S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 85–95 (2019) УДК 517.518.454, 517.518.13
DOI 10.33048/semi.2019.16.004 MSC 42A50

О СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛА ЛУЗИНА И ЕГО АНАЛОГОВ

К.И. КНИЖОВ, И.В. ПОДВИГИН

Abstract. We study the convergence at a fixed point of the singular integral of Luzin and its analogues. We present sufficient conditions in terms of the Fourier coefficients of the given integrable function for such convergence.

Keywords: trigonometric conjugate function, trigonometric conjugate series, Luzin integral.

1. Введение

Пусть $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая интегрируемая по Лебегу на периоде функция. Тригонометрически сопряженной к функции ρ называют функцию ρ^c, определяемую особым интегралом Лузина (см. (5.7) в [1, глава II, §5]):

$$\rho^c(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\rho(x+t)-\rho(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt,$$

где интеграл понимается как предел при $\varepsilon \to 0$ соответствующих интегралов на отрезке $[\varepsilon, \pi]$ (по теореме Лузина–Привалова [2, глава VIII, §7] этот предел существует для почти всех $x \in \mathbb{R}$). Это название тесно связано с понятием тригонометрически сопряженного ряда к ряду Фурье $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ функции ρ. Тригонометрически сопряженным рядом (см. [2, глава I, §1]) называется ряд $2\mathrm{Im}(\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx})$.

Как следует из теоремы Смирнова [2, глава VIII, §17], если ρ^c — интегрируема по Лебегу на периоде (например, когда $|\rho|\ln^+|\rho| \in L_1([-\pi,\pi])$), то ряд

Knizhov, K.I., Podvigin, I.V., On the convergence of the Luzin integral and its analogues.

Поступила 6 декабря 2018 г., опубликована 27 января 2019 г.

Фурье ρ^c есть в точности сопряженный ряд к ряду Фурье функции ρ. Кроме того, хорошо известно [1, глава VII], что сопряженный ряд суммируем методом Пуассона–Абеля почти всюду и его сумма равна сопряженной функции. Совпадение сопряженной функции и сопряженного ряда справедливо и с точки зрения теории распределения [3].

Предположим дополнительно, что ρ имеет интегрируемую по Лебегу на $[-\pi,\pi]$ производную. Рассмотрим интегралы

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho(x+t)+\rho(x-t)-2\rho(x)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt, \tag{1}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho'(x+t)-\rho'(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt. \tag{2}$$

Хорошо известно (см. например [1, глава IV, §3]), что интегралы (1) и (2) сходятся для почти всех $x\in\mathbb{R}$, причем к одному и тому же значению, к $-2\pi{\rho'}^c(x)$. Последнее следует из простого применения формулы интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\rho(x+t)+\rho(x-t)-2\rho(x)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt &= -\int\limits_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\rho(x+t)+\rho(x-t)-2\rho(x)}{2}\,d\operatorname{ctg}\frac{t}{2} \\ &= \frac{\rho(x+\varepsilon)+\rho(x-\varepsilon)-2\rho(x)}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2} + \int\limits_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\rho'(x+t)-\rho'(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt.\end{aligned} \tag{3}$$

Эта же формула показывает, что если для некоторого фиксированного $x\in\mathbb{R}$ при $\varepsilon\to 0$

$$\rho(x+\varepsilon)+\rho(x-\varepsilon)-2\rho(x)=o(\varepsilon), \tag{4}$$

то интегралы (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

В статье [4] Леоновым были приведены условия на коэффициенты Фурье функции ρ, при которых интеграл (1) сходится в точке $x=0$. Доказательство этого утверждения, использовавшегося впоследствии в [5, 6, 7], в работе [4] отсутствует ("вывод формул [...] элементарен, но громоздок и потому опущен"). Этот результат естественно распространяется и на произвольную точку; сформулируем его в виде следующей теоремы.

