S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 863–875 (2019) УДК 512.8
DOI 10.33048/semi.2019.16.056 MSC 20F36+20F05+20F10

О НОВОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРУППЫ ВИРТУАЛЬНЫХ КОС

А.А. КОРОБОВ, О.А. КОРОБОВ

Abstract. We propose a representation of the virtual braid group VB_n into the automorphism group of a free product of a free groups and a free Abelian groups. V. G. Bardakov, Yu. A. Mikhalchishina and M. V. Neshchadim proposed a representation φ_M of the virtual braid group VB_n into the automorphism group of a free product of a free group and a free Abelian group. Our representation generalizes this representation φ_M. It is proved that the kernel of new representation is contained in the kernel of representation φ_M. It is proved that natural genetic code of image of the virtual braid group VB_n with respect to new representation has strong symmetry.

Keywords: braids, virtual braids, representations by automorphisms.

1. Введение

Основная проблема теории узлов — классификация узлов с точностью до эквивалентности. Ключевую роль в ее решении играют инварианты узлов. Связь между зацеплениями и косами задается теоремами Александера и Маркова. Теорема Александера утверждает, что любое зацепление можно представить в виде замыкания косы. Теорема Маркова сводит проблему классификации зацеплений к ряду алгебраических проблем для групп кос.

В последние десятилетия возникли некоторые обобщения теории узлов. Одним из таких обобщений является теория виртуальных узлов, введенная Кауффманом в 1996 году [1]. Кауффман определил группу виртуальных кос, которая играет ту же роль в теории виртуальных узлов, что и классическая группа кос в теории узлов. Для виртуальных узлов доказаны аналоги теорем

Korobov, A.A., Korobov, O.A., On the new representation of the virtual braid group.

Поступила 5 ноября 2018 г., опубликована 14 июня 2019 г.

Александера и Маркова ([1]– [2]; [3], 21.5). Известно, что группа узла является сильным инвариантом классических узлов. Естественно попробовать определить аналог этого инварианта для виртуального узла. Существует несколько подходов к определению группы виртуальных узлов и зацеплений. Первое определение было дано Кауфманом в 1996 году, но определенная им группа не отличала виртуальный трилистник от тривиального узла. В работе Бардакова [4] группы виртуальных узлов независимо определялись при помощи представления группы виртуальных кос автоморфизмами свободной группы. Далее было дано определение Сильвера и Вильямс [5]–[6] и затем Боден, Диес, Гаудре, Харпер, Никас [7]. К этому же кругу исследований примыкает диссертация Михальчишиной, а также статья [12] трех авторов (Бардакова, Михальчишиной и Нещадима), где было построено представление группы виртуальных кос в группу автоморфизмов свободного произведения свободной и свободной абелевой групп, обобщающее все ранее известные представления.

В настоящей статье предлагается новое представление группы виртуальных кос в группу автоморфизмов свободного произведения свободных и свободных абелевых групп, ядро которого содержится в ядре представления Бардакова —Михальчишиной —Нещадима (теорема 1), вводится понятие сильной симметрии для генетического кода гомоморфного образа группы кос и группы виртуальных кос, приводятся примеры гомоморфных образов группы кос и группы виртуальных кос, обладающих сильной симметрией. Доказано, что естественный генетический код образа группы виртуальных кос под действием нового представления обладает сильной симметрией, ну а ответ на аналогичный вопрос для представления Бардакова —Михальчишиной —Нещадима до сих пор неизвестен. Кроме того, небольшая модификация отображений, задающих новое представление, приводит к представлению группы виртуальных крашеных кос с нетривиальным ядром (теорема 2).

2. Определения и предварительные результаты

Напомним известные результаты о группах классических кос, группах виртуальных кос и их представлениях автоморфизмами (более подробно см. [1], [4], [8]–[11]).

Группа кос B_n на n, $n \geq 2$, нитях задается порождающими элементами $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \text{ при } i = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{1}$$

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ при } |i-j| \geq 2. \tag{2}$$

Существует гомоморфизм группы B_n на группу подстановок S_n, отображающий порождающий σ_i в транспозицию $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Определение.

Будем говорить, что множество слов W свободной группы F_m обладает сильной симметрией, если каждое слово из W, прочитанное в обратном порядке, также принадлежит W.

Замечание 1. Группа $\langle \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{-1} \rangle$ не только изоморфна группе кос B_n, но и обладает тем же самым генетическим кодом. Поэтому любое соотношение группы кос обладает сильной симметрией: слово свободной группы является соотношением группы кос в не зависимости от того, читается ли оно слева направо или справа налево.

Группа виртуальных кос VB_n порождается группой классических кос $B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \rangle$ и группой подстановок $S_n = \langle \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1} \rangle$. Порождающие σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, удовлетворяют соотношениям (1), (2), а порождающие ρ_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, — следующим соотношениям (соотношения в группе подстановок S_n):

$$\rho_i^2 = 1 \text{ при } i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3}$$

$$\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i \text{ при } |i-j| \geq 2, \tag{4}$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \text{ при } i = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{5}$$

Остальные определяющие соотношения группы VB_n смешанные и имеют вид

$$\sigma_i \rho_j = \rho_j \sigma_i \text{ при } |i-j| \geq 2, \tag{6}$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \text{ при } i = 1, 2, \ldots, n-2. \tag{7}$$

Для группы виртуальных кос VB_n по-прежнему справедливо замечание 1, и множество соотношений этой группы обладает сильной симметрией.

Группа виртуальных крашеных кос VP_n является ядром гомоморфизма $VB_n \mapsto S_n$, при котором

$$\sigma_i \mapsto \rho_i, \rho_i \mapsto \rho_i, i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Как было установлено в [4], группа VP_n порождается элементами

$$\lambda_{i,i+1} = \rho_i \sigma_i^{-1}, \lambda_{i+1,i} = \rho_i \lambda_{i,i+1} \rho_i = \sigma_i^{-1} \rho_i, i = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$\lambda_{ij} = \rho_{j-1} \rho_{j-2} \ldots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \ldots \rho_{j-2} \rho_{j-1},$$
$$\lambda_{ji} = \rho_{j-1} \rho_{j-2} \ldots \rho_{i+1} \lambda_{i+1,i} \rho_{i+1} \ldots \rho_{j-2} \rho_{j-1}, 1 \leq i < j-1 \leq n-1.$$

