S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 812–825 (2019) УДК 517.95
DOI 10.33048/semi.2019.16.054 MSC 35Q93+65N21+78A46

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД В ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ МАГНИТНОЙ МАСКИРОВКИ

Ю.Э. СПИВАК

Abstract. We consider the optimization problem for the 2D model of magnetic scattering by a permeable obstacle having the form of a circular ring. Problems of this type arise while developing the design technologies of magnetic cloaking devices using the optimization method. The solvability of direct and control problems for the magnetic scattering model under study is proved. The sufficient conditions which provide local uniqueness and stability of optimal solutions are established.

Keywords: magnetic scattering problem, invisibility, cloaking, optimization problem, solvability, uniqueness, stability estimates.

1. Введение

Начиная с пионерских работ [1, 2, 3], устройства невидимости и метаматериалы являются предметом обширных исследований среди физиков и математиков, о чем свидетельствует большой цикл работ, выполненный в этой области. В первых статьях этого цикла были предложены различные подходы для решения задач электромагнитной маскировки материальных тел, основанные на разработанном в [2] методе оптических преобразований. Позже основные результаты из теории электромагнитной маскировки были перенесены на случай акустической маскировки [4, 5, 6], а далее на случай маскировки от статических магнитных, электрических либо тепловых полей.

В частности, ряд работ (см., например, [7, 8]) посвящен дизайну средств магнитной невидимости в виде специальной маскировочной оболочки. На основе

Spivak, Yu.E., Optimization method in 2D magnetic cloaking problems.

Работа поддержана программой “Приоритетные научные исследования в интересах комплексного развития Дальневосточного отделения РАН” (проект 18-5-064).

Поступила 11 февраля 2018 г., опубликована 11 июня 2019 г.

разработанного дизайна в [7] было построено решение, для которого магнитные проницаемости μ_r и μ_φ маскировочной оболочки, имеющей вид кольца $a < r < b$, определяются формулами

$$\mu_r = \frac{r-a}{r}, \quad \mu_\varphi = \frac{r}{r-a}. \tag{1}$$

Следует, однако, отметить, что решение в виде (1) обладает рядом недостатков. Основной из них связан с сингулярностью поведения компонент μ_r и μ_φ на внутренней границе оболочки $r = a$, поскольку $\mu_\varphi \to \infty$, $\mu_r \to 0$ при $r \to a$. Ясно, что техническая реализация полученных решений связана с огромными трудностями, а фактически не представляется возможной из-за отсутствия в природе материалов, отвечающих найденным решениям. Не менее сложные проблемы с реализацией решений возникают и в случае электромагнитной либо акустической маскировки [9, гл.1], [10].

Один из способов преодоления указанных трудностей состоит в замене точных решений задачи маскировки, описывающих сингулярные параметры анизотропной среды, заполняющей искомую маскировочную оболочку, приближенными (несингулярными) параметрами и исследовании свойств маскировочных устройств на основе указанных приближений. Указанный подход развивался в ряде работ (см., например, [11, 12, 13, 14, 15]). Альтернативный подход основан на использовании оптимизационного метода решения обратных задач, к классу которых относятся задачи маскировки. Сущность этого подхода заключается в замене исходной обратной задачи задачей минимизации определенного функционала качества, адекватно отвечающего поставленной обратной задаче. Данный метод, на который в задачах маскировки ссылаются как на метод обратного дизайна [9, 16], применялся в работах [17, 18, 19], посвященных численному анализу 2D задач дизайна слоистых маскировочных оболочек, и в [20, 21, 22, 23, 25, 24] при теоретическом исследовании задач электромагнитной либо акустической маскировки. Работы [26, 27] посвящены изучению проблемы невидимости в томографии.

Оптимизационный метод применяется и в настоящей работе при теоретическом анализе задачи магнитной маскировки, в которой маскировочный эффект достигается за счет надлежащего выбора функциональных параметров неоднородной анизотропной среды, заполняющей искомую оболочку.

2. Постановка задачи сопряжения

Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ область Ω, имеющую в полярных координатах (r, φ) вид кольца $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : a < r = |\mathbf{x}| < b\}$, где a и b – положительные константы. Будем считать, что область Ω заполнена неоднородной анизотропной, в общем случае, средой, магнитные свойства которой описываются тензором магнитной проницаемости $\boldsymbol{\mu}$, тогда как области Ω_i и Ω_e^∞ заполнены одной и той же однородной изотропной средой с постоянной магнитной проницаемостью $\mu_0 > 0$.

Предположим, что вне некоторого круга $B_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < R\}$, содержащего область Ω внутри себя, сосредоточены источники, создающие в B_R внешне приложенное магнитное поле $\mathbf{H}_a = -\mathrm{grad}\Phi_a$, отвечающее потенциалу Φ_a. Наличие оболочки $(\Omega, \boldsymbol{\mu})$ приводит к появлению дополнительного поля Φ_s во внешности $\Omega_e^\infty = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| > b\}$, а также поля Φ_0 в области Ω и поля Φ_i во внутренней области $\Omega_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < a\}$ (см. рис. 1). Указанные поля Φ_i,

Φ_0 и Φ_s являются решением следующей задачи сопряжения:

$$\mu_0 \Delta\Phi_i = 0 \ \text{ в } \ \Omega_i, \ \ \mu_0 \Delta\Phi_s = 0 \ \text{ в } \ \Omega_e^\infty, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\mu} \operatorname{grad}\Phi_0) = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \tag{3}$$

$$\Phi_i = \Phi_0, \ \mu_0 \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = (\boldsymbol{\mu}\nabla\Phi_0)\cdot\mathbf{n} \quad \text{на } \ \Gamma_i,$$

$$\Phi_a + \Phi_s = \Phi_0, \ \mu_0 \frac{\partial(\Phi_a + \Phi_s)}{\partial n} = (\boldsymbol{\mu}\nabla\Phi_0)\cdot\mathbf{n} \quad \text{на } \ \Gamma_e, \tag{4}$$

$$\Phi_s(\mathbf{x}) = O(1) \ \text{ при } \ |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{5}$$

Следуя [8, 9], будем ссылаться на (2)–(5) как на задачу магнитного рассеяния.

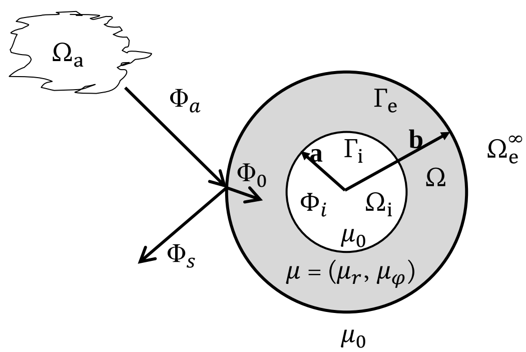

Рис. 1. Геометрические характеристики задачи маскировки

При исследовании задачи сопряжения (2)–(5) и задачи управления будем существенно использовать ряд функциональных пространств. Положим $\Omega_e = \Omega_e^\infty \cap B_R$. Будем использовать пространство $H^1(D)$, где D – одна из областей B_R, $\Omega_i, \Omega, \Omega_e$, а также пространства $L^\infty(\Omega)$, $H^s(\Omega)$, $s > 0$, $L^2(Q)$, $H^{1/2}(\Gamma_R)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_R)$, где $Q \subset B_R$ – произвольное открытое подмножество, Γ_R – граница круга B_R (см. рис. 2). Нормы и скалярные произведения в $H^1(D)$, $H^s(\Omega)$, $L^2(Q)$, $H^{1/2}(\Gamma_R)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_R)$ будут обозначаться через $\|\cdot\|_{1,D}$, $(\cdot,\cdot)_{1,D}$, $\|\cdot\|_{s,\Omega}$, $(\cdot,\cdot)_{s,\Omega}$, $\|\cdot\|_Q$, $(\cdot,\cdot)_Q$, $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_R}$ и $\|\cdot\|_{-1/2,\Gamma_R}$. Положим $L^\infty_{\mu_0}(\Omega) = \{\mu \in L^\infty(\Omega) : \mu(x) \ge \mu_0\}$, $H^s_{\mu_0}(\Omega) = \{\mu \in H^s(\Omega) : \mu(x) \ge \mu_0\}$, $\mu_0 = \text{const} > 0$. Хорошо известно в силу теоремы вложения, что справедливо непрерывное и компактное вложение $H^s(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ при $s > 1$ и справедлива оценка

$$\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_s \|\mu\|_{s,\Omega} \ \ \forall \mu \in H^s(\Omega), s > 1. \tag{6}$$