Теорема 1 (Леонов, [4])**.** *Пусть $\rho(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx}$, и ее коэффициенты Фурье c_k таковы, что ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty}kc_k$ абсолютно сходится (а следовательно ρ непрерывно дифференцируема). Тогда для всех $x_0\in\mathbb{R}$ существует несобственный интеграл Римана*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho(x_0+t)+\rho(x_0-t)-2\rho(x_0)}{4\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\rho(x_0+t)+\rho(x_0-t)-2\rho(x_0)}{4\sin^2\frac{t}{2}}dt,$$

причем

$$2\pi(\rho')^c(x_0) = -2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}|k|c_k e^{ikx_0} = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho(x_0+t)+\rho(x_0-t)-2\rho(x_0)}{4\sin^2\frac{t}{2}}dt.$$

Наша заметка посвящена исследованию вопроса о сходимости в фиксированной точке интеграла (1) (и, следовательно, (2)) при условиях, менее ограничительных, чем в теореме Леонова. Результаты сформулированы отдельно для каждого интеграла в теоремах 2 и 3. Доказав теорему 2, мы тем самым привели отсутствующее доказательство и теоремы Леонова. Формулировка же теоремы 3 приводит нас к достаточным условиям сходимости в точке самого интеграла Лузина (теорема 4). Кроме того мы рассматриваем аналоги этих результатов для соответствующих интегралов на всей прямой (теоремы 5 и 6).

Мотивацией нашего небольшого исследования послужила связь рассматриваемого вопроса с задачей по оценке скоростей сходимости в эргодической теореме фон Неймана (см. обзоры [8, 6]). А именно, в оценках скорости сходимости возникают константы вида $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|k|c_k$, которые, как оказалось, связаны со значением $2\pi\rho'^c(0)$, где ρ — плотность спектральной меры динамической системы. Поясним чуть более подробнее.

Пусть $(\Omega,\mathfrak{F},\lambda)$ — пространство с вероятностной мерой, $T:\Omega\to\Omega$ — его эндоморфизм, т.е. для всех $A\in\mathfrak{F}$ множество $T^{-1}A\in\mathfrak{F}$, и $\lambda(A)=\lambda(T^{-1}A)$.

Через U_T обозначим изометрический оператор, действующий в (комплексном) гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ по формуле $U_T f = f\circ T$; положим $A_n f=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}U_T^k f$. Тогда статистическая эргодическая теорема фон Неймана утверждает существование предела в $L_2(\Omega)$

$$\lim_{n\to\infty}A_n f=f^*,$$

причем f^* оказывается ортогональной проекцией f на подпространство неподвижных векторов оператора U_T, и выполняется равенство $\int_\Omega f^*d\lambda=\int_\Omega f d\lambda$.

Определим корреляционные коэффициенты $b_k f$ вектора f: $b_k f=(U_T^k f,f)$ при $k\ge 0$, и $b_k f=\overline{b_{-k}f}$ при $k<0$. Как хорошо известно (см., например, [9, глава 1, §7]), корректно определена (единственная) спектральная мера σ_f, т.е. такая конечная борелевская мера на единичной окружности, что

$$b_k f=\int\limits_{(-\pi,\pi]}e^{ikx}d\sigma_f(x)$$

для всех целых k (так что корреляционные коэффициенты являются ее коэффициентами Фурье в комплексной форме).

Пусть корреляционные коэффициенты $b_k:=b_k(f-f^*), k\in\mathbb{Z}$ таковы, что ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty}kb_k$ абсолютно сходится. Как показал Леонов в упоминаемой нами выше работе [4], в этом случае спектральная мера σ_{f-f^*} абсолютно непрерывна по отношению к мере Лебега с непрерывно дифференцируемой плотностью ρ, и справедливо следующее асимптотическое соотношение:

$$\|A_n f-f^*\|_2^2-\frac{2\pi\rho(0)}{n}+\frac{2\pi(\rho')^c(0)}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{|k|>n}(|k|-n)b_k=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(доказательство этого соотношения в такой именно формулировке было дано в [5]). Возникновение значения сопряженной функции в нуле объясняет наш интерес к сходимости интегралов (1) и (2) в фиксированной точке.

В дальнейшем нам понадобятся ядра Фейера $\Phi_n(x)$ и некоторые их свойства. Напомним, что

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2n} \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}, \quad 0 < |x| \le \pi.$$

Мы будем использовать следующие свойства ядер Φ_n (см., например, [2, глава I, §47]):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = \pi, \tag{5}$$

$$\Phi_n(x) \le \frac{\pi^2}{2n\varepsilon^2} \quad \text{для } 0 < \varepsilon \le |x| \le \pi. \tag{6}$$

2. Доказательство теоремы Леонова

В следующей теореме приведено обобщение теоремы 1. Здесь нам удалось доказать утверждение Леонова, а также несколько ослабить его условия и, вместо абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} kc_k$, требовать лишь абсолютную сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{Re}\,(c_k e^{ikx_0})$.

