S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 876–885 (2019) УДК 517.929.21:57

DOI 10.33048/semi.2019.16.057 MSC 34K20+92B05

МАТРИЧНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Н.В. ПЕРЦЕВ

Abstract. The problem of stability of some systems of linear delay differential equations is considered. Sufficient conditions of asymptotic stability and instability of the trivial solution expressed in terms of matrices of a special kind are given. The results of the analysis of stability of equilibriums of nonlinear model of epidemic process are presented.

Keywords: Delay differential equations, asymptotic stability, instability, matrices of a special kind, nonsingular M-matrix, mathematical models of living systems, epidemic process spread.

1. Введение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dy(t)}{dt} = (A_0 - B)y(t) + \sum_{k=1}^{n} A_k y(t - \omega_k), \tag{1}$$

где $y(t) \in R^m$ — искомая вектор-функция, $B = \operatorname{diag}(b_{11}, \ldots, b_{mm})$ — диагональная матрица, $b_{jj} > 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $A_0, A_1, \ldots, A_n$ — $m \times m$ матрицы, запаздывания ω_k постоянны и таковы, что $0 < \omega_k < \infty$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Полагаем, что каждая из $A_1, \ldots, A_n$ отлична от нулевой матрицы и, кроме того, элементы матриц B, $A_0, A_1, \ldots, A_n$ могут зависеть от запаздываний $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

Системы вида (1) возникают, в частности, при исследовании устойчивости положений равновесия некоторых математических моделей живых систем.

Pertsev, N.V., Matrix stability and instability criteria for some systems of linear delay differential equations.

© 2019 Перцев Н.В.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-29-10086.

Поступила 4 марта 2019 г., опубликована 14 июня 2019 г.

Присутствие в системе (1) диагональной матрицы B, как правило, связано с учетом процессов естественной гибели, превращений или миграционных потоков элементов моделируемых живых систем. Примеры таких моделей приведены в работах [1], [2], [3], [4].

Определение 1. *Систему уравнений (1) будем называть асимптотически устойчивой, если ее тривиальное решение $y(t) \equiv 0$ является асимптотически устойчивыми по Ляпунову.*

Определение 2. *Систему уравнений (1) будем называть неустойчивой, если ее тривиальное решение $y(t) \equiv 0$ является неустойчивыми по Ляпунову.*

Используя метод Эйлера [5], [6], будем искать частные решения системы (1) в форме

$$y(t) = e^{\lambda t} c, \tag{2}$$

где λ — некоторое комплексное число, $c \in R^m$ — постоянный ненулевой вектор. Обозначим через I единичную $m \times m$ матрицу. Подставляя (2) в систему (1), приходим к характеристическому уравнению для нахождения λ:

$$P(\lambda) = \det\big(\lambda I + B - A_0 - \sum_{k=1}^{n} A_k\, e^{-\lambda\omega_k}\big) = 0. \tag{3}$$

Функция $P(\lambda)$, заданная формулой (3), называется характеристическим квазиполиномом, и является целой аналитической функцией комплексной переменной λ. Пусть все корни λ уравнения (3) удовлетворяют неравенству

$$Re(\lambda) < 0. \tag{4}$$

Известно, [5], [6], что неравенство (4) является необходимым и достаточным условием для асимптотической устойчивости тривиального решения $y(t) \equiv 0$ системы (1); если существует λ_0 такой, что

$$Re(\lambda_0) > 0, \tag{5}$$

то тривиальное решение $y(t) \equiv 0$ системы (1) неустойчиво.

Нахождение корней уравнения (3) и проверка неравенств (4), (5) представляет собой достаточно трудную задачу в случае высокой размерности системы (1) или при наличии нескольких различных запаздываний ω_k. Один из подходов к решению этой задачи опирается на использование структуры уравнений системы (1) и критерии, связанные с матрицами специального вида.