В [12] было определено представление φ_M группы виртуальных кос, которое обобщает многие известные ранее. Пусть $F_{n,2n+1} = F_n * Z_{2n+1}$ — свободное произведение, где F_n — свободная группа ранга n, порожденная элементами $x_1, \ldots, x_n$, а Z_{2n+1} — свободная абелева группа, свободно порожденная элементами $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$. Отображение

$\varphi_M : VB_n \to Aut(F_{n,2n+1})$, определенное действием на порождающих:

$$\varphi_M(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1}^{u_i} x_i^{-v_0 u_{i+1}} \\ x_{i+1} \mapsto x_i^{v_0} \end{cases} \quad \varphi_M(\sigma_i) : \begin{cases} u_i \mapsto u_{i+1} \\ u_{i+1} \mapsto u_i \end{cases} \quad \varphi_M(\sigma_i) : \begin{cases} v_i \mapsto v_{i+1} \\ v_{i+1} \mapsto v_i \end{cases}$$

$$\varphi_M(\rho_i) : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}^{v_i^{-1}}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i^{v_{i+1}}, \end{cases} \quad \varphi_M(\rho_i) : \begin{cases} u_i \mapsto u_{i+1}, \\ u_{i+1} \mapsto u_i, \end{cases} \quad \varphi_M(\rho_i) : \begin{cases} v_i \mapsto v_{i+1}, \\ v_{i+1} \mapsto v_i, \end{cases}$$

задает представление группы VB_n в группу $Aut(F_{n,2n+1})$. Там же доказано

Предложение 1. *Представление φ_M действует на порождающих группы VP_n по формулам*

$$\varphi_M(\lambda_{i,i+1}) : \begin{cases} x_i \mapsto (x_{i+1}^{-v_0^{-1}} x_i x_{i+1}^{u_i})^{u_{i+1}^{-1} v_{i+1}^{-1}}, \\ x_{i+1} \mapsto x_{i+1}^{v_0^{-1} v_i}, \end{cases}$$

$$\varphi_M(\lambda_{i+1,i}) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i^{v_0^{-1} v_{i+1}}, \\ x_{i+1} \mapsto (x_i^{-v_0^{-1} v_{i+1}} x_{i+1}^{v_i^{-1}} x_i^{v_{i+1} u_{i+1}})^{u_i^{-1}}, \end{cases}$$

$$\varphi_M(\lambda_{ij}) : \begin{cases} x_i \mapsto (x_j^{-v_0^{-1} v_{i+1}^{-1} \ldots v_{j-1}^{-1}} x_i x_j^{v_{i+1}^{-1} \ldots v_{j-1}^{-1} u_i})^{u_j^{-1} v_j^{-1}}, \\ x_j \mapsto x_j^{v_0^{-1} v_i}, \end{cases}$$

$$\varphi_M(\lambda_{ji}) : \begin{cases} x_i \mapsto x_i^{v_0^{-1} v_j}, \\ x_j \mapsto (x_i^{-v_0^{-1} v_j} x_j^{v_i^{-1} \ldots v_{j-1}^{-1}} x_i^{v_j u_j})^{u_i^{-1} v_{i+1} \ldots v_{j-1}}, \end{cases}$$

где $1 \leq i < j - 1 \leq n$.

До сих пор неизвестно обладет ли множество соотношений группы $\varphi_M(VB_n)$ сильной симметрией.

Напомним, что представление $\varphi : B_n \to Aut(F_n)$, где $F_n = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ – свободная группа ранга n, называется локальным, если

$$\sigma_i^{\varphi} : \begin{cases} x_i \mapsto \lambda(x_i, x_{i+1}), \\ x_{i+1} \mapsto \mu(x_i, x_{i+1}), \end{cases}$$

где λ, μ – приведенные слова в свободной группе, порожденной x_i и x_{i+1}. Здесь и далее при указании действия отображения на порождающих группы мы указываем только нетривиальное действие на порождающих, подразумевая, что остальные порождающие остаются на месте. Этого правила мы будем придерживаться и при задании любого гомоморфизма группы, порождённой фиксированной системой порождающих.

В случае, когда $\lambda(x_i, x_{i+1}) = x_i x_{i+1} x_i^{-1}$, $\mu(x_i, x_{i+1}) = x_i$ получается классическое представление Артина φ_A. Именно локальность обеспечивает выполнение на группе, порождённой указанными автоморфизмами, всех коротких (т. е. вида (2)) соотношений группы кос. Представление Бардакова — Михальчишиной —Нещадима и его обобщение, рассмотренное в этой статье, имеют похожую структуру. Поэтому, допуская некоторую вольность речи, будем говорить, что локальность представления Бардакова —Михальчишиной — Нещадима и его обобщения обеспечивает выполнение на группе, порождённой указанными тремя авторами и авторами этой статьи автоморфизмами, всех коротких (т. е. вида (2), (4), (6)) соотношений группы виртуальных кос. Представление Артина группы кос является точным (см. [9]), поэтому множество соотношений группы $\varphi_A(B_n)$ обладет сильной симметрией. В статье [13] Лонг и Патон показали, что образ группы кос на n нитях относительно представления Буррау обладает сильной симметрией. Рассуждая теми же методами можно показать, что матричное представление Бардакова (см. [14]) группы VB_n также обладает сильной симметрией, если в нем сделать специализацию $t = q^2$.

Следующее предложение хорошо известно.

Предложение 2. *Пусть A_n свободная абелева группа со совободными образующими $f_1, \ldots, f_n$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $A_n/(A_n)^m$ свободная абелева группа экспоненты m со свободными образующими $f_1(A_n)^m, \ldots, f_n(A_n)^m$. Кроме того, $A_n/(A_n)^m$ — прямое произведение циклических групп порядка m и $|A_n/(A_n)^m| = m^n$.*

3. Новое представление группы виртуальных кос

Теперь мы определим представление группы виртуальных кос VB_n, которое обобщает представления, введенные ранее.

Рассмотрим свободную группу G со свободными образующими $x_1, \dots, x_n$, свободную группу $\hat{G}$ со свободными образующими $y_1, \dots, y_n$, свободную в некотором многообразии группу K_1 со свободными образующими $u_1, u_2, \dots, u_n$, свободную в некотором многообразии группу $\hat{K_1}$ со свободными образующими $p_1, p_2, \dots, p_n$, свободную в некотором многообразии группу K_2 со свободными образующими $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$, свободную в некотором многообразии группу $\hat{K_2}$ со свободными образующими $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$.

Ниже мы приведём некоторый способ, позволяющий по двум абстрактным группам строить третью, таким образом будет на классе групп определена бинарная операция в смысле универсальной алгебры.

Определение.