Теорема 2. *Пусть ρ — 2π-периодическая интегрируемая по Лебегу на $[-\pi,\pi]$ функция, представимая в некоторой точке $x_0 \in [-\pi,\pi]$ своим рядом Фурье, т.е. $\rho(x_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx_0}$, и при этом ее коэффициенты Фурье c_k удовлетворяют условию: ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{Re}\,(c_k e^{ikx_0})$ абсолютно сходится. Тогда существует интеграл*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho(x_0+t)+\rho(x_0-t)-2\rho(x_0)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\rho(x_0+t)+\rho(x_0-t)-2\rho(x_0)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt,$$

причем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho(x_0+t)+\rho(x_0-t)-2\rho(x_0)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = -2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}|k|c_k e^{ikx_0} = -4\pi\sum_{k=1}^{\infty}k\mathrm{Re}\,(c_k e^{ikx_0}).$$

Доказательство. Исходя из ряда Фурье для функции ρ, нетрудно найти ряд Фурье функции $\tilde\rho_{x_0}(t) = \rho(x_0+t)+\rho(x_0-t)-2\rho(x_0)$:

$$\tilde\rho_{x_0}(t) \sim -2\rho(x_0) + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx_0}\cos kt.$$

Воспользуемся теперь следующим фактом: ряд Фурье интегрируемой по Лебегу функции после умножения на функцию ограниченной вариации можно почленно интегрировать по любому отрезку (см., например, [2, глава II, §5]).

В нашем случае функцией ограниченной вариации являются $\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}$ на отрезке $[\varepsilon, \pi]$:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\tilde{\rho}_{x_0}}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = \int_{\varepsilon}^{\pi}\left(-2\rho(x_0) + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx_0}\cos kt\right)\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= -\rho(x_0)\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{dt}{2\sin^2\frac{t}{2}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx_0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{\cos kt}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= -\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx_0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{dt}{2\sin^2\frac{t}{2}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx_0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{\cos kt}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx_0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{\cos kt - 1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = -2\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx_0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{kt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= -4\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\,(c_k e^{ikx_0})k\int_{\varepsilon}^{\pi}\Phi_k(t)\,dt.$$

Последний ряд сходится равномерно по $\varepsilon \in [0, \pi]$, поэтому переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$ (и занося предел внутрь суммирования), получим, учитывая (5), требуемое равенство. Теорема 2 доказана. $\square$

Отметим, что в доказательстве теоремы 2 абсолютная суммируемость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{Re}\,(c_k e^{ikx_0})$ использовалась лишь на последнем шаге доказательства. А именно, при переносе предела при $\varepsilon \to 0$ внутрь суммирования. Для этого мы воспользовались признаком Вейерштрасса. Можно, однако, потребовать выполнения другого условия: ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{1+\delta}\mathrm{Re}\,(c_k e^{ikx_0})$ сходится для некоторого $\delta > 0$, и воспользоваться более тонким признаком равномерной сходимости — признаком Дю Буа-Раймонда — Дедекинда (см., например, [11, глава 9, задачи 9.3.27 и 9.3.28]). Адаптированный для нашего случая этот признак гласит, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k(\varepsilon)$ сходится равномерно по $\varepsilon \in [0, \pi]$, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k(\varepsilon) - b_{k+1}(\varepsilon)|$ сходится равномерно на $[0, \pi]$ и $b_k(\varepsilon) \to 0$ также равномерно.

Аналог теоремы 2 будет справедлив с этим новым условием, поскольку достаточно на последнем шаге доказательства взять

$$a_k = k^{1+\delta}\mathrm{Re}\,(c_k e^{ikx_0}) \text{ и } \; b_k(\varepsilon) = k^{-\delta}\int_{\varepsilon}^{\pi}\Phi_k(t)\,dt.$$

Учитывая свойство (6), нетрудно проверить, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k(\varepsilon) - b_{k+1}(\varepsilon)|$ сходится равномерно.

Сравнение двух не следующих друг из друга условий:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|\mathrm{Re}\,(c_k e^{ikx_0})| < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{1+\delta}\mathrm{Re}\,(c_k e^{ikx_0}) < \infty$$

приводит к следующему вопросу.