В следующих двух разделах приводятся критерии асимптотической устойчивости и неустойчивости системы (1), выраженные в терминах матриц специального вида, построенных по матрицам $B, A_0, A_1, \ldots, A_n$ этой системы. Полученные результаты иллюстрируются в последнем разделе, где представлено исследование устойчивости положений равновесия математической модели эпидемического процесса.

2. Вспомогательные результаты

Пусть $u \in R^m$. Примем, что неравенство $u > 0$ равносильно тому, что все компоненты вектора u положительны.

Обозначим через $S = (s_{ij})$ вещественную $m \times m$ матрицу. Матрицу S назовем неотрицательной, если все ее элементы s_{ij} неотрицательны. Матрицу S

с элементами $s_{ij} \leqslant 0$ для всех $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, назовем невырожденной М-матрицей, если она невырождена и матрица S^{-1} неотрицательна [7], [8].

Пусть S такова, что $s_{ij} \leqslant 0$ для всех $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Тогда следующие утверждения эквивалентны [7], [8]:

P1 — S является невырожденной М-матрицей;

P2 — все собственные числа S имеют положительные вещественные части;

P3 — все угловые миноры S положительны;

P4 — существует $\xi \in R^m$, $\xi > 0$, такой, что $S\xi > 0$.

Утверждения **P2**–**P4** включают часть утверждений относительно изучаемой матрицы S (полный список эквивалентных утверждений приведен в [7]).

Рассмотрим более подробно утверждение **P4**. Обратимся к неравенствам

$$\xi \in R^m, \quad \xi > 0, \quad S\xi > 0, \tag{6}$$

предполагая, что внедиагональные элементы матрицы S неположительны.

Пусть в (6) S является невырожденной М-матрицей. В [9] показано, что любое решение неравенств (6) можно представить в виде

$$\xi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, \xi^{(k)}, \tag{7}$$

где $\alpha_k > 0$ — произвольные вещественные константы,

$$\xi^{(k)} = S^{-1} e^{(k)} \in R^m, \ 1 \leqslant k \leqslant m, \tag{8}$$

$$e^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0)^T, \, e^{(2)} = (0, 1, \ldots, 0)^T, \, \ldots, \, e^{(m)} = (0, 0, \ldots, 1)^T.$$

Из (7), (8) следует, что $\xi = S^{-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^T$, столбцы матрицы S^{-1} составлены из векторов $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)}$, причем каждый вектор $\xi^{(k)}$ отличен от нулевого и имеет неотрицательные компоненты, $1 \leqslant k \leqslant m$. Отсюда вытекает следующее утверждение:

P5 — если внедиагональные элементы некоторой невырожденной матрицы S неположительны, а уравнения

$$S\xi^{(k)} = e^{(k)}, \ 1 \leqslant k \leqslant m, \tag{9}$$

имеют решения, при которых хотя бы один из векторов $\xi^{(k)}$ содержит отрицательные компоненты, то S не является невырожденной М-матрицей.

Для матриц S небольшой размерности и для некоторых разреженных матриц S каждое из утверждений **P2**, **P3**, **P4**, **P5** может быть проверено аналитически. В более сложных случаях требуется привлечение численных методов линейной алгебры [8] и соответствующих пакетов программ для ЭВМ.

Приведем два простых примера. Рассмотрим матрицу

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.2 \\ -0.1 & 1 & -0.1 \\ 0 & -0.4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из **P3** следует, что S_1 — невырожденная М-матрица, поскольку первый, второй и третий угловой миноры $M_1 = 1$, $M_2 = 1$, $M_3 = \det S_1 = 0.952$ положительны. Нетрудно проверить, что уравнения (9) имеют решения $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, $\xi^{(3)}$, все компоненты которых положительны. Обратимся к матрице

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что угловые миноры таковы, что $M_1 = 1 > 0$, $M_2 = 1 > 0$, но $M_3 = \det S_2 = -0.5 < 0$. Кроме того, из уравнений (9), находим, что $\xi^{(1)} = (-1, -4, -2)^T$. В силу **P3** или **P5** S_2 не является невырожденной M-матрицей.