Будем бинарную операцию на классе всех групп называть универсальною, если результат U ее применения к группам G и H обладает следующими свойствами:
1) существуют вложения j_1 группы G в U и j_2 группы H в U, и $U =$гр$(j_1(G), j_2(H))$;
2) для любых двух автоморфизмов φ и ψ групп G и H, соответственно, существует единственный эндоморфизм группы U такой, что его сужение на $j_1(G)$ совпадает с φ, а сужение на $j_2(H)$ совпадает с ψ после естественных отождествлений. Примерами такой универсальной операции являются свободное и прямое произведения двух групп. Дальше, когда речь идёт о группе, полученной универсальной операцией, символы j_1 и j_2 будем опускать.

Лемма 1. *Пусть $K =$ гр(K_1, K_2) — результат применения универсальной бинарной групповой операции, $\hat{K} =$ гр$(\hat{K_1}, \hat{K_2})$ — результат применения универсальной бинарной групповой операции. Следующие отображения*

$$\hat{\sigma}_i : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1}^{u_i} x_i^{-v_0 u_{i+1}}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i^{v_0}, \\ y_i \mapsto y_{i+1}^{q_0^{-1}}, \\ y_{i+1} \mapsto (y_{i+1}^{-q_0^{-1}} y_i y_{i+1}^{p_i})^{p_{i+1}^{-1}}, \end{cases} \quad \hat{\sigma}_i : \begin{cases} u_i \mapsto u_{i+1}, \\ u_{i+1} \mapsto u_i, \\ p_i \mapsto p_{i+1}, \\ p_{i+1} \mapsto p_i, \end{cases} \quad \hat{\sigma}_i : \begin{cases} v_i \mapsto v_{i+1}, \\ v_{i+1} \mapsto v_i, \\ q_i \mapsto q_{i+1}, \\ q_{i+1} \mapsto q_i; \end{cases}$$

$$\hat{\rho}_i : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}^{v_i^{-1}}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i^{v_{i+1}}, \\ y_i \mapsto y_{i+1}^{q_i^{-1}}, \\ y_{i+1} \mapsto y_i^{q_{i+1}}, \end{cases} \quad \hat{\rho}_i : \begin{cases} u_i \mapsto u_{i+1}, \\ u_{i+1} \mapsto u_i, \\ p_i \mapsto p_{i+1}, \\ p_{i+1} \mapsto p_i, \end{cases} \quad \hat{\rho}_i : \begin{cases} v_i \mapsto v_{i+1}, \\ v_{i+1} \mapsto v_i, \\ q_i \mapsto q_{i+1}, \\ q_{i+1} \mapsto q_i. \end{cases}$$

продолжаются до автоморфизмов свободного произведения $G * \hat{G} * K * \hat{K}$.

Доказательство. Ясно, что все эти отображения продолжаются до эндоморфизмов группы $G * \hat{G} * K * \hat{K}$. Так как отображения

$$\hat{\theta}_i : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}^{v_0^{-1}}, \\ x_{i+1} \mapsto (x_{i+1}^{-v_0^{-1}} x_i x_{i+1}^{p_i})^{p_{i+1}^{-1}}, \\ y_i \mapsto y_i y_{i+1}^{p_i} y_i^{-q_0 p_{i+1}}, \\ y_{i+1} \mapsto y_i^{q_0}, \end{cases} \quad \hat{\theta}_i : \begin{cases} u_i \mapsto u_{i+1}, \\ u_{i+1} \mapsto u_i, \\ p_i \mapsto p_{i+1}, \\ p_{i+1} \mapsto p_i, \end{cases} \quad \hat{\theta}_i : \begin{cases} v_i \mapsto v_{i+1}, \\ v_{i+1} \mapsto v_i, \\ q_i \mapsto q_{i+1}, \\ q_{i+1} \mapsto q_i \end{cases}$$

также продолжаются до эндоморфизмов свободного произведения $G*\hat{G}*K*\hat{K}$, а отображение $\hat{\sigma}_i\hat{\theta}_i$ продолжается до тождественного автоморфизма, то ядра всех эндоморфизмов $\hat{\sigma}_i$ тривиальны. Значит, $\hat{\sigma}_i$ — автоморфизм группы $G*\hat{G}*K*\hat{K}$. Для отображений $\hat{\rho}_i$ лемма доказывается аналогично. $\square$

Лемма 2. *Пусть $x_1, \ldots, x_n$ свободные образующие свободной группы G, H абелева группа. Пусть*

$$\varphi_{ij} : \begin{cases} x_i \mapsto x_i^a, \\ x_j \mapsto x_i^{-b} x_j^c x_i^d, \end{cases}$$

— эндоморфизм группы $G*H$, оставляющий все элементы из H на месте, где $a, b, c, d \in H$ и $i \neq j$. Тогда φ_{ij} — автоморфизм группы $G*H$.

Доказательство. Зафиксируем i и j и вместо φ_{ij} далее будем писать φ. Рассмотрим эндоморфизм группы $G*H$

$$\psi : \begin{cases} x_i \mapsto x_i^{a^{-1}}, \\ x_j \mapsto (x_i^{a^{-1}b} x_j x_i^{-a^{-1}d})^{c^{-1}}, \end{cases}$$

оставляющий на месте все элементы из H.

Так как отображение $\psi\varphi$ продолжается до тождественного автоморфизма, то ядро эндоморфизма φ тривиально. Значит, φ — автоморфизм группы $G*H$. $\square$

Нетривиальное соотношение между автоморфизмами $\hat{\sigma}_i, \hat{\rho}_j$ будет нетривиальным соотношением и между их сужениями, которые мы будем обозначать теми же символами, на свободное произведение $G*K$, поэтому полезна следующая

Лемма 3. *Автоморфизм $\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_{i+1}\hat{\sigma}_i$ есть продолжение отображения, заданного на порождающих группы $G*K$ следующим образом:*

$$\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_{i+1}\hat{\sigma}_i : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1}^{u_i} x_{i+2}^{u_i u_{i+1}} [x_i^{-v_0^2 u_{i+2} u_{i+1}}, [u_{i+1}, v_0 u_{i+2}]] x_{i+1}^{-u_i v_0 u_{i+2}} x_i^{-v_0 u_{i+2}}, \\ x_{i+1} \mapsto (x_i x_{i+1}^{u_i} x_i^{-v_0 u_{i+1}})^{v_0}, \\ x_{i+2} \mapsto x_i^{v_0^2}, \\ u_i \mapsto u_{i+2}, \\ u_{i+2} \mapsto u_i, \\ v_i \mapsto v_{i+2}, \\ v_{i+2} \mapsto v_i; \end{cases}$$