Вопрос: Справедлив ли аналог теоремы 2 при условии сходимости (не абсолютной) ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{Re}\,(c_k e^{ikx_0})$?

3. Интеграл Лузина

Особый интеграл Лузина появился в его диссертации при исследовании сходимости почти всюду ряда Фурье для интегрируемой с квадратом функции (см. (7), (15) в [10, глава V, §65]). С его помощью Лузиным были также исследованы метрические свойства измеримых множеств и измеримых функций.

В следующей теореме, аналогичной по формулировке теореме 2, мы рассматриваем условия сходимости в точке интеграла (2) — особого интеграла Лузина для производной ρ'.

Теорема 3. *Пусть ρ — абсолютно непрерывная 2π-периодическая функция, коэффициенты Фурье c_k которой удовлетворяют условию: для некоторой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{Re}\,(c_k e^{ikx_0})$ абсолютно сходится. Тогда существует интеграл*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho'(x_0+t)-\rho'(x_0-t)}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}}\,dt = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\rho'(x_0+t)-\rho'(x_0-t)}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}}\,dt,$$

причем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho'(x_0+t)-\rho'(x_0-t)}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}}\,dt = -2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}|k|c_k e^{ikx_0} = -4\pi\sum_{k=1}^{\infty}k\mathrm{Re}\,(c_k e^{ikx_0}).$$

Доказательство. Благодаря связи (3) интеграла (2) с интегралом (1), достаточно показать, что условия теоремы 3 влекут выполнение условия (4) и условий теоремы 2.

Нетрудно заметить, что для функции $\rho_{x_0}(t) = \frac{\rho(x_0+t)+\rho(x_0-t)}{2}$ ее ряд Фурье имеет следующий вид: $c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}(c_k e^{ikx_0})\cos kt$. Поскольку функция ρ абсолютно непрерывна, то она почти всюду имеет конечную производную, и, следовательно, ее ряд Фурье сходится к ней почти всюду. Аналогично, ряд Фурье для ρ_{x_0} сходится почти всюду к ρ_{x_0}. Но из условия теоремы следует, что ряд Фурье для ρ_{x_0} является дифференцируемой функцией. Отсюда следует, что ρ_{x_0} дифференцируема и для каждого $t \in [-\pi,\pi]$

$$\rho_{x_0}(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}(c_k e^{ikx_0})\cos kt,$$

$$\rho'_{x_0}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2k\mathrm{Re}(c_k e^{ikx_0})\sin kt.$$

Из первого равенства получаем

$$\rho(x_0) = \rho_{x_0}(0) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}(c_k e^{ikx_0}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx_0}.$$

А из второго следует выполнение условия (4):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\rho(x_0+\varepsilon)+\rho(x_0-\varepsilon)-2\rho(x_0)}{\varepsilon} = 2\rho'_{x_0}(0) = 0.$$

Теорема 3 полностью доказана. □

Условия в теореме 3 приводят к условиям сходимости в точке особого интеграла Лузина уже для самой функции, а не для ее производной.

Теорема 4. *Пусть ρ — 2π-периодическая интегрируемая по Лебегу на $[-\pi,\pi]$ функция, коэффициенты Фурье c_k которой удовлетворяют условию: для некоторой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}(c_k e^{ikx_0})$ абсолютно сходится. Тогда в точке x_0 особый интеграл Лузина сходится, причем*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho(x_0+t)-\rho(x_0-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt = -4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Im}(c_k e^{ikx_0}).$$

Доказательство. Достаточно в теореме 3 взять в качестве 2π-периодической абсолютно непрерывной функции функцию

$$\varrho(t) = \int_{-\pi}^{t} \rho(x) - \rho_0 dx,$$

где $\rho_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho(x)dx$. Действительно, если $\rho(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$, то для почти всех $t \in [-\pi,\pi]$

$$\varrho(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{-ic_k}{k} e^{ikt},$$

и, следовательно, $\operatorname{Im}(c_k e^{ikx_0}) = k\operatorname{Re}\left(\frac{-ic_k e^{ikx_0}}{k}\right)$. Теорема доказана. □

С точки зрения связи между тригонометрически сопряженной функцией и тригонометрически сопряженным рядом в теореме 4 утверждается, что в случае абсолютной сходимости последнего в некоторой точке будет справедливо равенство в этой точке между ними.