Пусть элементы s_{ij} матрицы S имеют произвольные знаки. Положим

$$||S||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^{m} |s_{ij}|.$$

3. Основные результаты

3.1. Зафиксируем $0 \leqslant k \leqslant n$. Обозначим через $a_{ij}^{(k)}$ элементы матрицы A_k, входящей в (1). Примем, что A_k^+ — матрица, составленная из модулей элементов матрицы A_k, т.е. $A_k^+ = (|a_{ij}^{(k)}|)$.

Теорема 1. *Предположим, что матрицы, входящие в систему (1), таковы, что $B - \sum_{k=0}^{n} A_k$ или $B - \sum_{k=0}^{n} A_k^+$ является невырожденной M-матрицей. Тогда система (1) асимптотически устойчива.*

Следствие 1. *Пусть элементы матриц B, $A_0, A_1, \ldots, A_n$ не зависят от запаздываний ω_k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда теорема 1 верна для любых $\omega_1, \ldots, \omega_n$, т.е. имеет место абсолютная устойчивость системы (1)* [5].

Справедливость теоремы 1 и следствия 1 вытекает из результатов работ [10], [11], [12], [13] и свойств матриц специального вида [7], [8]. Отметим, что при выполнении условий теоремы 1 нет необходимости исследования корней характеристического уравнения (3), поскольку неравенство (4) автоматически выполняется для каждого корня уравнения (3).

Предположим, что в системе (1) матрицы $A_0, A_1, \ldots, A_n$ заменены на матрицы $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n$, а запаздывания $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — на положительные и ограниченные сверху запаздывания $\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_n$. Возникающую систему

$$\frac{dy(t)}{dt} = (\tilde{A}_0 - B)y(t) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{A}_k y(t - \tilde{\omega}_k) \tag{10}$$

будем называть «возмущенной».

Теорема 2. *Пусть матрицы, входящие в систему (1), удовлетворяют условию: $B - \sum_{k=0}^{n} A_k^+$ является невырожденной M-матрицей. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что при выполнении неравенства*

$$||\sum_{k=0}^{n} \big(\tilde{A}_k^+ - A_k^+\big)||_\infty < \delta. \tag{11}$$

«возмущенная» система (10) является асимптотически устойчивой.

Доказательство. Пусть $B - \sum_{k=0}^{n} A_k^+$ — невырожденная M-матрица. Тогда существует $\xi \in R^m$, $\xi > 0$, такой, что $\xi_1 = (B - \sum_{k=0}^{n} A_k^+)\,\xi > 0$. Имеем, что

$$(B - \sum_{k=0}^{n} \tilde{A}_k^+)\,\xi = \xi_1 + \sum_{k=0}^{n} \big(A_k^+ - \tilde{A}_k^+\big)\,\xi.$$

Поскольку $\xi_1 > 0$, то найдется такое (достаточно малое) $\delta > 0$, что из (11) будет следовать неравенство

$$\xi_1 + \sum_{k=0}^{n} \big(A_k^+ - \tilde{A}_k^+\big)\, \xi > 0. \tag{12}$$

Тогда $(B - \sum_{k=0}^{n} \tilde{A}_k^+)\, \xi > 0$ и $B - \sum_{k=0}^{n} \tilde{A}_k^+$ — невырожденная М-матрица. Используя теорему 1, получаем, что система (10) асимптотически устойчива. □

Отметим, что для нахождения допустимых границ изменения «возмущенных» матриц $\tilde{A}_k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, вместо неравенства (11) можно использовать покомпонентные оценки в неравенстве (12), совместив их с поиском вектора $\xi \in R^m$ для матрицы $B - \sum_{k=0}^{n} A_k^+$ по формулам (7), (8).

3.2. Перейдем к достаточным условиям существования корней характеристического уравнения (3), удовлетворяющих неравенству (5).