автоморфизм $\hat{\sigma}_{i+1}\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_{i+1}$ есть продолжение отображения, заданного на порождающих группы $G * K$ следующим образом:

$$\hat{\sigma}_{i+1}\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_{i+1} : \begin{cases} x_i \mapsto x_i(x_{i+1}x_{i+2}^{u_{i+1}}x_{i+1}^{-v_0u_{i+2}})^{u_i}x_i^{-v_0u_{i+2}}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i^{v_0}x_{i+1}^{v_0u_i}x_i^{-v_0^2u_{i+1}}, \\ x_{i+2} \mapsto x_i^{v_0^2}, \\ u_i \mapsto u_{i+2}, \\ u_{i+2} \mapsto u_i, \\ v_i \mapsto v_{i+2}, \\ v_{i+2} \mapsto v_i; \end{cases}$$

автоморфизм $\hat{\rho}_i\hat{\rho}_{i+1}\hat{\sigma}_i$ есть продолжение отображения, заданного на порождающих группы $G * K$ следующим образом:

$$\hat{\rho}_i\hat{\rho}_{i+1}\hat{\sigma}_i : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+2}^{v_i^{-1}v_{i+1}^{-1}}, \\ x_{i+1} \mapsto (x_ix_{i+1}^{u_i}x_i^{-v_0u_{i+1}})^{v_{i+2}}, \\ x_{i+2} \mapsto x_i^{v_0v_{i+2}} \\ u_i \mapsto u_{i+2}, \\ u_{i+2} \mapsto u_i, \\ v_i \mapsto v_{i+2}, \\ v_{i+2} \mapsto v_i; \end{cases}$$

автоморфизм $\hat{\sigma}_{i+1}\hat{\rho}_i\hat{\rho}_{i+1}$ есть продолжение отображения, заданного на порождающих группы $G * K$ следующим образом:

$$\hat{\sigma}_{i+1}\hat{\rho}_i\hat{\rho}_{i+1} : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+2}^{v_{i+1}^{-1}v_i^{-1}}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i^{v_{i+2}}x_{i+1}^{v_{i+2}u_i}x_i^{-v_{i+2}v_0u_{i+1}}, \\ x_{i+2} \mapsto x_i^{v_{i+2}v_0}, \\ u_i \mapsto u_{i+2}, \\ u_{i+2} \mapsto u_i, \\ v_i \mapsto v_{i+2}, \\ v_{i+2} \mapsto v_i. \end{cases}$$

Во введённых выше обозначениях справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $K = гр(K_1, K_2)$ — результат применения универсальной бинарной групповой операции, $\hat{K} = гр(\hat{K}_1, \hat{K}_2)$ — результат применения универсальной бинарной групповой операции. Отображение, определяемое правилом $\sigma_i \mapsto \hat{\sigma}_i, \rho_i \mapsto \hat{\rho}_i$, задаёт гомоморфизм $\varphi_K : VB_n \to Aut(G * \hat{G} * K * \hat{K})$ тогда и только тогда, когда $K_1, K_2, \hat{K}_1, \hat{K}_2$ — свободные группы некоторых многообразий абелевых групп и $K = K_1 \times K_2$, $\hat{K} = \hat{K}_1 \times \hat{K}_2$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть, сначала, $K = K_1 \times K_2$, $\hat{K} = \hat{K}_1 \times \hat{K}_2$, где $K_1, K_2, \hat{K}_1, \hat{K}_2$ — относительно свободные абелевы группы. Достаточно показать, что на группе гр$(\hat{\sigma}_i, \hat{\rho}_i | i = 1, 2, \dots n-1)$ выполнены все соотношения группы виртуальных кос VB_n. Тогда лемма 3 гарантирует, что для сужения этой группы на $G * K$ выполнены длинные соотношения группы кос и длинные смешанные соотношения. Для любых i, k каждый из автоморфизмов $\sigma_i|_{G*K}, \rho_k|_{G*K}$ является продолжением отображения множества свободных образующих, имеющего локальный характер. Поэтому на сужении выполнены все короткие соотношения группы кос и все короткие смешанные соотношения. Теперь покажем, что на сужении группы гр$(\hat{\sigma}_i, \hat{\rho}_i | i = 1, 2, \dots n-1)$ на свободное произведение $\hat{G} * \hat{K}$ выполнены все соотношения группы виртуальных кос VB_n.

Это равносильно следующему утверждению:
для сужения группы гр$(\hat{\sigma}_i^{-1}, \hat{\rho}_i^{-1} | i = 1, 2, \dots n-1)$ на свободное произведение $\hat{G} * \hat{K}$ выполнены все соотношения группы виртуальных кос VB_n. Последнее сужение ничем не отличается от сужения, рассмотренного в начале, и для него указанное утверждение выполнено.

Теперь мы легко завершим доказательство достаточности. Пусть w — такое несократимое слово свободной группы ранга $2n-2$, что $w(\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}, \rho_1, ..., \rho_{n-1}) = 1$. Тогда, по доказанному, сужения автоморфизма $w(\hat{\sigma}_1, ..., \hat{\sigma}_{n-1}, \hat{\rho}_1, ..., \hat{\rho}_{n-1})$ на свободные произведения $G * K$ и $\hat{G} * \hat{K}$ тривиальны. Тогда его можно продолжить до тождественного эндоморфизма на всю группу $G * \hat{G} * K * \hat{K}$. По свойству свободного произведения двух групп такое продолжение единственно. Поэтому $w(\hat{\sigma}_1, ..., \hat{\sigma}_{n-1}, \hat{\rho}_1, ..., \hat{\rho}_{n-1}) = 1$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть существует гомоморфизм φ_K группы VB_n в группу автоморфизмов свободного произведения $G * \hat{G} * K * \hat{K}$, действующий на порождающих этого свободного произведения по указанному в теореме правилу. Так как $\rho_1\rho_2\sigma_1 = \sigma_2\rho_1\rho_2$, то, применяя гомоморфизм φ_K к обеим частям этого равенства, получим $\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_2\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2$. Тогда по лемме 3 $v_2v_1x_3v_1^{-1}v_2^{-1}$ и $v_1v_2x_3v_2^{-1}v_1^{-1}$ — две нормальные формы одного и того же элемента свободного произведения $G*K_2$. Известно, что нормальная форма в таком свободном произведении единственна у каждого его элемента. Следовательно, $v_1v_2 = v_2v_1$. Так как $v_1, ..., v_n$ — свободные образующие относительно свободной группы K_2, то слово $[v_1, v_2]$ является тождеством на группе K_2, то есть K_2 — абелева группа. Теперь применим гомоморфизм φ_K к обеим частям равенства $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$. Тогда получим $\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_{i+1}\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_{i+1}\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_{i+1}$. Теперь из леммы 3 следует, что в свободном произведении $G * K$ есть элемент, который имеет две записи: $a = u_i^{-1}v_0^{-1}x_{i+1}v_0u_iu_{i+1}^{-1}v_0^{-2}x_i^{-1}v_0^2u_{i+1}$ и $b = v_0^{-1}u_i^{-1}x_{i+1}u_iu_{i+1}^{-1}v_0^{-1}x_i^{-1}v_0u_{i+1}v_0$. Тогда нормальная форма элемента v_0u_ia должна начинаться всегда с нетривиального элемента из G, даже в том случае, когда запись b не является нормальной формой элемента свободного произведения $G * K$. Поэтому $v_0u_iv_0^{-1}u_i^{-1} = 1$, $v_0u_{i+1}v_0^{-1}u_{i+1}^{-1} = 1$. Приравнивая значения автоморфизма $\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_{i+1}\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_{i+1}\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_{i+1}$ в точке x_i, согласно лемме 3, получим