Этот результат можно получить и другим способом. Обозначим через ϱ первообразную функции ρ. Известно (см. [1, теорема 7.20]), что если для некоторой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ особый интеграл Лузина от функции ρ сходится, то для ϱ в точке $x = x_0$ выполняется условие (4). С другой стороны, если для ϱ в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ выполняется условие (4), то

$$\rho^c(x_0) = 2\lim_{r\to 1-}\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Im}(c_k e^{ikx_0}) r^k,$$

т.е. сопряженная функция равна сумме сопряженного ряда, суммируемого методом Пуассона–Абеля. Из этого равенства и условия $\sum_{k=1}^{\infty}|\operatorname{Im}(c_k e^{ikx_0})| < \infty$ нетрудно получить, что в точке x_0, будет выполняться условие (4), а сумма Пуассона–Абеля сопряженного ряда равна его обычной сумме.

4. Аналоги интегралов на всей прямой

В работе Леонова [4], кроме интеграла (1), рассматривался также интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x_0+t)+\rho(x_0-t)-2\rho(x_0)}{t^2}\,dt,$$

возникающий как коэффициент при $1/t^2$ в оценках скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем (см. обзор [6]), и для которого также было приведено (без доказательства) утверждение о сходимости, аналогичное теореме 1. В этом пункте мы рассмотрим вопрос сходимости этого интеграла, а также соответствующего аналога интеграла Лузина

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho'(x_0+t)-\rho'(x_0-t)}{t}\,dt.$$

В этом случае функция $\rho \in L_1(\mathbb{R})$, и вместо коэффициентов Фурье уже используется корректно определенное прямое $\hat{\rho}$ и обратное $\check{\rho}$ преобразования Фурье, т.е.

$$\hat{\rho}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(t)e^{-ixt}dt, \quad \check{\rho}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(t)e^{ixt}dt.$$

Теорема 5. *Пусть $\rho \in L_1(\mathbb{R})$ такова, что для некоторой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\rho(x_0) = \check{\hat{\rho}}(x_0)$ и $\int\limits_0^\infty x|\mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ixx_0})|dx < \infty$. Тогда существует интеграл*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x_0+t)+\rho(x_0-t)-2\rho(x_0)}{t^2}\,dt = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\rho(x_0+t)+\rho(x_0-t)-2\rho(x_0)}{t^2}\,dt,$$

причем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x_0+t)+\rho(x_0-t)-2\rho(x_0)}{t^2}\,dx = -\sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\hat{\rho}e^{ixx_0}dx.$$

Доказательство. Для функции $\rho_{x_0}(t) = \frac{\rho(x_0+t)+\rho(x_0-t)}{2}$ найдем ее преобразование Фурье:

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho_{x_0}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x_0+s)+\rho(x_0-s)}{2}e^{-ist}ds \\
&= \frac{e^{ix_0t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(s)}{2}e^{-ist}ds + \frac{e^{-ix_0t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(s)}{2}e^{ist}ds \\
&= \frac{\hat{\rho}(t)e^{ix_0t}+\hat{\rho}(-t)e^{-ix_0t}}{2} = \mathrm{Re}(\hat{\rho}(t)e^{ix_0t}).
\end{aligned}$$

Из условия теоремы следует, что $\widehat{\rho_{x_0}} \in L_1(\mathbb{R})$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\rho_{x_0}}\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{Re}(\hat{\rho}(t)e^{ix_0t})|dt = 2\int_0^{\infty} |\mathrm{Re}(\hat{\rho}(t)e^{ix_0t})|dt \\
&= 2\int_0^1 |\mathrm{Re}(\hat{\rho}(t)e^{ix_0t})|dt + 2\int_1^{\infty} |\mathrm{Re}(\hat{\rho}(t)e^{ix_0t})|dt \\
&\le 2\int_0^1 |\mathrm{Re}(\hat{\rho}(t)e^{ix_0t})|dt + 2\int_0^{\infty} t|\mathrm{Re}(\hat{\rho}(t)e^{ix_0t})|dt < \infty.
\end{aligned}$$