Теорема 3. *Пусть матрицы, входящие в систему (1), таковы, что*

$$\det\big(B - \sum_{k=0}^{n} A_k\big) < 0. \tag{13}$$

Тогда характеристическое уравнение (3) имеет вещественный корень $\lambda > 0$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (3), для которого будем изучать вещественные корни $\lambda = r$, $r \in R$. Из (3) находим, что

$$P(r) = \det\big(rI + B - A_0 - \sum_{k=1}^{n} A_k\, e^{-r\omega_k}\big), \quad P(0) = \det\big(B - \sum_{k=0}^{n} A_k\big).$$

Из (13) следует, что $P(0) < 0$. Для достаточно больших $r > 0$ справедливо неравенство $P(r) \geq r^m + const > 0$. Учитывая непрерывность $P(r)$, получаем, что уравнение $P(r) = 0$ имеет корень $r_0 > 0$. Следовательно, $\lambda_0 = r_0 > 0$ является вещественным корнем уравнения (3). □

Теорема 4. *Пусть для системы (1) выполнены следующие условия: 1) элементы матриц B, A_0, $A_1, \ldots, A_n$ не зависят от запаздываний ω_k, $1 \leqslant k \leqslant n$; 2) для каждого $1 \leqslant k \leqslant n$ ненулевые элементы матрицы A_k имеют одинаковые знаки; 3) верно неравенство*

$$\det\big(B - A_0\big) \cdot \det\big(B - A_0 - \sum_{k=1}^{n} A_k^+\big) < 0. \tag{14}$$

Тогда существуют $\omega_1, \ldots, \omega_n$, при которых характеристическое уравнение (3) имеет корень λ, такой, что $Re(\lambda) > 0$.

Доказательство. Используем подход, предложенный в [2] для системы уравнений, близкой по структуре к системе (1), но отличающейся от (1) выражениями для матриц при запаздывающих переменных.

Зафиксируем $1 \leqslant k \leqslant n$. Введем набор вещественных чисел $\{\eta_k\}$, заданных следующими соотношениями: $\eta_k = 1$, если ненулевые элементы матрицы A_k положительны, и $\eta_k = 1/2$, если ненулевые элементы матрицы A_k отрицательны.

Пусть ε — вещественный параметр. Определим функцию $Q_\varepsilon(z)$ комплексной переменной z по формуле

$$Q_\varepsilon(z) = \det\big(z\varepsilon I + B - A_0 - \sum_{k=1}^{n} A_k\, e^{-z\eta_k}\big). \tag{15}$$

Положим $z = \gamma = r + 2\pi\mathfrak{i}$, где r — вещественное число, $\mathfrak{i}$ — мнимая единица. Из (15) получаем, что

$$Q_0(\gamma) = \widehat{Q}(r) = \det\big(B - A_0 - \sum_{k=1}^{n} A_k^+\, e^{-r\eta_k}\big). \tag{16}$$

Используя (16), имеем, что

$$\widehat{Q}(r) \to \widehat{Q}(+\infty) = \det\big(B - A_0\big), \quad r \to +\infty,$$
$$\widehat{Q}(0) = \det\big(B - A_0 - \sum_{k=1}^{n} A_k^+\big).$$