$$u_{i+1}^{-1}u_i^{-1}x_{i+2}u_iu_{i+2}^{-1}v_0^{-2}x_i^{-1}u_{i+2}u_{i+1}u_{i+2}^{-1}u_{i+1}^{-1}x_iv_0u_{i+1}u_i^{-1}x_{i+1}^{-1}u_iv_0u_{i+2} =$$
$$u_i^{-1}u_{i+1}^{-1}x_{i+2}u_{i+1}u_{i+2}^{-1}v_0^{-1}x_{i+1}^{-1}v_0u_{i+2}u_i.$$

Снова левую часть обозначим через a, а правую — через b. Тогда нормальная форма элемента $bu_i^{-1}u_{i+2}^{-1}$ должна заканчиваться всегда на нетривиальный элемент из G, даже в том случае, когда запись b не является нормальной формой элемента свободного произведения $G*K$. Поэтому $u_iu_{i+2}u_i^{-1}u_{i+2}^{-1} = 1$. Тогда из $a = b$ следует $v_0u_nv_0^{-1}u_n^{-1} = 1$ и $v_0 \in Z(K)$. Теперь, как выше, можем заключить, что K_1 — абелева группа. Аналогично доказывается абелевость групп $\hat{K}_2$, $\hat{K}_1$.

Наконец, подействуем автоморфизмом $\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_2\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2$ на x_2. Тогда лемма 3 нам дает такие две записи элемента свободного произведения $G * K$: $a = v_3^{-1}u_1^{-1}x_2u_1u_2^{-1}v_0^{-1}x_1^{-1}u_2v_3$ и $b = u_1^{-1}v_3^{-1}x_2v_3u_1u_2^{-1}v_0^{-1}v_3^{-1}x_1^{-1}v_3u_2$. Нормальная форма элемента u_1v_3a снова обязана начинаться с нетривиального элемента из G. Поэтому $u_1v_3u_1^{-1}v_3^{-1}=1$. Возьмем произвольные индексы i, j из множества $\{1,2,...,n\}$. Так как $u_1,...,u_n$ — система свободных образующих группы K_1, а $v_1,...,v_n$ — система свободных образующих группы K_2, то отображения $u_1\mapsto u_i$, $v_3\mapsto v_j$ можно продолжить до автоморфизмов μ_i и ν_j групп K_1 и K_2, соответственно. Из универсальности бинарной операции над группами следует, что существует эндоморфизм θ группы K, продолжающий μ_i и ν_j. Поэтому $u_iv_j=v_ju_i$.

Осталось показать, что $K_1\cap K_2=1$. Обозначим $\square^{-1}$ — автоморфизм группы K_1, обращающий каждый её элемент. Из универсальности бинарной операции над группами следует, что существует эндоморфизм θ группы K, продолжающий $\square^{-1}$ и тождественный автоморфизм группы K_2. Следовательно, каждый элемент группы $K_1\cap K_2$ совпадает со своим обратным. Значит, отсутствие кручения в группе K_1 гарантирует нам, что $K_1\cap K_2=1$.

Теперь рассмотрим случай, когда группа K_1 не является свободной абелевой группой. Тогда она имеет период m (см. [15], 13.51). Значит, группа K_1 конечна и её порядок равен m^n (предложение 2). Если m нечётно, то силовская 2-подгруппа группы K_1 тривиальна, и поэтому $K_1\cap K_2=1$. Предположим, что $K_1\cap K_2\neq 1$. Тогда $m=2^sq$, где q нечётно, и силовская 2-подгруппа S группы K_1 имеет порядок 2^{sn}. Рассмотрим $V=S^{2^{s-1}}$ как векторное пространство размерности n над полем из двух элементов. Тогда $K_1\cap K_2$ — подпространство векторного пространства V. Достаточно для любого неединичного элемента группы V указать автоморфизм группы V, не оставляющий на месте этот элемент, который можно продолжить до автоморфизма группы S. В самом деле, пусть δ_0 — такой автоморфизм, δ — его продолжение на группу K_1, которое существует, потому что K_1 является прямым произведением своих силовских подгрупп (см. [16] теорема 17.1.4). Тогда тождественный автоморфизм группы K_2 и автоморфизм δ нельзя продолжить до эндоморфизма группы K.

Пусть, напротив, для элемента $a\in V$ такого автоморфизма не существует. Для завершения доказательства равенства $K_1\cap K_2=1$ осталось указать две такие подгруппы H_1 и H_2 группы $\mathrm{Aut}(V)$, что каждый элемент из $H_1\cup H_2$ продолжается до автоморфизма группы S и $\mathrm{Fix}(H_1)\cap\mathrm{Fix}(H_2)=1$. Рассмотрим произвольное разложение $\langle g_1\rangle\times\ldots\times\langle g_n\rangle$ группы S в прямое произведение циклических подгрупп порядка 2^s. Они существуют по предложению 2. Тогда $e_i=g_i^{2^{s-1}}$, $i=1,\ldots,n$, — базис векторного пространства V над полем из двух элементов. Обозначим через $H(g_1,\ldots,g_n)$ группу линейных операторов пространства V, индуцированную всевозможными перестановками векторов этого базиса. Очевидно, в подпространстве $\mathrm{Fix}(H(g_1,\ldots,g_n))$ существует единственный ненулевой вектор $e_1\ldots e_n$. Обозначим $w_i=u_i^q$. Тогда каждый элемент из $H(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ и $H(w_1w_2,w_2,\ldots,w_n)$ продолжается до автоморфизма группы S и $\mathrm{Fix}(H(w_1,w_2,\ldots,w_n))\cap\mathrm{Fix}(H(w_1w_2,w_2,\ldots,w_n))=1$.