Здесь C_s – константа, зависящая от $s > 1$ и Ω. Нам также потребуется подпространство $H(\Omega_e) = \{\Phi \in H^1(\Omega_e) : \Delta\Phi = 0 \ \text{ в } \ \mathcal{D}(\Omega_e)\}$, наделенное нормой $\|\cdot\|_{\Omega_e} = \|\cdot\|_{H^1(\Omega_e)}$. Пространство $H(\Omega_e)$ будет служить для описания сужений внешних полей Φ_a на область Ω_e.

Отметим, что в силу теоремы о следах для любой функции $\Phi \in H^1(B_R)$ существует след $\Phi|_{\Gamma_R} \in H^{1/2}(\Gamma_R)$, тогда как для любой функции $\Phi^e \in H(\Omega_e)$ существует нормальный след $\partial\Phi^e/\partial n|_{\Gamma_R} \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$, и справедливы следующие оценки:

$$\|\Phi\|_{1/2,\Gamma_R} \le C_R \|\Phi\|_X \ \ \forall \Phi \in H^1(B_R), \tag{7}$$

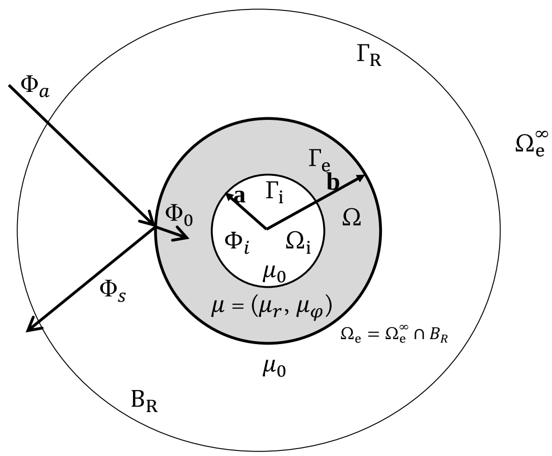

Рис. 2. Введение искусственной границы Γ_R

$$\|\partial\Phi^e/\partial n\|_{-1/2,\Gamma_R} \leq C'_R\|\Phi^e\|_{1,\Omega_e} \quad \forall\Phi^e \in H(\Omega_e). \tag{8}$$

Здесь C_R и C'_R – константы, зависящие от Ω и R, но не зависящие от $\Phi \in X$ и $\Phi^e \in H(\Omega_e)$.

Будем предполагать ниже, что тензор $\boldsymbol{\mu}$, описывающий магнитные свойства среды, заполняющей оболочку Ω, и сужение Φ^e поля Φ_a на Ω_e удовлетворяют условиям:

(i) тензор $\boldsymbol{\mu}$ диагонален в полярных координатах r, φ, а его диагональные компоненты (радиальная и угловая магнитные проницаемости) μ_r и μ_φ удовлетворяют условиям: $\mu_r \in L^\infty_{\mu_r^0}(\Omega)$, $\mu_\varphi \in L^\infty_{\mu_\varphi^0}(\Omega)$, $\mu_r^0 = \text{const} > 0$, $\mu_\varphi^0 = \text{const} > 0$;

(ii) $\Phi^e \equiv \Phi_a|_{\Omega_e} \in H(\Omega_e)$.

Приведенное выше предположение (i) позволяет существенно упростить исследование сформулированной выше задачи магнитного рассеяния, записав уравнение для Φ_0 в (2) в полярных координатах r, φ. Действительно, напомним сначала, что в полярных координатах $\text{grad}\Phi_0$ и произведение диагонального (в полярных координатах) тензора $\boldsymbol{\mu} = \text{diag}(\mu_r, \mu_\varphi)$ на вектор $\text{grad}\Phi_0$ выражаются формулами (см, например, [9, с.101])

$$\text{grad}\Phi_0 = \frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \quad \boldsymbol{\mu}\text{grad}\Phi_0 = \mu_r\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\mathbf{e}_r + \mu_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi. \tag{9}$$

Здесь $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\varphi$ – единичные векторы полярного базиса. Применяя к вектору $\boldsymbol{\mu}\text{grad}\Phi_0$ операцию div для 2D векторного поля $\mathbf{v}$, приходим с учетом формулы для дивергенции в полярных координатах к уравнению

$$\text{div}(\boldsymbol{\mu}\text{grad}\Phi_0) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mu_r\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\frac{\mu_\varphi}{r}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\varphi}) = 0, \tag{10}$$

тогда как условия сопряжения (4) принимают вид

$$\Phi_i = \Phi_0,\ \mu_0\frac{\partial\Phi_i}{\partial r} = \mu_r\frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \text{ при } r = a,$$

$$\Phi_a + \Phi_s = \Phi_0,\ \mu_0\frac{\partial(\Phi_a + \Phi_s)}{\partial r} = \mu_r\frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \text{ при } r = b. \tag{11}$$

В результате исходная задача сопряжения (2)–(5) свелась к нахождению тройки функций: Φ_i в Ω_i, Φ_0 в Ω и Φ_s в Ω_e^∞, удовлетворяющих уравнениям (2) в $\Omega_i \cup \Omega_e^\infty$, (10) в Ω, условиям сопряжения (11) и условию на бесконечности (5). Для краткости ниже на задачу (2), (5), (10), (11) будем ссылаться как на задачу 1.

Поскольку потенциал Φ определяется с точностью до аддитивной константы, то условимся ниже не различать функции пространства $H^1(B_R)$, отличающиеся друг от друга на аддитивную константу. С учетом этого ниже основную роль будет играть фактор-пространство $X = H^1(B_R) \setminus \mathbb{R}$ с нормой:

$$\|\Phi\|_X^2 = \|\nabla\Phi\|_{\Omega_i}^2 + \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right\|_\Omega^2 + \left\|\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right\|_\Omega^2 + \|\nabla\Phi\|_{\Omega_e}^2. \tag{12}$$

Можно показать, что пространство $X = H^1(B_R) \setminus \mathbb{R}$ является гильбертовым по норме (12).

