},\ c_{44}$ принадлежат классу Λ, то для разрешимости **обратной задачи** определения модулей упругости необходимо требовать справедливости неравенства, указанного в работе [2] и вытекающего из (5.25) при $t=0$:

$$\tilde{c}_{12}(+0)\hat{D}_1(0)) {y_1^*}'(0,+0) = -g_2'(+0)$$

$$\Rightarrow -\tilde{c}_{12}(+0)\frac{i}{2\rho c_{11}(+0)}\frac{g_1(+0)}{g_1(+0)+g_3(+0)} = -g_2'(+0)$$

$$\Rightarrow \max\,[-g_2'(+0), 2g_2'(+0)] < \frac{g_1(+0)}{2\rho[g_1(+0)+g_3(+0)]}$$

в силу $c_{11} > \max\,[-c_{12}, 2c_{12}]$.

Теорема 5 доказана. □

Докажем теорему 6.

Доказательство. Для простоты обозначим $\tilde{y} = y_1^*(0,t)$.

Рассмотрим два интегральных уравнения вида (5.27) со своими наборами данных $c_{11}^{(1)}(x_3)$, $c_{44}^{(1)}(x_3)$, $k_1^{(1)}(t)$, $g_2^{(1)}(t)$, $g_3^{(1)}(t)$ и $c_{44}^{(2)}(x_3)$, $c_{11}^{(2)}(x_3)$, $k_1^{(2)}(t)$, $g_2^{(2)}(t)$, $g_3^{(2)}(t)$ соответственно:

$$\tilde{c}_{12}^{(1)}(\tilde{y}) = \int\limits_0^{\tilde{y}} c_{12}^{(1)}(\xi)\tilde{K}^1(\xi,t)d\xi + \tilde{F}^{(1)}(t), \tag{5.30}$$

$$\tilde{c}_{12}^{(2)}(\tilde{y}) = \int\limits_0^{\tilde{y}} \tilde{c}_{12}^{(2)}(\xi)\tilde{K}^{(2)}(\xi,t)d\xi + \tilde{F}^{(2)}(t). \tag{5.31}$$

Из левой и правой частей (5.30) вычтем соответственно левую и правую части (5.31), имеем

$$\tilde{c}_{12}^1(\tilde{y}) - \tilde{c}_{12}^2(\tilde{y}) = \int\limits_0^{\tilde{y}} \Big[\Big(c_{12}^{(1)}(\xi) - c_{12}^{(2)}(\xi)\Big)\tilde{K}^1(\xi,t) + \Big(K^{(1)}(\xi,t) - K^{(2)}(\xi,t)\Big)c_{12}^{(2)}(\xi)\Big]d\xi$$
$$+\tilde{F}^{(1)}(t) - \tilde{F}^{(2)}(t). \tag{5.32}$$

Справедлива следующая оценка, вытекающая из (3.25), (3.28) при $(w_1^*(0,t))' \equiv W_1'(0,t) + f_1(t),\ F(t) \equiv \int_0^t f_1(s)ds$:

$$\|{W'}_1^{(1)}(0,t) - {W'}_1^{(2)}(0,t)\|(T) \le C_4(h_0,h_1,M_3,\rho,T)\cdot\Big(\|c_{44}^{(1)} - c_{44}^{(2)}\|_2(X) + \|g_2^{(1)} - g_2^{(2)}\|(T)$$
$$+\|g_3^{(1)} - g_3^{(2)}\|(T) + \|k_1^{(1)} - k_1^{(2)}\|_2(T)\Big), \tag{5.33}$$

далее из равенства (5.29) следует

$$\|{F'}_1^{(1)}(0,t) - {F'}_1^{(2)}(0,t)\|(T) \le C_5(h_0,h_1,M_3,\rho,T,\max_{(y,t)\in B_1(0,T)}\tilde{G}_t')$$
$$\times\Big(\|c_{44}^{(1)} - c_{44}^{(2)}\|_1(X) + \|c_{11}^{(1)} - c_{11}^{(2)}\|_2(X) + \|g_3^{(1)} - g_3^{(2)}\|_2(T) + \|k_1^{(1)} - k_1^{(2)}\|(T)\Big), \tag{5.34}$$

в силу следующих оценок при $k_3(t) \equiv 0$:

$$\|D_1^{(1)}(\tilde{y}) - D_1^{(2)}(\tilde{y})\|(T/2) \le C_6(h_0,h_1,\rho)\cdot\|c_{11}^{(1)} - c_{11}^{(2)}\|(X),$$
$$\|\tilde{U}^{(1)}(x_3,t) - \tilde{U}^{(2)}(x_3,t)\|_{C^1(\bigtriangledown(T))} \le C_7(h_0,h_1,\rho,T,M_2)$$
$$\times\Big(\|g_3^{(1)} - g_3^{(2)}\|_2(T) + \|c_{11}^{(1)} - c_{11}^{(2)}\|_2(X)\Big).$$