Полученное противоречие завершает рассмотрение случая, когда группа K_1 не является свободной абелевой группой. Для группы $\hat{K}$ можно провести аналогичные рассуждения. $\square$

Замечание 2. Очевидно, $\ker(\varphi_K)\subseteq\ker(\varphi_M)$. Кроме того, если

$$w(\hat{\sigma}_1,...,\hat{\sigma}_{n-1},\hat{\rho}_1,...,\hat{\rho}_{n-1})=1,$$

то $w(\hat{\sigma}_1^{-1}, ..., \hat{\sigma}_{n-1}^{-1}, \hat{\rho}_1, ..., \hat{\rho}_{n-1}) = 1$. Поэтому соотношения группы $(VB_n)^{\varphi_K}$ обладают сильной симметрией.

Обозначим образ группы VP_n относительно φ_K через A. Пусть теперь дана произвольная абелева группа B с порождающими $\bar{v}_0, ..., \bar{v}_n$, $\bar{q}_0, ..., \bar{q}_n$. Тогда отображение $v_i \mapsto \bar{v}_i, q_i \mapsto \bar{q}_i$ можно продолжить до гомоморфизма $\vartheta : K_2 \times \hat{K}_2 \to B$.

Положим $\lambda_{ii} = 1, i = 1, \ldots, n$. Составим $(n \times n)$-матрицу Λ из канонических порождающих λ_{ij} группы VP_n. Поставим ей в соответствие $(n \times n)$-матрицу Λ_ϑ с еденичной главной диагональю, состоящую из эндоморфизмов λ_{ij}^ϑ, где $x_k^{\lambda_{ij}^\vartheta}$ получается из слова $x_k^{\hat{\lambda_{ij}}}$ заменой v_s на v_s^ϑ, $y_k^{\lambda_{ij}^\vartheta}$ получается из слова $y_k^{\hat{\lambda_{ij}}}$ заменой q_r на q_r^ϑ, $\lambda_{ij}^\vartheta|_{((K_1 \times K_2^\vartheta) \times (\hat{K}_1 \times \hat{K_2^\vartheta}))} = 1$.

Лемма 4. *Каждый элемент матрицы Λ_ϑ является автоморфизмом группы $G * \hat{G} * ((K_1 \times K_2^\vartheta) \times (\hat{K}_1 \times \hat{K_2^\vartheta}))$.*

Доказательство. Пусть i и j такие различные натуральные числа, что $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$. По лемме 2 и предложению 1 сужение λ_{ij}^ϑ на $G * (K_1 \times K_2^\vartheta)$ является автоморфизмом, а также сужение λ_{ij}^ϑ на $\hat{G} * (\hat{K}_1 \times \hat{K_2^\vartheta})$ является автоморфизмом. Поэтому ядро эндоморфизма λ_{ij}^ϑ тривиально. □

СЛЕДСТВИЕ. *На группе $A_\vartheta = гр(\lambda_{ij}^\vartheta | i \neq j$ и $i, j = 1, \ldots, n)$ выполнены все соотношения группы виртуальных крашеных кос VP_n.*

Доказательство. Ясно что, выполнение на группе A всех соотношений группы виртуальных крашеных кос VP_n равносильно выполнению на группе $H = G * \hat{G} * ((K_1 \times K_2) \times (\hat{K}_1 \times \hat{K}_2))$ некоторой конечной системы W соотношений. Возьмём произвольное слово $w \in W$, то есть

$$w(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_n, p_1, ..., p_n, v_0, ..., v_n, q_0, ..., q_n) = 1$$

— соотношение в группе H. Ясно, что систему гомоморфизмов, состоящую из гомоморфизма ϑ группы K_2, гомоморфизма ϑ группы $\hat{K}_2$, тождественного автоморфизма K_1, тождественного автоморфизма группы $\hat{K}_1$, тождественного автоморфизма группы G, и тождественного автоморфизма группы $\hat{G}$, можно продолжить до гомоморфизма κ группы H. Применим его к рассматриваемому соотношению. Тогда получим

$$w(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_n, p_1, ..., p_n, v_0^\vartheta, ..., v_n^\vartheta, q_0^\vartheta, ..., q_n^\vartheta) = 1.$$

Соотношение w из W было выбрано произвольно, поэтому на группе H^κ выполнена система соотношений W, что равносильно тому, что на A_ϑ выполнены все соотношения группы виртуальных крашеных кос VP_n. □

Итак, отображение, определяемое правилом $\lambda_{ij} \mapsto \lambda_{ij}^\vartheta$, задает гомоморфизм $\varphi_{K,\vartheta} : VP_n \to Aut(G * \hat{G} * ((K_1 \times K_2^\vartheta) \times (\hat{K}_1 \times \hat{K_2^\vartheta})))$.

Теорема 2. *Пусть $n \geq 3$, ϑ — такой гомоморфизм группы $K_2 \times \hat{K}_2$, что $v_0^\vartheta = v_1^\vartheta = v_3^\vartheta$, $q_0^\vartheta = q_1^\vartheta = q_3^\vartheta$. Тогда гомоморфизм $\varphi_{K,\vartheta} : VP_n \to Aut(G * \hat{G} * ((K_1 \times K_2^\vartheta) \times (\hat{K}_1 \times \hat{K_2^\vartheta})))$ имеет нетривиальное ядро, а именно, $[[\lambda_{12}^{-1}, \lambda_{32}], [\lambda_{21}, \lambda_{23}^{-1}]] \in \ker \varphi_{K,\vartheta}$.*