Следующий этап исследования сформулированной выше задачи 1 состоит в том, чтобы свести ее к эквивалентной краевой задаче, рассматриваемой в ограниченной области B_R. С этой целью введем аналогично [21, 22, 28] оператор Дирихле-Неймана $T : H^{1/2}(\Gamma_R) \to H^{-1/2}(\Gamma_R)$, ставящий в соответствие каждой функции $h \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ функцию $\partial\tilde{\Phi}/\partial n \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$, где $\tilde{\Phi}$ – решение внешней задачи Дирихле для уравнения $\Delta\Phi = 0$ в $\Omega_e^\infty \backslash B_R$ при краевом условии $\Phi|_{\Gamma_R} = h$, удовлетворяющее условию (5). Хорошо известно, что $T \in L(H^{1/2}(\Gamma_R), H^{-1/2}(\Gamma_R))$, $\|T\| \le C_T$ и $\int_{\Gamma_R}(TS)Sd\sigma \le 0$ для всех $S \in H^{1/2}(\Gamma_R)$. Здесь и ниже интеграл $\int_{\Gamma_R}$ обозначает отношение двойственности между $H^{-1/2}(\Gamma_R)$ и $H^{1/2}(\Gamma_R)$, C_T – константа, зависящая от Ω и R. Отметим, что задача 1, рассматриваемая на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, эквивалентна задаче нахождения тройки функций: Φ_0 из уравнения (10) в области Ω, Φ_i из первого уравнения в (2) в области Ω_i и Φ_s из уравнения $\mu_0\Delta\Phi_s = 0$ в Ω_e при условиях сопряжения (11) и следующем дополнительном условии для поля Φ_s на Γ_R:

$$\partial\Phi_s/\partial n = T\Phi_s \text{ на } \Gamma_R. \tag{13}$$

Ниже, наряду с уравнением для Φ_s мы будем также использовать уравнение для функции $\Phi_e = \Phi^e + \Phi_s = \Phi_a|_{\Omega_e} + \Phi_s$, имеющее в силу условия $\Delta\Phi^e = 0$ в (ii) вид

$$\mu_0\Delta\Phi_e = 0 \text{ в } \Omega_e. \tag{14}$$

Для краткости ниже на задачу нахождения тройки функций (Φ_i, Φ_0, Φ_e), удовлетворяющих первому уравнению (2) в Ω_i, (10) в Ω и (14) в Ω_e, а также граничным условиям (11) и (13), будем ссылаться как на задачу 2.

Выведем теперь слабую формулировку (при заданных коэффициентах μ_r и μ_φ) задачи 2. Пусть $S \in X$ – произвольная тестовая функция. Умножим первое уравнение в (2) и уравнение (14), рассматриваемые в областях Ω_i и Ω_e, на $S|_{\Omega_i}$ и $S|_{\Omega_e}$, соответственно, уравнение (10), рассматриваемое в Ω, – на $S|_\Omega$, проинтегрируем по $\Omega_i \cup \Omega_e$ либо по Ω и применим соответствующие формулы Грина. Складывая полученные тождества и используя граничные условия в (11) и (13), приходим к следующему тождеству для тройки $\Phi = (\Phi_i, \Phi_0, \Phi_e)$, где $\Phi_e = \Phi^e + \Phi_s = \Phi_a|_{\Omega_e} + \Phi_s$:

$$a_\mu(\Phi, S) \equiv a_0(\Phi, S) + a(\mu_r, \mu_\varphi; \Phi, S) = \langle F, S\rangle \ \ \forall S \in X. \tag{15}$$

Здесь и ниже μ обозначает пару (μ_r, μ_φ), $a_0(\cdot,\cdot)$, $a(\mu_r,\mu_\varphi;\cdot,\cdot)$ и F – билинейные и линейная формы на X, определяемые формулами

$$a_0(\Phi, S) = \mu_0 \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} \nabla\Phi \cdot \nabla S d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_R} (T\Phi) S d\sigma, \tag{16}$$

$$a(\mu_r, \mu_\varphi; \Phi, S) = \int_\Omega \left(\mu_r \frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\mu_\varphi}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\frac{\partial S}{\partial\varphi} \right) r dr d\varphi, \tag{17}$$

$$\langle F, S\rangle = -\int_{\Gamma_R} T\Phi^e S d\sigma + \int_{\Gamma_R} \frac{\partial\Phi^e}{\partial n} S d\sigma. \tag{18}$$

Тождество (15) представляет собой слабую формулировку задачи 2, а ее решение $\Phi = (\Phi_i, \Phi_0, \Phi_e) \in X$ будем называть слабым решением задачи 2. Рассуждая, как в [22], несложно показать, что введенное слабое решение обладает свойством допустимости: оно удовлетворяет уравнениям (2) и (3) в смысле обобщенных функций, а также – граничным условиям (11) и (13) в смысле следов.

Используя неравенство Гельдера и формулу (12) для нормы $\|\cdot\|_X$, выводим оценки:

$$\left|\int_\Omega r\mu_r \frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial S}{\partial r} dr d\varphi\right| \le \|\mu_r\|_{L^\infty(\Omega)} \|\frac{\partial\Phi}{\partial r}\|_\Omega \|\frac{\partial S}{\partial r}\|_\Omega \le \|\mu_r\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\Phi\|_\Omega \|\nabla S\|_\Omega \le$$
$$\le \|\mu_r\|_{L^\infty(\Omega)} \|\Phi\|_X \|S\|_X,$$
$$\int_\Omega \frac{\mu_\varphi}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\frac{\partial S}{\partial\varphi} dr d\varphi \le \|\mu_\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\|_\Omega \|\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial\varphi}\|_\Omega \le \|\mu_\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\Phi\|_\Omega \|\nabla S\|_\Omega \le$$
$$\le \|\mu_\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\Phi\|_X \|S\|_X.$$

Из этих оценок вытекает, что

$$|a(\mu_r, \mu_\varphi; \Phi, S)| \le (\|\mu_r\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mu_\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}) \|\Phi\|_X \|S\|_X \quad \forall \Phi, S \in X. \tag{19}$$

Кроме того, используя (7), (8), выводим из (16)

$$\left|\int_{\Gamma_R} (T\Phi) S d\sigma\right| \le \|T\Phi\|_{-1/2,\Gamma_R} \|S\|_{1/2,\Gamma_r} \le C_T C_R^2 \|\Phi\|_X \|S\|_X, \tag{20}$$

$$|a_0(\Phi, S)| \le (\mu_0 + C_T C_R^2) \|\Phi\|_X \|S\|_X, \tag{21}$$

$$|\langle F, S\rangle| \le (\|T\| \|\Phi^e\|_{1/2,\Gamma_R} + \|\partial\Phi^e/\partial n\|_{-1/2,\Gamma_R}) \|S\|_{1/2,\Gamma_R} \le$$
$$\le (C_T C_R + C'_R) C_R \|\Phi^e\|_{1,\Omega_e} \|S\|_X, \tag{22}$$

$$\left|\mu_0 \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} \nabla\Phi \cdot \nabla S d\mathbf{x}\right| \le \mu_0 \|\Phi\|_X \|S\|_X. \tag{23}$$

Из этих оценок следует, что формы a_0 и F непрерывны на X, причем

$$\|a_0\| \le C_0,\ \|F\|_{X^*} \le C_0 \|\Phi^e\|_{1,\Omega_e},\ C_0 = \max[\mu_0 + C_T C_R^2, (C_T C_R + C'_R) C_R)]. \tag{24}$$

Здесь X^* – двойственное к X.

Предположим теперь, что $\mu_r \in L^\infty_{\mu_r^0}(\Omega)$, $\mu_\varphi \in L^\infty_{\mu_\varphi^0}(\Omega)$, где $\mu_r^0 > 0$, $\mu_\varphi^0 > 0$. Тогда имеем

$$\int_\Omega r\mu_r \frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} dr d\varphi \ge \mu_r^0 \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right\|_\Omega^2, \quad \int_\Omega \frac{\mu_\varphi}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} dr d\varphi \ge \mu_\varphi^0 \left\|\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right\|_\Omega^2,$$

$$a_0(\Phi,\Phi) = \mu_0 \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} |\nabla \Phi|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_R} (T\Phi)\Phi d\sigma \geq \mu_0 \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} |\nabla \Phi|^2 \, d\mathbf{x} \; \forall \Phi \in X.$$

Из этих оценок и определения нормы (12) в пространстве X вытекает, что

$$a_\mu(\Phi,\Phi) \geq \overline{\mu} \|\Phi\|_X^2 \; \forall \Phi \in X, \;\; \overline{\mu} = \min(\mu_0, \mu_r^0, \mu_\varphi^0). \tag{25}$$

Отметим, что билинейная форма a_μ, введенная в (15), определяет линейный оператор $A_\mu : X \to X^*$, действующий по формуле

$$\langle A_\mu \Phi, S \rangle = a_\mu(\Phi, S) \equiv a_0(\Phi, S) + a(\mu_r, \mu_\varphi; \Phi, S), \tag{26}$$