Из (14) вытекает, что $\widehat{Q}(+\infty)$ и $\widehat{Q}(0)$ имеют разные знаки. Используя непрерывность $\widehat{Q}(r)$, устанавливаем, что существует $r_0 > 0$, такой, что $\widehat{Q}(r_0) = 0$. Следовательно, $z_0 = r_0 + 2\pi\mathfrak{i}$ — корень уравнения $Q_0(z) = 0$, т.е. $z = r_0 + 2\pi\mathfrak{i}$ является нулем функции $Q_0(z)$. Рассмотрим область $D : |z| < M$, $Re(z) > \delta$, где M, δ — фиксированные вещественные числа, такие, что $M > \max\{r_0, 2\pi\}$, $0 < \delta < r_0$. Обратимся к функции $Q_\varepsilon(z)$. Заметим, что для всех $z \in D$ элементы матрицы $z\varepsilon I$, входящей в (15), можно сделать сколь угодно близкими к нулю, учитывая сомножитель ε. Опираясь на (15), запишем, что $Q_\varepsilon(z) = Q_0(z) + \varphi_\varepsilon(z)$, где функция $\varphi_\varepsilon(z)$ достаточно мала в области D за счет выбора малого ε. Применяя теорему Руше [14], получаем, что функция $Q_\varepsilon(z)$ при некотором (малом) $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ имеет нуль $z_0(\varepsilon_0)$ в окрестности z_0 — нуля функции $Q_0(z)$. Полагая, что $\lambda_0 = z_0(\varepsilon_0)\varepsilon_0$ и выбирая $\omega_k = \eta_k/\varepsilon_0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, устанавливаем, что λ_0 удовлетворяет (3) и (5). Теорема доказана. □

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы 3 или теоремы 4 система (1) является неустойчивой. Если в условиях теоремы 3 неравенство (13) выполняется независимо от запаздываний ω_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, то система (1) является неустойчивой для любых $\omega_1, \ldots, \omega_n$.*

4. Исследование устойчивости положений равновесия модели эпидемического процесса

Рассмотрим математическую модель, описывающую распространение инфекции среди населения некоторого региона:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = r_S - \mu_1 x_1(t) - \beta x_1(t) x_3(t), \tag{17}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = q_1\beta x_1(t-\omega_1)x_3(t-\omega_1) - (\mu_2+\gamma)x_2(t) + q_3\eta x_3(t-\omega_2), \tag{18}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = q_2\beta x_1(t-\omega_1)x_3(t-\omega_1) + \gamma x_2(t) - (\mu_3+\eta)x_3(t), \ t \geqslant 0, \tag{19}$$

$$x_2(0) = x_2^{(0)},\ x_1(t) = x_1^{(0)}(t),\ x_3(t) = x_3^{(0)}(t), \quad t \in I_\omega = [-\max\{\omega_1,\omega_2\}; 0]. \tag{20}$$

Переменные модели (17)–(20) имеют следующий смысл:
$x_1(t)$ — численность восприимчивых к инфекции индивидуумов,
$x_2(t)$ — численность латентно-инфицированных (не заразных) индивидуумов,
$x_3(t)$ — численность больных (заразных) индивидуумов.

Все параметры, входящие в уравнения (17)–(19), положительны, функции $x_1^{(0)}(t)$, $x_3^{(0)}(t)$, используемые в (20), неотрицательны и непрерывны, $x_2^{(0)} \geqslant 0$.

Параметр r_S означает постоянную скорость пополнения группы восприимчивых индивидуумов. Параметры μ_1, μ_2, μ_3 задают интенсивности смертности индивидуумов, а также интенсивности их миграционных оттоков в другие регионы. Параметр β отражает интенсивность контактов восприимчивых и больных индивидуумов. Параметры $0 < q_1$, $q_2 < 1$ учитывают доли восприимчивых индивидуумов, которые после инфицирования перешли в латентную или активную стадию заболевания. Продолжительность такого перехода (от момента инфицирования) описывается параметром ω_1. Принято, что $q_1 + q_2 < 1$ (с учетом смертности и миграции индивидуумов).

Параметр γ означает интенсивность спонтанного развития заболевания для латентно-инфицированных индивидуумов. Параметр η задает интенсивность перехода больных индивидуумов в неинфекционную стадию заболевания вследствие изоляции, самолечения или лечения, получаемого в медицинских учреждениях. Продолжительность пребывания в этой стадии описывается параметром ω_2. После пребывания в неинфекционной стадии заболевания доля $0 < q_3 < 1$ ранее поступивших индивидуумов пополняет группу латентно-инфицированных индивидуумов.