Доказательство. Пусть $\lambda = \rho_1\sigma_1^{-1}$, $\mu = \rho_2\sigma_2$, $\eta = \rho_1\sigma_1$, $\nu = \rho_2\sigma_2^{-1}$. Ясно, что $\lambda, \mu, \eta, \nu \in VP_n$. Сначала покажем , что $[\lambda^{-1}, \mu^{-1}][\eta^{-1}, \nu^{-1}] \neq [\eta^{-1}, \nu^{-1}][\lambda^{-1}, \mu^{-1}]$. Для этого достаточно показать, что различны образы при отображении φ_K. Дальше буква со шляпочкой будет обозначать образ при отображении φ_K. Имеем

$$\hat{\lambda}|_{G*(K_1\times K_2)} : \begin{cases} x_1 \mapsto (x_2^{-v_0^{-1}} x_1 x_2^{u_1})^{u_2^{-1}v_2^{-1}}, \\ x_2 \mapsto x_2^{v_0^{-1}v_1}, \\ x_3 \mapsto x_3; \end{cases}$$

$$\hat{\lambda}^{-1}|_{G*(K_1\times K_2)} : \begin{cases} x_1 \mapsto x_2^{v_1^{-1}} x_1^{v_2u_2} x_2^{-v_1^{-1}v_0u_1}, \\ x_2 \mapsto x_2^{v_1^{-1}v_0}, \\ x_3 \mapsto x_3; \end{cases}$$

$$\hat{\mu}|_{G*(K_1\times K_2)} : \begin{cases} x_1 \mapsto x_1, \\ x_2 \mapsto x_2^{v_0v_3^{-1}}, \\ x_3 \mapsto (x_2 x_3^{u_2} x_2^{-v_0u_3})^{v_2}; \end{cases}$$

$$\hat{\eta}|_{G*(K_1\times K_2)} : \begin{cases} x_1 \mapsto x_1^{v_2^{-1}v_0}, \\ x_2 \mapsto (x_1 x_2^{u_1} x_1^{-v_0u_2})^{v_1}, \\ x_3 \mapsto x_3; \end{cases}$$

$$\hat{\nu}|_{G*(K_1\times K_2)} : \begin{cases} x_1 \mapsto x_1, \\ x_2 \mapsto (x_3^{-v_0^{-1}} x_2 x_3^{u_2})^{v_3^{-1}u_3^{-1}}, \\ x_3 \mapsto x_3^{v_0^{-1}v_2}. \end{cases}$$

Достаточно показать, что $x_1^{[\hat{\lambda}^{-1}, \hat{\mu}^{-1}][\hat{\eta}^{-1}, \hat{\nu}^{-1}]} \neq x_1^{[\hat{\eta}^{-1}, \hat{\nu}^{-1}][\hat{\lambda}^{-1}, \hat{\mu}^{-1}]}$. Так как автоморфизм $[\hat{\eta}^{-1}, \hat{\nu}^{-1}]$ оставляет неподвижной переменную x_1, то последнее условие равносильно неравенству $y^{\hat{\eta}\hat{\nu}} \neq y^{\hat{\nu}\hat{\eta}}$, где $y = x_1^{[\hat{\lambda}^{-1}, \hat{\mu}^{-1}]u_2v_2}$.

Теперь найдём выражение для y. Имеем

$$x_1^{\hat{\lambda}\hat{\mu}\hat{\lambda}^{-1}\hat{\mu}^{-1}} = (x_2^{-v_1^{-1}} x_2^{v_0^{-1}v_1^{-1}v_3} x_1^{v_2u_2} x_2^{-v_1^{-1}v_3u_1} x_2^{u_1v_1^{-1}v_0})^{u_2^{-1}v_2^{-1}}$$

Обозначим $x_2^{v_1^{-1}}$ через z_2 и $x_1^{v_2v_0^{-1}}$ через z_1. Тогда

$$y = z_2^{-1} z_2^{v_0^{-1}v_3} x_1^{v_2u_2} z_2^{-v_3u_1} z_2^{u_1v_0}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$z_2^{\hat{\eta}\hat{\nu}\hat{\eta}^{-1}\hat{\nu}^{-1}} =$$

$$x_1^{v_2v_0^{-1}} (x_3^{-v_2^{-1}} (x_1^{-v_2v_0^{-1}} (x_3^{v_2^{-1}} x_2^{u_3v_3} x_3^{-u_2v_0v_2^{-1}})^{v_1^{-1}} x_1^{u_2v_2})^{u_1^{-1}} x_3^{u_2v_0v_2^{-1}})^{u_1v_3^{-1}u_3^{-1}} x_1^{-u_2v_2}$$

Пусть, напротив $y^{\hat{\eta}\hat{\nu}} = y^{\hat{\nu}\hat{\eta}}$. Ясно, что отображение $v_i \mapsto v_i, u_1 \mapsto v_3^{-1}, u_2 \mapsto v_0^{-1}, u_3 \mapsto v_0^{-1}, x_3 \mapsto 1, x_j \mapsto x_j$ при $j \neq 3$, можно продолжить до гомоморфизма ζ свободного произведения $G * (K_1 \times K_2)$ на свободное произведение $G^\zeta * (K_1^\zeta \times K_2^\zeta)$.

Применив гоморфизм ζ к равенству $y^{\hat{\eta}\hat{\nu}\hat{\eta}^{-1}\hat{\nu}^{-1}} = y$, получим

$$z_2^{-1} z_2^{v} z_1 z_2^{-1} z_2^{v^{-1}} = z_3^{-1} z_3^{v} z_1 z_3^{-1} z_3^{v^{-1}},$$

где $v = v_0^{-1}v_3$, $z_3 = z_2^{[v_0v_3^{-1},z_1^{-1}]}$. Обозначим элемент свободной группы гр(z_1, z_2, v), стоящий в левой части полученного равенства через a, а элемент стоящий в правой части — через b. Тогда несократимая запись для a начинается с z_2^{-1}, а для b — с z_1. Полученное противоречие показывает, что $y^{\hat\eta\hat\nu} \neq y^{\hat\nu\hat\eta}$ и $[\lambda^{-1}, \mu^{-1}][\eta^{-1}, \nu^{-1}] \neq [\eta^{-1}, \nu^{-1}][\lambda^{-1}, \mu^{-1}]$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно рассмотреть конкретный гомоморфизм $\vartheta : v_i^\vartheta = v_0, q_i^\vartheta = q_0$ при $i \neq 2$. Теперь достаточно проверить, что коммутатор $[[\lambda_{12}^{-1}, \lambda_{32}], [\lambda_{21}, \lambda_{23}^{-1}]]$ лежит в ядре представления группы VB_3. Образы при гомоморфизме $\varphi_{K,\vartheta}$ будем обозначать соответствующей буквой с волной. Формулы для $\tilde\lambda$ и $\tilde\mu$ примут вид:

$$\tilde\lambda|_{G*(K_1\times K_2^\vartheta)} : \begin{cases} x_1 \mapsto (x_2^{-v_0^{-1}} x_1 x_2^{u_1})^{u_2^{-1}v_0^{-1}}, \\ x_2 \mapsto x_2, \\ x_3 \mapsto x_3; \end{cases}$$

$$\tilde\mu|_{G*(K_1\times K_2^\vartheta)} : \begin{cases} x_1 \mapsto x_1, \\ x_2 \mapsto x_2, \\ x_3 \mapsto (x_2 x_3^{u_2} x_2^{-v_0u_3})^{v_0}. \end{cases}$$

Очевидно, что порождающие x_1, x_2, x_3 лежат в некоторой инвариантной относительно обоих автоморфизмов λ, μ группе неподвижных точек одного из них, инвариантным (относительно другого из них) образом дополняемой. Итак, $[\tilde\lambda^{-1}, \tilde\mu^{-1}]|_{G*(K_1\times K_2^\vartheta)} = 1$.