причем задача (15) эквивалентна операторному уравнению

$$A_\mu \Phi = F. \tag{27}$$

Из неравенств (19), (21) вытекает, что при выполнении условия (i) билинейная форма a_μ, введенная в (15), непрерывна на $X \times X$, а из (25) следует, что a_μ коэрцитивна на X. В таком случае, из теоремы Лакса-Мильграма вытекает, что оператор $A_\mu : X \to X^*$ – изоморфизм, причем обратный $A_\mu^{-1} : X^* \to X$ к нему также является изоморфизмом. Полагая $C_\mu = \|A_\mu^{-1}\|$, отметим, что в силу теоремы Лакса-Мильграма $C_\mu \leq C_1 = (1/\overline{\mu})$. С учетом этого выводим, что для любого элемента $F \in X^*$ операторное уравнение (27) имеет единственное решение $\Phi_\mu = A_\mu^{-1}(F) \in X$, для которого справедлива оценка $\|\Phi_\mu\|_X \leq C_1 \|F\|_{X^*}$. Отсюда следует в силу второй оценки в (24), что для любого поля $\Phi^e \in H(\Omega_e)$ задача (15) имеет единственное решение $\Phi_\mu \in X^*$, и справедлива оценка

$$\|\Phi_\mu\|_X \leq C_2 \|\Phi^e\|_{1,\Omega_e}, \;\; C_2 = C_0 C_1. \tag{28}$$

Подчеркнем, что константы C_1 и C_2 в (28) зависят от констант R, μ_0, μ_r^0 и μ_φ^0, но не зависят от функций μ_r и μ_φ, удовлетворяющих условию (i). Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда для любой пары* $\mu = (\mu_r, \mu_\varphi) \in L^\infty_{\mu_r^0}(\Omega) \times L^\infty_{\mu_\varphi^0}(\Omega)$*:*

1) оператор $A_\mu : X \to X^*$*, определенный в (26), осуществляет изоморфизм, причем для обратного оператора* $A_\mu^{-1} : X^* \to X$ *справедлива оценка* $\|A_\mu^{-1}\| \leq C_1 \equiv (1/\overline{\mu})$*, где константа* $\overline{\mu}$ *определена в (25);*

2) для любого внешнего поля $\Phi^e \in H(\Omega_e)$ *задача (15) имеет единственное решение* $\Phi_\mu \in X$*, для которого справедлива оценка (28) с константой* C_2*, не зависящей от* (μ_r, μ_θ)*.*

Ниже, наряду с уравнением (27), будем рассматривать операторное уравнение

$$A_\mu^* \Psi = \hat{F}, \;\; \hat{F} \in X^*. \tag{29}$$

Здесь $A_\mu^* : X \to X^*$ – сопряженный к $A_\mu : X \to X^*$ оператор, определяемый формулой $\langle A_\mu^* \Psi, \Phi \rangle = a_\mu(\Phi, \Psi) = \langle A_\mu \Phi, \Psi \rangle$ для всех $(\Phi, \Psi) \in X \times X$. Из свойств сопряженных операторов и теоремы 1 вытекает следующий результат:

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда:*

1) оператор $A_\mu^* : X \to X^*$*, сопряженный к* A_μ*, осуществляет изоморфизм;*

2) для любого элемента $\hat{F} \in X^*$ *уравнение (29) имеет единственное решение* $\Psi \in X$*, причем для этого решения справедлива оценка* $\|\Psi\|_X \leq C_1 \|\hat{F}\|_{X^*}$*.*

3. Формулировка обратной задачи. Применение оптимизационного метода. Вывод системы оптимальности

Напомним, что целью данной статьи является анализ обратной задачи для рассматриваемой модели магнитного рассеяния, возникающей при разработке технологий дизайна устройств магнитной маскировки. Для достижения указанной цели мы применим метод оптимизации [29]. Этот подход основан на минимизации функционала, который точно соответствует обратной задаче дизайна устройства приближенной маскировки [9]. В результате исходная задача маскировки сводится к исследованию соответствующей задачи управления, с использованием хорошо известных методов решения экстремальных задач. В качестве функционала качества выберем следующий:

$$I(\Phi) = \|\Phi - \Phi^d\|_Q^2 = \int_Q (\Phi - \Phi^d)^2 dx. \tag{30}$$

Здесь $Q \subset \Omega_i \cup \Omega_e$ – некоторое ограниченное открытое множество, функция $\Phi^d \in L^2(Q)$ моделирует заданный в Q потенциал магнитного поля. О других возможных функционалах качества можно прочитать в [21, 22]. В качестве управлений выберем компоненты μ_r и μ_φ тензора $\boldsymbol{\mu}$ магнитной проницаемости анизотропной среды, заполняющей область Q.

Будем предполагать, что управления μ_r и μ_φ могут изменяться в некоторых множествах K_1 и K_2, удовлетворяющих следующему условию:

(j) $K_1 \subset H^s_{\mu_r^0}(\Omega)$, $\mu_r^0 = \text{const} > 0$, $K_2 \subset H^s_{\mu_\varphi^0}(\Omega)$, $\mu_\varphi^0 = \text{const} > 0$, $s > 1$.

Полагая $K = K_1 \times K_2$, $\mu = (\mu_r, \mu_\varphi)$, введем оператор $G : X \times K \to X^*$, действующий по формуле

$$\langle G(\Phi, \mu), S\rangle = \langle A_\mu \Phi, S\rangle - \langle F, S\rangle \equiv a_\mu(\Phi, S) - \langle F, S\rangle \ \ \forall S \in X. \tag{31}$$

Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$J(\Phi, \mu) \equiv \frac{\alpha_0}{2} I(\Phi) + \frac{\alpha_1}{2}\|\mu_r\|^2_{s,\Omega} + \frac{\alpha_2}{2}\|\mu_\varphi\|^2_{s,\Omega} \to \inf,\ G(\Phi, \mu) = 0,\ (\Phi, \mu) \in X \times K. \tag{32}$$

Здесь $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ – неотрицательные параметры, которые служат для регулирования относительной важности каждого из слагаемых в (32). Другая цель введения параметров α_l состоит в обеспечении единственности и устойчивости оптимальных решений (см. ниже). Положим $Z_{ad} = \{(\Phi, \mu) \in X \times K : G(\Phi, \mu) = 0\}$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (i), (ii), (j). Тогда задача (32) имеет, по крайней мере, одно решение.*

Доказательство. Обозначим через $(\Phi_m, \mu_m) \in Z_{ad}$, $\mu_m = (\mu_r^m, \mu_\varphi^m)$, $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ минимизирующую последовательность для функционала J, для которой выполняются соотношения

$$a_0(\Phi_m, S) + a(\mu_r^m, \mu_\varphi^m; \Phi_m, S) = \langle F, S\rangle \ \forall S \in X, \tag{33}$$

$$\lim_{m\to\infty} J(\Phi_m, \mu_m) = \inf_{(\Phi,\mu)\in Z_{ad}} J(\Phi, \mu) \equiv J^*.$$

В силу условий (j) для всех $m \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$\|\mu_r^m\|_{s,\Omega} \le c_1, \quad \|\mu_\varphi^m\|_{s,\Omega} \le c_2. \tag{34}$$

Здесь и ниже c_1, c_2, c_3 – некоторые константы, не зависящие от m. Из (34) и теоремы 1 вытекает, что $\|\varphi_m\|_X \le c_3$. Из этой оценки и (34) вытекает, что существуют слабые пределы $\mu_r^* \in K_1$, $\mu_\varphi^* \in K_2$, $\Phi^* \in X$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\mu_r^m\}$, $\{\mu_\varphi^m\}$, $\{\Phi_m\}$. Отсюда и из компактности вложения $H^s(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ при $s > 1$ вытекает, что $\mu_r^m \to \mu_r^*$, $\mu_\varphi^m \to \mu_\varphi^*$ сильно в $L^\infty(\Omega)$, тогда как $\Phi_m \to \Phi^*$ слабо в X.