Уравнения (17)–(19) с начальными данными (20) можно рассматривать как один из вариантов модели распространения туберкулеза среди населения изолированного региона [15], [16].

Используя метод шагов [5], нетрудно показать, что система (17)–(19) с начальными данными (20) имеет на промежутке $[0;\infty)$ единственное решение, и это решение неотрицательно (по-компонентно).

Система (17)–(19) имеет тривиальное положение равновесия

$$x^* = \big(x_1^*, x_2^*, x_3^*\big) = \Big(\frac{r_S}{\mu_1}, 0, 0\Big).$$

Положение равновесия x^* представляет собой решение модели, соответствующее отсутствию инфекции среди населения региона.

Обозначим:

$$R_0 = R_{0,1} + R_{0,2},$$

где

$$R_{0,1} = \frac{q_3\,\gamma\,\eta}{(\mu_2+\gamma)(\mu_3+\eta)}, \quad R_{0,2} = \frac{\beta(\mu_2 q_2 + \gamma(q_1+q_2))}{(\mu_2+\gamma)(\mu_3+\eta)}\, x_1^*. \tag{21}$$

Нетрудно заметить, что при $R_0 \leqslant 1$ система (17)–(19) не имеет других положений равновесия с неотрицательными компонентами, кроме x^*. Если $R_0 > 1$, то у системы (17)–(19) имеется ровно одно нетривиальное положение равновесия $\bar{x} = \big(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\big)$ с положительными компонентами.

Положение равновесия $\bar{x}$ интерпретируется как решение модели, соответствующее постоянному присутствию инфекции среди населения региона.

Исследуем устойчивость положения равновесия x^*, используя систему дифференциальных уравнений линейного приближения в окрестности x^*. В линеаризованной системе сохраним исходные обозначения переменных. Отброшенные нелинейные члены представляют собой произведения переменных, включая переменные с запаздыванием. Вектор отброшенных при линеаризации членов удовлетворяет необходимому условию малости [5]. Система уравнений линейного приближения имеет вид

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\mu_1 x_1(t) - \beta x_1^* x_3(t), \tag{22}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -(\mu_2 + \gamma)x_2(t) + q_1\beta x_1^* x_3(t-\omega_1) + q_3\eta x_3(t-\omega_2), \tag{23}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -(\mu_3 + \eta)x_3(t) + \gamma x_2(t) + q_2\beta x_1^* x_3(t-\omega_1). \tag{24}$$

Заметим, что в (22) параметр $\mu_1 > 0$, а переменная $x_1(t)$ не входит в уравнения (23), (24). Отсюда следует, что для изучения асимптотической устойчивости (неустойчивости) тривиального решения системы (22)–(24) достаточно перейти к решению аналогичной задачи для системы (23), (24).

Для системы (23), (24) применимы теоремы 1 и 3, в которых следует положить, что

$$B = \begin{pmatrix} \mu_2+\gamma & 0 \\ 0 & \mu_3+\eta \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & q_1\beta x_1^* \\ 0 & q_2\beta x_1^* \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & q_3\eta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрицы A_0, A_1, A_2 неотрицательны. Опуская промежуточные выкладки, получаем, что x^* асимптотически устойчиво, если $R_0 < 1$, и не устойчиво, если $R_0 > 1$.

Пусть далее $R_0 > 1$. Обозначим $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ и исследуем на устойчивость положение равновесия $\bar{x}$. Система уравнений линейного приближения в окрестности $\bar{x}$ (в исходных обозначениях переменных) имеет следующий вид:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A_0 - B)x(t) + A_1 x(t-\omega_1) + A_2 x(t-\omega_2), \tag{25}$$

$$B = \begin{pmatrix} \mu_1+\beta\bar{x}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2+\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3+\eta \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta\bar{x}_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q_1\beta\bar{x}_3 & 0 & q_1\beta\bar{x}_1 \\ q_2\beta\bar{x}_3 & 0 & q_2\beta\bar{x}_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3\eta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор отброшенных при линеаризации членов удовлетворяет необходимому условию малости [5].