Так как действие автоморфизма λ_{21}^ϑ на $\hat G * (\hat K_1 \times \hat K_2^\vartheta)$ задаётся формулой

$$\lambda_{21}^\vartheta|_{\hat G*(\hat K_1\times\hat K_2^\vartheta)} : \begin{cases} y_1 \mapsto y_2^{q_1^{-1}} y_1^{q_2p_2} y_2^{-q_1^{-1}q_0p_1}, \\ y_2 \mapsto y_2, \\ y_3 \mapsto y_3, \end{cases}$$

а действие автоморфизма $(\lambda_{23}^\vartheta)^{-1}$ на $\hat G * (\hat K_1 \times \hat K_2^\vartheta)$ задаётся формулой

$$(\lambda_{23}^\vartheta)^{-1}|_{\hat G*(\hat K_1\times\hat K_2^\vartheta)} : \begin{cases} y_1 \mapsto y_1, \\ y_2 \mapsto y_2, \\ y_3 \mapsto (y_2^{-1} y_3^{q_2^{-1}} y_2^{q_0p_3})^{p_2^{-1}}, \end{cases}$$

то снова порождающие y_1, y_2, y_3 лежат в некоторой инвариантной относительно обоих автоморфизмов $\lambda_{21}^\vartheta, (\lambda_{23}^\vartheta)^{-1}$ группе неподвижных точек одного из них, инвариантным (относительно другого из них) образом дополняемой. Значит, $[\lambda_{21}^\vartheta, (\lambda_{23}^\vartheta)^{-1}]|_{\hat G*(\hat K_1\times\hat K_2^\vartheta)} = 1$.

Тогда, по доказанному, сужения автоморфизма $[[(\lambda_{12}^\vartheta)^{-1}, \lambda_{32}^\vartheta], [\lambda_{21}^\vartheta, (\lambda_{23}^\vartheta)^{-1}]]$ на свободные произведения $G * K$ и $\hat G * \hat K$ тривиальны, где $K = K_1 \times K_2^\vartheta$, $\hat K = \hat K_1 \times \hat K_2^\vartheta$. Значит, его можно продолжить до тождественного эндоморфизма на всю группу $G * \hat G * K * \hat K$. По свойству свободного произведения двух групп такое продолжение единственно. Поэтому $[[(\lambda_{12}^\vartheta)^{-1}, \lambda_{32}^\vartheta], [\lambda_{21}^\vartheta, (\lambda_{23}^\vartheta)^{-1}]] = 1$. $\square$

Замечание 3. Полагая в определении гомоморфизма φ_K дополнительно $v_i = v_0, q_i = q_0, i = 1, \dots, n$, мы получим ещё одно представление ψ группы VB_n, сужение которого на VP_n не является точным по теореме 2. Поэтому ψ — пример такого неточного представления группы VB_n, что все соотношения группы $(VB_n)^\psi$ обладают сильной симметрией.

References

[1] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, Eur. J. Comb., **20**:7 (1999), 663—690. Zbl 0938.57006

[2] S. Kamada, *Invariants of virtual braids and a remark on left stabilisations and virtual exchange moves*, Kobe J. Math, **21** (2004):1–2, 33—49. Zbl 1090.57008

[3] V. O. Manturov, *Knot theory*, Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2004. Zbl 1052.57001

[4] V. G. Bardakov, *The virtual and universal braids*, Fund. Math., **181** (2004), 1—18. Zbl 1078.20036

[5] D. Silver, S. G. Williams, *Alexander groups and virtual links*, J. Knot Theory Ramifications, **10**:1 (2001), 151—160. Zbl 0997.57019

[6] D. Silver, S. G. Williams, *Alexander groups of long virtual knots*, J. Knot Theory Ramifications, **15**:1 (2006), 43—52. Zbl 1088.57011

[7] H. U. Boden, E. Dies, A. I. Gaudreau, A. Gerlings, E. Harper, A. J. Nicas, *Alexander invariants for virtual knots*, J. Knot Theory Ramifications, **24**:3 (2015), 1550009. Zbl 1364.57005

[8] A. Markoff, *Foundations of the algebraic theory of tresses*, Travaux Inst. Math. Stekloff Acad. Sci. USSR, **16** (1945), 3—53. Zbl 0061.02507

[9] J. S. Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, Princeton: Princeton Univ. Press, NJ, 1974.

[10] V. V. Vershinin, *On homology of virtual braids and Burau representation*, J. Knot Theory Ramifications, **10**:5 (2001), 795—812. Zbl 0997.57020

[11] V. G. Bardakov, P. Bellingeri, *Groups of virtual and welded links*, J. Knot Theory Ramifications, **23**:3 (2014), 1450014. Zbl 1294.57004

[12] V. G. Bardakov, Yu. A. Mikhalchishina, M. V. Neshchadim, *Representations of virtual braids by automorphisms and virtual knot groups*, J. Knot Theory Ramifications, **26** (2017), 1750003. Zbl 1372.57010

[13] D. D. Long, M. Paton, *The Burau representation is not faithful for $n \geq 6$*, Topology, **32**:2 (1993), 439—447. Zbl 0810.57004

[14] V. G. Bardakov, *Virtual and welded links and their invariants*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **2** (2005), 196—199. Zbl 1100.57006

[15] H. Neiman, *Varietes of Groups*, Berlin–Heidelberg–New-York: Springer-Verlag, 1967.

[16] M. I. Kargapolov , Yu. I. Merzlyakov, *Foundations of the Group Theory*, Moskva: Nauka, 1977. Zbl 0499.20001

Korobov Alexei Alexandrovich
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk State University,
2, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: korobov@math.nsc.ru

Korobov Oleg Alexeevich
Novosibirsk State University,
2, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: vasa01011993@gmail.com