Покажем, что $G(\Phi^*, \mu_r^*, \mu_\varphi^*) = 0$, т.е., что

$$a_0(\Phi^*, S) + a(\mu_r^*, \mu_\varphi^*; \Phi^*, S) = \langle F, S\rangle \ \ \forall S \in X. \tag{35}$$

С этой целью перейдем в (33) к пределу при $m \to \infty$. Ясно, что линейное слагаемое $a_0(\Phi_m, S)$ переходит в слагаемое $a_0(\Phi^*, S)$ при $m \to \infty$, тогда как для разности $a(\mu_r^m, \mu_\varphi^m, \Phi^m, S) - a(\mu_r^*, \mu_\varphi^*, \Phi^*, S)$ имеем

$$|a(\mu_r^m, \mu_\varphi^m, \Phi^m, S) - a(\mu_r^*, \mu_\varphi^*, \Phi^*, S)| =$$

$$\left|\int_\Omega \left(r\mu_r^m \frac{\partial \Phi^m}{\partial r}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\mu_\varphi^m}{r}\frac{\partial \Phi^m}{\partial \varphi}\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right) drd\varphi - \int_\Omega \left(r\mu_r^* \frac{\partial \Phi^*}{\partial r}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\mu_\varphi^*}{r}\frac{\partial \Phi^*}{\partial \varphi}\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right) drd\varphi\right| =$$

$$= \left|\int_\Omega \left(\frac{\partial \Phi^m}{\partial r} - \frac{\partial \Phi^*}{\partial r}\right) r\mu_r^* \frac{\partial S}{\partial r} drd\varphi + \int_\Omega \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Phi^m}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi^*}{\partial \varphi}\right)\mu_\varphi^* \frac{\partial S}{\partial r} drd\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_\Omega r(\mu_r^m - \mu_r^*)\frac{\partial \Phi^m}{\partial r}\frac{\partial S}{\partial r} drd\varphi + \int_\Omega (\mu_\varphi^m - \mu_\varphi^*)\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi^m}{\partial \varphi}\frac{\partial S}{\partial \varphi} drd\varphi\right| \ \ \forall S \in X. \tag{36}$$

Поскольку $\Phi^m \to \Phi^*$ слабо в X, то первые два интеграла в правой части (36) стремятся к нулю при $m \to \infty$. Кроме того, из сильной сходимости $\mu_r^m \to \mu_r^*$, $\mu_\varphi^m \to \mu_\varphi^*$ в $L^\infty(\Omega)$ следует, что последние два интеграла в (36) стремятся к нулю при $m \to \infty$. Поэтому, переходя к пределу в (33) при $m \to \infty$, приходим к (35). Это означает, что $G(\Phi^*, \mu^*) = 0$, где $\mu^* = (\mu_r^*, \mu_\varphi^*)$. Поскольку функционал $J(\Phi)$ слабо полунепрерывен снизу на $X \times K$, то выводим, что $J(\Phi^*, \mu^*) = J^*$. Это доказывает теорему. □

Выведем теперь необходимые условия оптимальности для задачи (32). Для этого воспользуемся экстремальным принципом в гладко-выпуклых экстремальных задачах [30]. Предварительно вычислим производную Фреше по Φ от оператора $G : X \times K \to X^*$, определенного в (31). Из линейности оператора G по Φ вытекает, что производная Фреше $G'_\Phi(\hat{\Phi}, \hat{\mu})$ в каждой точке $(\hat{\Phi}, \hat{\mu}) \in X \times K$, где $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_r, \hat{\mu}_\varphi)$, определяется соотношением $G'_\Phi(\hat{\Phi}, \hat{\mu}) = \hat{A} \equiv A_{\hat{\mu}}$. Здесь оператор $A_{\hat{\mu}}$ определен формулой (26) при $\mu = \hat{\mu}$. Кроме того, из (30) следует, что

$$\langle I'_\Phi(\hat{\Phi}), S\rangle = 2\int_Q (\hat{\Phi} - \Phi^d) S d\mathbf{x} \ \ \forall S \in X. \tag{37}$$

В соответствии с общей теорией экстремальных задач (см. [30]) введем в рассмотрение множитель Лагранжа $\Psi \in X$, на который будем ссылаться как на сопряженное магнитное поле, и лагранжиан $\mathcal{L} : X \times K \times X \to \mathbb{R}$ формулой $L(\Phi, \mu, \Psi) \equiv J(\Phi, \mu) + \langle G(\Phi, \mu), \Psi\rangle_{X^* \times X}$. Обозначим через $\hat{A}^* \equiv G'_\Phi(\hat{\Phi}, \hat{\mu})^* : X \to X^*$ оператор, сопряженный к оператору $\hat{A} = G'_\Phi(\hat{\Phi}, \hat{\mu}) : X \to X^*$, действующий по формуле

$$\langle \hat{A}^*\Psi, S\rangle_{X^* \times X} \equiv \langle G'_\Phi(\hat{\Phi}, \hat{\mu})^*\Psi, S\rangle_{X^* \times X} = \langle G'_\Phi(\hat{\Phi}, \hat{\mu})S, \Psi\rangle_{X^* \times X} =$$

$$\langle \hat{A}S, \Psi\rangle_{X^* \times X} \ \ \forall \Psi \in X, \ S \in X. \tag{38}$$

Введем две вспомогательные билинейные формы

$$a_1(\mu_r, \Phi, \Psi) = \int_\Omega r\mu_r \frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} dr d\varphi, \quad a_2(\mu_\varphi, \Phi, \Psi) = \int_\Omega \frac{\mu_\varphi}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} dr d\varphi,$$

с которыми выполняется соотношение

$$a(\mu_r, \mu_\varphi; \Phi, \Psi) = a_1(\mu_r, \Phi, \Psi) + a_2(\mu_\varphi, \Phi, \Psi) \quad \forall \Phi, \Psi \in X. \tag{39}$$

Из линейности оператора G по μ_r и μ_φ и из выпуклости множества $K = K_1 \times K_2$ вытекает, что множество $G(\Phi, K) = \{x^* = G(\Phi, \mu) \in X^*, \mu \in K\}$ является выпуклым подмножеством в X^* для любой функции $\Phi \in X$. Так как оператор $G'_\Phi(\hat{\Phi}, \hat{\mu}) \equiv \hat{A}$ является изоморфизмом в силу теоремы 1, то из результатов [30, стр. 83] вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть при выполнении условий теоремы 2 пара* $(\hat{\Phi}, \hat{\mu}) \in X \times K$ *является решением задачи (32). Тогда существует единственный множитель Лагранжа* $\hat{\Psi} \in X$ *такой, что справедливо уравнение Эйлера-Лагранжа*

$$L'_\Phi(\hat{\Phi}, \hat{\mu}, \hat{\Psi}) = G'_\Phi(\hat{\Phi}, \hat{\mu})^* \hat{\Psi} + (\alpha_0/2) I'_\Phi(\hat{\Phi}) = 0 \quad \text{в} \quad X^* \tag{40}$$

и выполняется принцип минимума $L(\hat{\Phi}, \hat{\mu}, \hat{\Psi}) \leq L(\hat{\Phi}, \mu, \hat{\Psi})$ *для всех* $\mu \in K$, *эквивалентный следующим двум вариационным неравенствам относительно искомых управлений* $\hat{\mu}_r$ *и* $\hat{\mu}_\varphi$*:*

$$\alpha_1(\hat{\mu}_r, \mu_r - \hat{\mu}_r)_{s,\Omega} + a_1(\mu_r - \hat{\mu}_r, \Phi, \Psi) \geq 0 \quad \forall \mu_r \in K_1, \tag{41}$$

$$\alpha_2(\hat{\mu}_\varphi, \mu_\varphi - \hat{\mu}_\varphi)_{s,\Omega} + a_2(\mu_\varphi - \hat{\mu}_\varphi, \Phi, \Psi) \geq 0 \quad \forall \mu_\varphi \in K_2. \tag{42}$$