Хорошо известно (см., например, [12, теорема 7.7.]), что если $\varrho \in L_1(\mathbb{R})$ и ее преобразование Фурье $\hat{\varrho} \in L_1(\mathbb{R})$, то справедлива формула обращения

$$\check{\hat{\varrho}}(x) = \varrho(x) \text{ почти всюду в } \mathbb{R}.$$

Таким образом, применяя формулу обращения к ρ_{x_0}, а также учитывая равенство $\check{\hat{\rho}}(x_0) = \rho(x_0)$, для почти всех $t \in \mathbb{R}$ получаем

$$\rho(x_0+t)+\rho(x_0-t)-2\rho(x_0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\rho_{x_0}}(x)e^{ixt}dx - \int_{-\infty}^{\infty}\hat{\rho}(x)e^{ixx_0}dx\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ix_0x})e^{itx}dx - \int_{-\infty}^{\infty}\hat{\rho}(x)e^{ixx_0}dx\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{0}^{\infty}\mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ix_0x})(e^{itx}+e^{-itx})dx - \int_{0}^{\infty}2\mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ixx_0})dx\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ixx_0})(e^{ixt}+e^{-ixt}-2)dx = \frac{-8}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ixx_0})\sin^2\frac{xt}{2}dx.$$

Проинтегрировав, получим повторный интеграл

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{\rho(x_0+t)+\rho(x_0-t)-2\rho(x_0)}{t^2}dt = \frac{-8}{\sqrt{2\pi}}\int_\varepsilon^\infty\int_0^\infty \frac{1}{t^2}\mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ixx_0})\sin^2\frac{xt}{2}dxdt.$$

Так как $\int\limits_0^\infty x|\mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ixx_0})|dx < \infty$ и $\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{\sin^2\frac{xt}{2}}{t^2}dt < \frac{|x|\pi}{2}$, то повторный интеграл

$$\int_0^\infty |\mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ixx_0})|\left(\int_\varepsilon^\infty \frac{\sin^2\frac{xt}{2}}{t^2}dt\right)dx < \infty.$$

Следовательно, по теореме Тонелли функция $\frac{1}{t^2}\mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ixx_0})\sin^2\frac{xt}{2}$ интегрируема по Лебегу на множестве $[0,\infty)\times[\varepsilon,\infty)$. Тогда теорема Фубини позволяет сменить порядок интегрирования

$$\frac{-8}{\sqrt{2\pi}}\int_\varepsilon^\infty\int_0^\infty \frac{1}{t^2}\mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ixx_0})\sin^2\frac{xt}{2}dxdt = \frac{-8}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ixx_0})\int_\varepsilon^\infty \frac{\sin^2\frac{xt}{2}}{t^2}dtdx.$$

Так как $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2\frac{xt}{2}}{t^2}dt = \frac{\pi|x|}{2}$, то, перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$ (теорема Лебега позволяет нам внести предел под знак интегрирования), получим:

$$2\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-8}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ixx_0})\int_\varepsilon^\infty \frac{\sin^2\frac{xt}{2}}{t^2}dtdx = \frac{-8}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{\pi x}{2}\mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ixx_0})dx$$
$$= -2\sqrt{2\pi}\int_0^\infty x\mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ixx_0})dx = -\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |x|\hat{\rho}(x)e^{ixx_0}dx.$$

Теорема 5 доказана. □

Следующая теорема является аналогом теоремы 3.

Теорема 6. *Пусть* $\rho \in L_1(\mathbb{R})$ *— такая абсолютно непрерывная функция, что для некоторой точки* $x_0 \in \mathbb{R}$ *справедливо условие* $\int\limits_0^\infty x|\mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ixx_0})|dx < \infty$.

Тогда существует интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho'(x_0+t)-\rho'(x_0-t)}{t}\,dt = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\rho'(x_0+t)-\rho'(x_0-t)}{t}\,dt,$$

причем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho'(x_0+t)-\rho'(x_0-t)}{t}\,dt = -\sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\hat{\rho}e^{ixx_0}dx.$$

Доказательство. Из условий теоремы следует (см. выкладки в доказательстве теоремы 5), что для функции ρ_{x_0} справедлива формула обращения: для почти всех $t\in\mathbb{R}$:

$$\rho_{x_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\rho_{x_0}}(x)e^{ixt}\,dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ixx_0})\cos xt\,dx.$$