Для системы (25) применима теорема 1 с учетом того, что один из элементов матрицы A_0 отрицателен. Положим $R_1 = R_{0,1} + R_{1,1}$, где константа $R_{0,1}$ задана формулой (21), а константа $R_{1,1}$ имеет вид

$$R_{1,1} = \Big(\frac{\beta(\mu_2 q_2 + \gamma(q_1+q_2))}{(\mu_2+\gamma)(\mu_3+\eta)} + \frac{(R_0-1)}{x_1^*}\Big)\bar{x}_1. \tag{26}$$

Используя теорему 1 и проводя необходимые выкладки, получаем, что для асимптотической устойчивости нетривиального положения равновесия $\bar{x}$ достаточно выполнения неравенства $R_1 < 1$.

Отметим, что асимптотическая устойчивость x^* может быть обусловлена определенной «малостью» компоненты x_1^*, которая задает численность восприимчивых к инфекции индивидуумов. Значение x_1^* выражается через параметры модели r_S и μ_1, которые не входят в выражение для R_0. Из очевидного неравенства $R_{0,1} < 1$, вытекающего из (21), и формулы для R_0 следует, что неравенство $R_0 < 1$ будет верным, если x_1^* достаточно мало. Этот вывод не переносится на положение равновесия $\bar{x}$. Как следует из (21) и (26), неравенство $R_1 < 1$ формально может быть выполнено для «малых» $\bar{x}_1$. Однако, выражение для $\bar{x}_1$ содержит параметры модели, которые входят в R_1. Поэтому «малость» $\bar{x}_1$ не гарантирует выполнения неравенства $R_1 < 1$.

Вернемся к системе (25). Заметим, что $\det\big(B - A_0\big) > 0$, а ненулевые элементы матриц A_1, A_2 положительны. Для анализа условий неустойчивости $\bar{x}$ применимы теоремы 3 и 4. Используя теорему 3, обратимся к неравенству

$$\det\big(B - A_0 - A_1 - A_2\big) < 0. \tag{27}$$

Неравенство (27) достаточно для неустойчивости $\bar{x}$ при любых запаздываниях. Полагая, что $R_0 > 1$, $R_1 > 1$ и преобразуя определитель матрицы, используемой в (27), введем константу

$$R_2 = \frac{(R_1 - 1)\, x_1^*}{2\,(R_0 - 1)\,\bar{x}_1}.$$

Проверка выполнения неравенства (27) приводит к следующему результату: если $R_2 > 1$, то положение равновесия $\bar{x}$ неустойчиво. Случай $R_2 < 1$ требует привлечения дополнительных критериев анализа устойчивости или неустойчивости $\bar{x}$.

В завершение отметим, что представленные в работе результаты не решают полностью проблему исследования устойчивости тривиального решения системы уравнений (1). Актуальной остается задача непосредственного анализа корней характеристического уравнения (3) при нескольких запаздываниях (см., например, подходы, разработанные в [17], [18]). Кроме того, для нахождения условий асимптотической устойчивости тривиального решения можно использовать функционалы Ляпунова-Красовского, учитывающие структуру системы уравнений (1). Некоторые подходы к построению таких функционалов приведены в [19], [20], [21]. В частности, присутствие в (1) диагональной матрицы B или предположение о том, что матрица $A_0 - B$ является устойчивой (все ее собственные числа имеют отрицательную действительную часть) может существенно повлиять на конструкцию функционалов Ляпунова-Красовского.