Из (38) и (37) следует, что уравнение Эйлера-Лагранжа (40) эквивалентно операторному уравнению $A^*_{\hat{\mu}}\Psi = -\alpha_0(\hat{\Phi} - \Phi^d)$, которое, в свою очередь, эквивалентно тождеству

$$a_{\hat{\mu}}(S, \Psi) \equiv a_0(S, \hat{\Psi}) + a(\hat{\mu}_r, \hat{\mu}_\varphi; S, \hat{\Psi}) = -\alpha_0(\hat{\Phi} - \Phi^d, S)_Q \quad \forall S \in X. \tag{43}$$

Подчеркнем, что прямая задача (15) при $\Phi = \hat{\Phi}$, задача (43) относительно сопряженного состояния $\hat{\Psi}$, на которую мы будем ссылаться как на сопряженную задачу, и неравенства (41), (42) представляют собой систему оптимальности, описывающую необходимые условия экстремума для задачи (32). Основываясь на анализе данной системы оптимальности, ниже установим достаточные условия на исходные данные, которые обеспечивают единственность и устойчивость решения задачи (32) относительно малых возмущений функции $\Phi^d \in L^2(Q)$, входящей в функционал качества (31).

4. Единственность и устойчивость оптимальных решений

Обозначим через $(\Phi_1, \mu_1) = (\Phi_1, \mu_r^{(1)}, \mu_\varphi^{(1)})$ решение задачи (32), отвечающее заданной функции $\Phi_1^d = \Phi^d \in L^2(Q)$ в (31). Через $(\Phi_2, \mu_2) = (\Phi_2, \mu_r^{(2)}, \mu_\varphi^{(2)})$ обозначим решение задачи

$$J(\Phi, \mu) \equiv \frac{\alpha_0}{2}\tilde{I}(\Phi) + \frac{\alpha_1}{2}\|\mu_r\|^2_{s,\Omega} + \frac{\alpha_2}{2}\|\mu_\varphi\|^2_{s,\Omega} \to \inf, \ G(\Phi, \mu) = 0, \ (\Phi, \mu) \in X \times K. \tag{44}$$

Она получается из (32) заменой функционала $I(\Phi) = \|\Phi - \Phi^d\|^2_Q$ функционалом $\tilde{I}(\Phi) = \|\Phi - \tilde{\Phi}^d\|^2_Q$, где $\tilde{\Phi}^d \in L^2(Q)$ – близкая к Φ^d в норме $L^2(Q)$ функция. Отметим, что в силу теоремы 1 справедливы следующие оценки для Φ_l, $l = 1, 2$:

$$\|\Phi_l\|_X \leq M_\Phi \equiv C_2\|\Phi^e\|_{1,\Omega_e}. \tag{45}$$

Обозначим через $\Psi_l \in X$, $l = 1, 2$ множители Лагранжа, отвечающие решениям (Φ_l, μ_l). В силу теоремы 3 и (43) они удовлетворяют тождеству

(46)
$$a_{\mu_l}(S, \Psi_l) \equiv a_0(S, \Psi_l) + a(\mu_r^{(l)}, \mu_\varphi^{(l)}; S, \Psi_l) = -\alpha_0(\Phi_l - \Phi^d, S)_Q \ \forall S \in X,\ l = 1, 2.$$

Положим $\mu = \mu_1 - \mu_2$,

$$\mu_r = \mu_r^{(1)} - \mu_r^{(2)},\ \mu_\varphi = \mu_\varphi^{(1)} - \mu_\varphi^{(2)},\ \Phi = \Phi_1 - \Phi_2,\ \Psi = \Psi_1 - \Psi_2,\ \Phi^d = \Phi_1^d - \Phi_2^d. \tag{47}$$

Справедлива следующая лемма

Лемма 1. *Пусть в дополнение к условиям (i), (ii), (j) тройки* $(\Phi_1, \mu_r^{(1)}, \mu_\varphi^{(1)})$ *и* $(\Phi_2, \mu_r^{(2)}, \mu_\varphi^{(2)})$ *являются решениями задач (32) и (44), соответственно, где* $\Phi_1^d \equiv \Phi^d, \Phi_2^d \in L^2(Q)$ *– заданные функции. Пусть* $\Psi_l \in X$, $l = 1, 2$ *– множители Лагранжа, отвечающие решениям* $(\Phi_l, \mu_r^{(l)}, \mu_\varphi^{(l)})$. *Тогда справедливы следующие оценка и неравенство:*

$$\|\Phi\|_X \leq C_1 C_s(\|\mu_r\|_{s,\Omega} + \|\mu_\varphi\|_{s,\Omega}) M_\Phi, \tag{48}$$

$$\alpha_0(\Phi - \Phi^d, \Phi)_Q \leq -a\left(\mu_r, \mu_\varphi; \Phi, \Psi_1 + \Psi_2\right) - \alpha_1 \|\mu_r\|_{s,\Omega}^2 - \alpha_2 \|\mu_\varphi\|_{s,\Omega}^2. \tag{49}$$

Доказательство. Вычтем тождество (15), записанное для $(\Phi_2, \mu_r^{(2)}, \mu_\varphi^{(2)})$ из того же самого тождества, записанного для $(\Phi_1, \mu_r^{(1)}, \mu_\varphi^{(1)})$. Используя обозначения (47), получим следующее тождество для разности $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$:

$$a_0(\Phi, S) + a(\mu_r^{(2)}, \mu_\varphi^{(2)}; \Phi, S) = -a(\mu_r, \mu_\varphi; \Phi_1, S)\ \ \forall S \in X. \tag{50}$$

Используя оценки (6), (19) и (45), имеем

$$|a(\mu_r, \mu_\varphi; \Phi_1, S)| \leq C_s(\|\mu_r\|_{s,\Omega} + \|\mu_\varphi\|_{s,\Omega}) \|\Phi_1\|_X \|S\|_X \leq$$

$$\leq C_s(\|\mu_r\|_{s,\Omega} + \|\mu_\varphi\|_{s,\Omega}) M_\Phi \|S\|_X\ \ \forall S \in X. \tag{51}$$

С учетом оценки (51), из теоремы 1, примененной к линейной относительно разности $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ задаче (50), следует, что для решения Φ справедлива оценка (48).

Докажем теперь (49). Положим сначала $\mu_r = \mu_r^{(1)}$ в неравенстве (41), записанном при $\hat{\mu}_r = \mu^{(2)}$, $\hat{\Phi} = \Phi_2$, $\hat{\Psi} = \Psi_2$, а затем положим $\mu_r = \mu_r^{(2)}$ в этом же неравенстве, записанном при $\hat{\mu}_r = \mu_r^{(1)}$, $\hat{\Phi} = \Phi_1$, $\hat{\Psi} = \Psi_1$. Используя (47), получим неравенства

$$\alpha_1(\mu_r^{(2)}, \mu_r)_{s,\Omega} + a_1\left(\mu_r; \Phi_2, \Psi_2\right) \geq 0,\ -\alpha_1(\mu_r^{(1)}, \mu_r)_{s,\Omega} - a_1\left(\mu_r; \Phi_1, \Psi_1\right) \geq 0. \tag{52}$$

Складывая их, приходим к следующему соотношению для разности μ_r:

$$a_1\left(\mu_r; \Phi_1, \Psi_1\right) - a_1\left(\mu_r; \Phi_2, \Psi_2\right) \leq -\alpha_1 \|\mu_r\|_{s,\Omega}^2. \tag{53}$$