Рассмотрим $\tilde{F}^{(1)}(t) - \tilde{F}^{(2)}(t)$:

$$\tilde{F}^{(1)}(t) - \tilde{F}^{(2)}(t) = \frac{{F'}_1^{(1)}(0,t) - L[k_1^{(1)}, {g'}_2^{(1)}(t)] + {W'}_1^{(1)}(0,t)}{\hat{D}_1^{(1)}(\tilde{y})\tilde{y}'^{(1)}}$$
$$-\frac{F_1'^{(2)}(0,t) - L[k_1^{(2)}, g_2'^{(2)}(t)] + W_1'^{(2)}(0,t)}{\hat{D}_1^{(2)}(\tilde{y})\tilde{y}'^{(2)}}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю, переходя к разностям аналогично методике работ [1], [10] (в силу громоздкости процедуры выкладки опускаются), учитывая (5.33), (5.34), а также оценки

$$\|\hat{D}_1^{(1)}(\tilde{y}) - \hat{D}_1^{(2)}(\tilde{y})\|(T/2) \le C_8(h_0,h_1,\rho)\Big(\|c_{44}^{(1)} - c_{44}^{(2)}\|(X) + \|c_{11}^{(1)} - c_{11}^{(2)}\|(X)\Big),$$

$$\|\tilde{y}'^{(1)} - \tilde{y}'^{(2)}\|(T_2) \leq C_9(h_0, h_1)\Big(\|c_{44}^{(1)} - c_{44}^{(2)}\|(X) + \|c_{11}^{(1)} - c_{11}^{(2)}\|(X)\Big),$$

и применяя лемму Гронуолла к (5.32), получаем требуемую оценку (2.41). Теорема 6 доказана. □

References

[1] V.G. Yakhno, *Inverse problems for differential equations of elasticity*, Novosibirsk: Nauka, 1990. (in Russian) Zbl 0787.35124

[2] V.G. Yakhno and I.Z. Merazhov, *Direct problems and a one-dimensional inverse problem of electroelasticity for "slow" waves*, Siberian Adv. Math., **10**:1 (2000), 87–150. Zbl 0956.78005

[3] I.V. Bogachev , A.O. Vatul'yan , O.V. Yavruyan, *Identification of the properties of an inhomogeneous electroelastic medium*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, **76**:5 (2012), 506–510. Zbl 1270.74066

[4] G. Nakamura and G. Uhlmann, *Identification of Lame parameters by boundary observations*, Amer. J. of Math., **115**:5 (1993), 1161–1189. Zbl 0803.35164

[5] G. Nakamura and G. Uhlmann, *Global uniqueness for an inverse boundary value problems arising in elasticity*, Invent. Math., **118**:3 (1994), 457–474. Zbl 0814.35147

[6] A. Lorenzi, J.Sh. Ulekova , V.G. Yakhno, *An inverse problem in viscoelasticity*, J. Inv. Ill - posed Prob., **2**:2 (1994), 131–164. Zbl 0822.35151

[7] D.K. Durdiev, *An inverse problem of determining two coefficients for integro-differential equation*, Sib. Zh. Ind. Mat., **12**:3 (2009), 28–40. (in Russian) Zbl 1240.35575

[8] V.G. Romanov, *On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations*, Siberian Math. J., **55**:3 (2014), 503–510. Zbl 1302.35361

[9] Zh.D. Totieva, *The multidimensional problem of determining the density function for the system of viscoelasticity*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 635–644. (in Russian) Zbl 1370.35199

[10] Z.D.Totieva, *The problem of determining the piezoelectric module of electroviscoelasticity equation*, Math. Meth. Appl. Sci., **41**:16 (2018), 6409–6421. Zbl 06986300

[11] A. Lorenzi and V.G. Romanov, *Stability estimates for an inverse problem related to viscoelastic media*, J. Inv. Ill - Posed Problems, **14**:1 (2006), 57–82. Zbl 1097.45016

[12] J. Janno and L. Von Wolfersdorf, *An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel in viscoelasticity*, Inverse Problems, **17**:1 (2001), 13–24. Zbl 0983.35146

[13] F. Colombo and D. Guidetti, *Some results on the identification of memory kernels*, Oper. Theory: Adv. Appl., **216** (2011), 121–138.

[14] V.G. Romanov, *A two-dimensional inverse problem for the viscoelasticity equation*, Siberian Math. J., **53**:6 (2012), 1128–1138.

[15] V.G. Romanov, *Stability estimates for the solution to the problem of determining the kernel of a viscoelastic equation*, J. Appl. Ind. Math., **6**:3 (2012), 360–370. Zbl 1324.35211

[16] D.K. Durdiev and Zh.D. Totieva, *The problem of determining the one-dimensional kernel of the viscoelasticity equation*, Sib. Zh. Ind. Mat., **16**:2 (2013), 72–82. (in Russian) Zbl 1340.35382

[17] D.K. Durdiev and Z.D. Totieva, *The problem of determining the multidimensional kernel of the viscoelasticity equation*, Vladikavkaz. Mat. Zh., **17**:4 (2015), 18–43. (in Russian)

[18] D.K. Durdiev and Zh.Sh. Safarov, *Inverse problem of determining the one-dimensional kernel of the viscoelasticity equation in a bounded domain*, Math. Notes, **97**:6 (2015), 867–877. Zbl 1326.35375

[19] Zh.D. Tuaeva, *The multidimensional mathematical seismic model with memory in: Studies on Differential Equations and Mathematical Modelling*, VNC RAN, Vladikavkaz, 2008, 297–306. (in Russian)

[20] D.K. Durdiev, *Inverse Problems for Media with Aftereffects*, Tashkent: Turon–Ikbol, 2014. (in Russian)

Zhanna Dmitrievna Totieva
Southern Mathematical Institute of Vladikavkaz Scientific Centre
of Russian Academy of Sciences,
93a, Markova str.,
Vladikavkaz, 362002, Russia
North Ossetian State University,
46, Vatutina str.,
Vladikavkaz, 362025, Russia
E-mail address: jannatuaeva@inbox.ru