References

[1] Z. Lu, W. Wang, *Global stability for two–species Lotka–Volterra systems with delay*, J. Math. Anal. Appl., **208**:1 (1997), 277–280. Zbl 0874.34060

[2] J. Hofbauer, J. W. H. So, *Diagonal dominance and harmless off–diagonal delays*, Proc. of AMS, **128**:9 (2000), 2675–2682. Zbl 0952.34058

[3] M. Pitchaimani, C. Monica, *Global stability analysis of HIV-1 infection model with three time delays*, J. Appl. Math. Comput., **48**:1–2 (2015), 293–319. Zbl 1362.93134

[4] N. V. Pertsev, B. Yu. Pichugin, A. N. Pichugina, *Application of M-Matrices in Studies of Mathematical Models of Living Systems*, Mathematical Biology and Bioinformatics, **13**:Suppl. (2018), t104–t131.

[5] L. E. El'sgol'ts, S. B. Norkin, *Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*, New York–London: Academic Press, 1973. Zbl 0287.34073

[6] V. B. Kolmanovskiy, V. R. Nosov, *Stability and periodic modes of a controlled systems with aftereffect*, Moscow: Nauka, 1981. Zbl 0457.93002

[7] A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, New York: Academic Press, 1979. Zbl 0484.15016

[8] V. V. Voevodin, Yu. A. Kuznetsov, *Matrices and Calculations*, Moskva: Nauka, 1984. Zbl 0537.65024

[9] N. V. Pertsev, *Two-sided estimates for solutions to the Cauchy problem for Wazewski linear differential systems with delay*, Siberian Math. J., **54**:6 (2013), 1088–1097. Zbl 1293.34097

[10] A. Yu. Obolenskiy, *On stability of solutions of Vazewski autonomous systems with delay*, Ukrainian Mathematical Journal, **35** (1983), 574–579.

[11] R. Volz, *Stability Conditions for Systems of Linear Nonautonomous Delay Differential Equations*, J. Math. Anal. Appl., **120**:2 (1986), 584–595. Zbl 0618.34066

[12] I. Gyori, N. V. Pertsev, *On the stability of Equilibrium States of Functional-Differential Equations of Retarded Type Possessing a Mixed Monotone Property*, Doklady Akademii Nauk SSSR, **297**:1 (1987), 23–25.

[13] I. Gyori, *Interaction between oscilations and global asymptotic stability in delay differential equations*, Differential and Integral Equations, **3**:1 (1990), 181–200. Zbl 0726.34054

[14] M. A. Lavrent'ev, B. V. Shabat, *Methods of the theory of functions of a complex variable, (4-th ed.)*, Moscow: Nauka, 1973. Zbl 0274.30001

[15] K. K. Avilov, A. A. Romanyukha, *Mathematical modelling of tuberculosis propagation and patient detection*, Automat. Remote Control, **68**:9 (2007), 1604–1617.

[16] N. V. Pertsev, *Discrete-continuous Model of Tuberculosis Spread and Control*, Siberian Journal of Industrial Mathematics, **17**:3 (2014), 86–97. Zbl 1340.34227

[17] V. V. Malygina, M. V. Mulyukov, *On Local Stability of a Population Dynamics Model with Three Development Stages*, Russ Math., **4** (2017), 35–42. Zbl 1371.92110

[18] T. Luzyanina, J. Sieber, K. Engelborghs, G. Samaey, D. Roose, *Numerical bifurcation analysis of mathematical models with time delays with the package DDE-BIFTOOL*, Mathematical Biology and Bioinformatics, **12**:2 (2017), 496–520.

[19] G. V. Demidenko, I. I. Matveeva, *Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms*, Siberian Math. J., **48**:5 (2007), 824–836. Zbl 1164.34529

[20] V. L. Kharitonov, *Lyapunov functionals and matrices*, Annual Reviews in Control, **34** (2010), 13–20.

[21] I. V. Medvedeva, A. P. Zhabko, *Synthesis of Razumikhin and Lyapunov–Krasovskii approaches to stability analysis of time-delay systems*, Automatica, **51** (2015), 372–377. Zbl 1309.93130

Nikolay Viktorovitch Pertsev
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk Division
13, Pevtsova str.,
Omsk, 644043, Russia
E-mail address: homlab@ya.ru