Точно таким же образом получаем второе неравенство относительно разности μ_φ:

$$a_2\left(\mu_\varphi; \Phi_1, \Psi_1\right) - a_2\left(\mu_\varphi; \Phi_2, \Psi_2\right) \leq -\alpha_1 \|\mu_\varphi\|_{s,\Omega}^2. \tag{54}$$

Вычтем тождество (46) при $l = 2$ из (46) при $l = 1$ и положим $S = \Phi$. Получим

$$a_0(\Phi, \Psi) + a(\mu_r^{(2)}, \mu_\varphi^{(2)}; \Phi, \Psi) + a(\mu_r, \mu_\varphi; \Phi, \Psi_1) = -\alpha_0(\Phi - \Phi^d, \Phi)_Q. \tag{55}$$

Вычтем далее тождество (50) при $S = \Phi$ из (55). Получим равенство

$$a(\mu_r, \mu_\varphi; \Phi, \Psi_1) - a(\mu_r, \mu_\varphi; \Phi_1, \Psi) = -\alpha_0(\Phi - \Phi^d, \Phi). \tag{56}$$

Складывая (56) с (53), (54) приходим после простых преобразований к искомому неравенству (49). Лемма доказана. □

Полагая $M_\Phi^0 = M_\Phi + \max(\|\Phi_1^d\|_Q, \|\Phi_2^d\|_Q)$, докажем следующую основную теорему.

Теорема 4. *Пусть при выполнении условий леммы 1 выполняются условия:*

$$\alpha_1(1-\varepsilon) > 4\alpha_0 C_1^2 C_s^2 M_\Phi M_\Phi^0, \ \ \alpha_2(1-\varepsilon) > 4\alpha_0 C_1^2 C_s^2 M_\Phi M_\Phi^0. \tag{57}$$

Тогда для разностей $\mu_r^{(1)} - \mu_r^{(2)}$, $\mu_\varphi^{(1)} - \mu_\varphi^{(2)}$ и $\Phi_1 - \Phi_2$ решений $(\Phi_1, \mu_r^{(1)}, \mu_\varphi^{(1)})$ и $(\Phi_2, \mu_r^{(2)}, \mu_\varphi^{(2)})$ задач (32) и (44) справедливы следующие оценки устойчивости:

$$\|\Phi_1 - \Phi_2\|_Q \le \|\Phi_1^d - \Phi_2^d\|_Q, \tag{58}$$

$$\|\mu_r^{(1)} - \mu_r^{(2)}\|_{s,\Omega} \le (1/2)\sqrt{\alpha_0/\varepsilon\alpha_1}\|\Phi_1^d - \Phi_2^d\|_Q, \tag{59}$$

$$\|\mu_\varphi^{(1)} - \mu_\varphi^{(2)}\|_{s,\Omega} \le (1/2)\sqrt{\alpha_0/\varepsilon\alpha_2}\|\Phi_1^d - \Phi_2^d\|_Q, \tag{60}$$

$$\|\Phi_1 - \Phi_2\|_X \le (1/2)C_1 C_s(\sqrt{\alpha_0/\varepsilon\alpha_1} + \sqrt{\alpha_0/\varepsilon\alpha_2})\|\Phi_1^d - \Phi_2^d\|_Q. \tag{61}$$

Доказательство. Оценим сначала множитель Лагранжа Ψ_l, отвечающий тройке $(\Phi_l, \mu_r^{(l)}, \mu_\varphi^{(l)})$, $l = 1, 2$. С этой целью обратимся к задаче (46), которая эквивалентна следующему уравнению для множителя Ψ_l:

$$A_{\mu_l}^* \Psi_l = \alpha_0 f_l \in X^*, \ \ \langle f_l, S\rangle = -(\Phi_l - \Phi_l^d, S)_Q, \ \ l = 1, 2. \tag{62}$$

Здесь $A_{\mu_l}^*$ – сопряженный оператор к оператору A_{μ_l}, определенному формулой (26) при $\mu = \mu_l = (\mu_r^{(l)}, \mu_\varphi^{(l)})$, $l = 1, 2$. Легко видеть, что $|(\Phi_l - \Phi_l^d, S)_Q| \le \|\Phi_l\|_X + \max(\|\Phi_1^d\|_Q, \|\Phi_2^d\|_Q)\|S\|_X \ \forall S \in X$. Отсюда следует, что $\|f_l\|_{X^*} \le M_\Phi^0$, а из Следствия 1, примененного к задаче (62) относительно Ψ_l, вытекает, что для решения Ψ_l справедлива оценка

$$\|\Psi_l\|_X \le C_1\alpha_0\|f_l\|_{X^*} \le C_1\alpha_0 M_\Phi^0, \ M_\Phi^0 \equiv M_\Phi + \max(\|\Phi_1^d\|_Q, \|\Phi_2^d\|_Q). \tag{63}$$

Используя оценки (6), (19), (48), (63) и неравенство Юнга $2cd \le \delta c^2 + (1/\delta)d^2$ $\forall c \ge 0$, $d \ge 0$, $\delta > 0$ при $\delta = 1$, выводим с учетом условий (57), что

$$\begin{aligned}
|a(\mu_r, \mu_\varphi; \Phi, \Psi_1 + \Psi_2)| &\le C_s(\|\mu_r\|_{s,\Omega} + \|\mu_\varphi\|_{s,\Omega})\|\Phi\|_X(\|\Psi_1\|_X + \|\Psi_2\|_X) \le \\
&\le 2C_1\alpha_0 M_\Phi^0 C_s(\|\mu_r\|_{s,\Omega} + \|\mu_\varphi\|_{s,\Omega})\,[C_1 C_s(\|\mu_r\|_{s,\Omega} + \|\mu_\varphi\|_{s,\Omega})M_\Phi] = \\
&\le 4\alpha_0 C_1^2 C_s^2 M_\Phi M_\Phi^0(\|\mu_r\|_{s,\Omega}^2 + \|\mu_\varphi\|_{s,\Omega}^2) \le \\
&\le \alpha_1(1-\varepsilon)\|\mu_r\|_{s,\Omega}^2 + \alpha_2(1-\varepsilon)\|\mu_\varphi\|_{s,\Omega}^2.
\end{aligned} \tag{64}$$

Учитывая (64), из неравенства (49) тогда получаем, что

$$\alpha_0\|\Phi\|_Q^2 \le \alpha_0\|\Phi^d\|_Q\|\Phi\|_Q - \varepsilon\alpha_1\|\mu_r\|_{s,\Omega}^2 - \varepsilon\alpha_2\|\mu_\varphi\|_{s,\Omega}^2. \tag{65}$$

Отсюда выводим оценку $\|\Phi\|_Q \le \|\Phi^d\|_Q$, эквивалентную в силу (47) оценке (58). Используя данную оценку и неравенство $\|\Phi^d\|_Q\|\Phi\|_Q \le \|\Phi\|_Q^2 + (1/4)\|\Phi^d\|_Q^2$, вытекающее из неравенства Юнга при $\delta = 1/2$, далее выводим из (65), что

$$\varepsilon\alpha_1\|\mu_r\|_{s,\Omega}^2 + \varepsilon\alpha_2\|\mu_\varphi\|_{s,\Omega}^2 \le \alpha_0\|\Phi^d\|_Q\|\Phi\|_Q - \alpha_0\|\Phi\|_Q^2 \le \frac{\alpha_0}{4}\|\Phi^d\|_Q^2. \tag{66}$$

Из (66) выводим оценки (59), (60) для разностей $\|\mu_r^{(1)}-\mu_r^{(2)}\|_{s,\Omega}$ и $\|\mu_\varphi^{(1)}-\mu_\varphi^{(2)}\|_{s,\Omega}$, тогда как вторая оценка в (61) является очевидным следствием оценок (48), (59) и (60). Теорема доказана. $\square$

Стоит отметить, если положить $\Phi_1^d = \Phi_2^d$, то из (58) следует, $\Phi_1 = \Phi_2$ в Q. Тогда, учитывая (65) при $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, получаем, μ_r и μ_φ равны нулю. В таком случае из (48) вытекает, что $\Phi \equiv \Phi_1 - \Phi_2 = 0$ в X. Из приведенного факта следует единственность решения задачи (44).