В левой части этой формулы стоит абсолютно непрерывная (следовательно, дифференцируемая почти в каждой точке) функция, а в правой — непрерывно дифференцируемая функция. Поэтому равенство между ними справедливо для всех $t\in\mathbb{R}$. Также для всех $t\in\mathbb{R}$ верно равенство межу их производными:

$$\rho'_{x_0}(t) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} x\mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ixx_0})\sin xt\,dx.$$

Из этих интегральных представлений для ρ_{x_0} и ее производной ρ'_{x_0} видно, что

$$\rho(x_0) = \rho_{x_0}(0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}(\hat{\rho}(x)e^{ixx_0})dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\rho}(x)e^{ixx_0}dx = \check{\hat{\rho}}(x_0),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\rho(x_0+\varepsilon)+\rho(x_0-\varepsilon)-2\rho(x_0)}{\varepsilon} = 2\rho'_{x_0}(0) = 0$$

и $\rho_{x_0}(+\infty)=0$. Мы видим, что все условия теоремы 5 выполнены. Интегрируя по частям, получаем:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\rho(x_0+t)+\rho(x_0-t)-2\rho(x_0)}{t^2}\,dt = -\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\rho(x_0+t)+\rho(x_0-t)-2\rho(x_0)\,d\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{\rho(x_0+\varepsilon)+\rho(x_0-\varepsilon)-2\rho(x_0)}{\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\rho'(x_0+t)-\rho'(x_0-t)}{t}\,dt.$$

Теорема доказана. □

References

[1] Zygmund A. *Trigonometric Series. Second edition. V. I.* Cambridge University Press, Cambridge, 1959. MR0107776

[2] Bari N.K. *A treatise on trigonometric series*, Fizmatgiz, Moscow, 1961; English transl., vol. I, II, Pergamon Press, Oxford, 1964. MR0171116

[3] Estrada R., Vindas J. *On the point behavior of Fourier series and conjugate series*, Z. Anal. Anwend. **29**:4 (2010), 487–504. MR2735485

[4] Leonov V.P. *On the dispersion of time means of a stationary stochastic process*, Teor. Veroyatnost. Primenen. **6**:1 (1961), 93–101; English transl., Theory Probab. Appl. **6**:1 (1961), 87–93. MR0133173

[5] Kachurovskii A.G., Sedalishchev V.V. *Constants of estimates for the rate of convergence in the von Neumann and Birkhoff ergodic theorems*, Mat. Sb. **202**:8 (2011), 21–40; English transl., Sb. Math. **202**:8 (2011), 1105–1125. MR2866197

[6] Kachurovski A.G., Podvigin I.V. *Estimates of the rate of convergence in the von Neumann and Birkhoff ergodic theorems*, Trudy Mosk. Mat. Obshch. **77**:1 (2016), 1-66; English transl.,Trans. Moscow Math. Soc. **77**, (2016), 1-53. MR3643963

[7] Kachurovskii A.G., Knizhov K.I. *Deviations of Fejer sums and rates of convergence in the von Neumann ergodic theorem*, Dokl. Akad. Nauk, **480**:1 (2018), 21–24; English transl., Dokl. Math. **97**:3 (2018), 211–214. MR3838789

[8] Kachurovskii A.G. *Rates of convergence in ergodic theorems*, Uspekhi Mat. Nauk **51**:4 (1996), 73–124; English transl., Russian Math. Surveys **51**:4 (1996), 653–703. MR1422228

[9] Kornfeld I.P., Sinai Ya.G., Fomin S.V. *Ergodic theory*, Nauka, Moscow, 1980; English transl., Springer, New York, 1982. MR610981

[10] Luzin N.N. *Integral i trigonometriceskii ryad. (Russian) [Integral and trigonometric series.]* Editing and commentary by N. K. Bari and D. E. Men'shov. Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow-Leningrad, 1951.

[11] Thompson B.S., Bruckner J.B., Bruckner A.M. *Elementary Real Analysis, Second Edition*, ClassicalRealAnalysis.com, 2008.

[12] Rudin W. *Functional analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York, 1973. MR0365062

Kirill Igorevich Knizhov
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: kirillknizhov@mail.ru

Ivan Viktorovich Podvigin
Sobolev Institute of Mathematics,
4, pr. Koptyuga,
630090, Novosibirsk, Russia;
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: ipodvigin@math.nsc.ru