Подчеркнем, что устойчивость решений экстремальной задачи (32) доказана при условии, что каждый из параметров α_1 и α_2 положителен. Это означает, что слагаемые $(\alpha_1/2)\|\mu_r\|_{s,\Omega}^2$ и $(\alpha_2/2)\|\mu_\varphi\|_{s,\Omega}^2$ в выражении минимизируемого функционала J в (32) вносят регуляризующий эффект.

В этой статье была изучена задача управления для модели магнитного рассеяния (2)–(5). Мы изучили некоторые новые свойства решения двумерной задачи магнитной маскировки, доказали разрешимость экстремальной задачи (32) и вывели систему оптимальности (15), (41)–(43), описывающую необходимые условия экстремума. На основе анализа системы оптимальности были установлены достаточные условия на исходные данные, которые обеспечивают единственность и устойчивость решения задачи (32) относительно малых возмущений функции $\Phi^d \in L^2(Q)$, входящей в функционал качества (31). По аналогичной схеме может быть исследована устойчивость относительно малых возмущений внешнего поля Φ^e.

Отметим, что построенная система оптимальности может быть также использована для разработки эффективного численного алгоритма, предназначенного для решения экстремальной задачи (32). Альтернативный алгоритм основывается на использовании метода роя частиц по схеме, предложенной в [31] при численном решении задачи тепловой маскировки цилиндрического тела. Разработке и исследованию свойств указанных алгоритмов, а также сравнительному анализу результатов, полученных с их помощью, будет посвящена отдельная статья автора.

References

[1] L.S. Dolin, *On a possibility of comparison of three-dimensional electromagnetic systems with nonuniform anisotropic filling*, Izv. Vuzov Radiofizika, **4** (1961), 964–967.

[2] J.B. Pendry, D. Shurig, D.R. Smith, *Controlling electromagnetic fields*, Science, **312** (2006), 1780–1782. Zbl 1226.78003

[3] U. Leonhardt, *Optical conformal mapping*, Science, **312** (2006), 1777–1780. Zbl 1226.78001

[4] S.A. Cummer, D. Shurig, *One path to acoustic cloaking*, New Journal of Physics, **9** (2007), 45.

[5] H. Chen, C.T. Chan, *Acoustic cloaking in three dimensions using acoustic metamaterials*, Applied Physics Letters, **91** (2007), 183518.

[6] S.A. Cummer, B.-I. Popa, D. Shurig, et al., *Scattering theory derivation of a 3D acoustic cloaking shell*, Phys. Rev. Lett., **100** (2008), 024301.

[7] B. Wood, J.B. Pendry, *Metamaterials at zero frequency*, J. Phys.: Condens. Matter., **19** (2007), 076208.

[8] A. Sanchez, C. Navau, J. Prat-Camps, D.-X. Chen, *Antimagnets: controlling magnetic fields with superconductormetamaterial hybrids*, New J. Phys., **13** (2011), 093034.

[9] G.V. Alekseev, *Invisibility problem in acoustics, optics and heat transfer*, Vladivostok: Dalnauka, 2016. (in Russian)

[10] A.E. Dubinov, L.A. Mytareva, *Invisible cloaking of material bodies using the wave flow method*, Physics Uspekhi, **53** (2010), 455–479.

[11] A. Greenleaf, Y. Kurylev, M. Lassas, G. Uhlmann, *Isotropic transformation optics: approximate acoustic and quantum cloaking*, New Journ. of Phys., **10** (2008), 115024.
[12] H. Liu, T. Zhou, *Transformation optics and approximate cloaking*, Contemp. Math., **559** (2011), 65–83. Zbl 1248.78009
[13] G.V. Alekseev, V.G. Romanov, *One class of nonscattering acoustic shells for a model of anisotropic acoustics*, Sib. Zh. Ind. Mat., **14** (2011), 15–20. Zbl 1228.76141
[14] V.G. Romanov, Yu.A. Chirkunov, *Nonscattering acoustic objects in an anisotropic medium of special kind*, Dokl. Math., **87**:1 (2013), 73–75. Zbl 1284.35349
[15] Y.A. Chirkunov, *Nonscattering acoustic objects in a medium with a spherical stratification*, Acta Mech., **228**:7 (2017), 2533–2539. Zbl 1401.76121
[16] S. Xu, Y. Wang, B. Zhang, H. Chen, *Invisibility cloaks from forward design to inverse design*, Science China Information Sciences, **56** (2013), 120408.
[17] B.-I. Popa, S.A. Cummer, *Cloaking with optimized homogeneous anisotropic layers*, Phys. Rev. A, **79** (2009), 023806.
[18] X.H. Wang, E.A. Semouchkina, *A route for efficient non-resonance cloaking by using multilayer dielectric coating*, Appl. Phys. Lett., **102** (2013), 113506.
[19] A. Mirzaei, A.E. Miroshnichenko, I.V. Shadrivov, Y.S. Kivshar, *All-dielectric multilayer cylindrical structures for invisibility cloaking*, Scientific Reports, **5** (2015), 5:9574.
[20] G.V. Alekseev, *Optimization in problems of material-body cloaking using the wave-flow method*, Doklady Physics, **58**:4 (2013), 147–151.
[21] G.V. Alekseev, *Cloaking via impedance boundary condition for 2-D Helmholtz equation*, Appl. Anal., **93**:2 (2014), 254–268. Zbl 1290.35321
[22] G.V. Alekseev, *Control of boundary impedance in two-dimensional material-body cloaking by the wave flow method*, Comp. Math. Mathem. Phys., **53**:12 (2013), 1853–1869. Zbl 1313.35069
[23] G.V. Alekseev, *Stability estimates in the problem of cloaking material bodies for Maxwell's equations*, Comp. Math. Mathem. Phys., **54**:12 (2014), 1788–1803. Zbl 1326.49031
[24] G.V. Alekseev, Yu.E. Spivak *Analysis of the 3D acoustic cloaking problems using optimization method*, J. of Phys. Conf. Series, **722** (2016), 012002.
[25] G.V. Alekseev, A.V. Lobanov, Yu.E. Spivak *Optimization method in problems of acoustic cloaking of material bodies*, Comp. Math. Mathem. Phys., **57**:9 (2017), 1459–1474. Zbl 1395.76086
[26] D.S. Anikonov, V.G. Nazarov, I.V. Prokhorov, *Visible and invisible media in tomography*, Dokl. Math., **56**:3 (1997), 955–958. Zbl 1050.92505
[27] D.S. Anikonov, I.V. Prokhorov, *Necessary and sufficient conditions for the uniqueness of a solution to a tomography problem*, Comp. Math. Mathem. Phys., **42**:3 (2002), 353–362. Zbl 1054.81038
[28] H. Han, X. Wu, *Artificial Boundary Method*, Berlin: Springer-Verlag; Beijing: Tsinghua University Press, 2013. Zbl 1277.65105
[29] A.N. Tikhonov, V.Ya. Arsenin, *Methods for solving ill-posed problems*, Moscow: Nauka, 1974. (in Russian) Zbl 0309.65002
[30] A.D. Ioffe, V.M. Tikhomirov, *Theory of extremal problems*, Amsterdam: Elsevier, 1978.
[31] G.V. Alekseev, V.A. Levin, D.A. Tereshko, *Optimization analysis of the thermal cloaking problem for a cylindrical body*, Doklady Physics, **62** (2017), 71–75.

Yuliya Eduardovna Spivak
Institute of Applied Mathematics FEB RAS,
7, Radio str.,
Vladivostok, 690041, Russia;
Far Eastern Federal University,
8, Sukhanova str.,
Vladivostok, 690090, Russia
E-mail address: `uliyaspivak@gmail.com`