S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 893–901 (2019) УДК 517.925
DOI 10.33048/semi.2019.16.059 MSC 34A09

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А.Я. ЯНЧЕНКО, В.А. ПОДКОПАЕВА

Abstract. The paper deals with first-order algebraic differential equations. Installed effective necessary conditions under which such equations have one of the solutions of an entire function finite order. It is also proved that in this case every solution of such an equation is a solution of some linear homogeneous differential equation of a special type.

Keywords: algebraic differential equation, entire function, linear homogeneous differential equation.

1. Исторический обзор. Формулировка результатов

Исследование решений алгебраических дифференциальных уравнений является традиционной задачей качественной теории дифференциальных уравнений. При этом исследование таких уравнений в общем случае наталкивается на значительные трудности. К настоящему времени в определенном смысле хорошо описаны решения только линейных уравнений. Что касается нелинейных алгебраических уравнений (даже первого порядка), то здесь результатов общего характера очень мало. (Одним из немногих является теорема Эрмита ([1], гл. 2, § 8), где описаны решения уравнения $P(y, y') = 0$ для многочленов P специального вида.) Поэтому возникло направление, в котором изучаются решения алгебраических дифференциальных уравнений с дополнительным условием принадлежности их к какому-либо наперед заданному достаточно узкому классу функций (например, многочленов, либо целых функций с конечным числом нулей). Более подробно с этими результатами можно ознакомиться по монографии В.Н. Горбузова ([2]).

Yanchenko, A.Ya., Podkopaeva, V.A., On some properties of first order algebraic differential equations.

Поступила 15 февраля 2019 г., опубликована 25 июня 2019 г.

В рамках этой тематики в последние годы авторами данной работы разработана техника, основанная на теории целых функций одной переменной, позволяющая исследовать решения, являющиеся целыми функциями произвольного конечного порядка для достаточно обширного класса алгебраических дифференциальных уравнений ([3]). В данной работе эта техника применена к уравнениям вида $P(z,y,y')=0$ (где P — произвольный многочлен с комплексными коэффициентами).

В дальнейшем будем обозначать через $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ соответственно поля действительных и комплексных чисел; через $A[\omega_1,\ldots,\omega_n]$ и $A(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ соответственно кольцо многочленов и поле рациональных функций (от переменных $\omega_1,\ldots,\omega_n$) над полем A. Если $f(z):\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — целая функция, то положим (при $R>0$) $M_f(R)=\max\limits_{|z|\le R}|f(z)|$; через $N_f(R)$ будем обозначать число нулей (с учетом их кратностей) функции $f(z)$ на круге $|z|\le R$.

Порядком целой функции называется число $\rho=\overline{\lim\limits_{R\to+\infty}}\dfrac{\ln\ln M_f(R)}{\ln R}$.

Пусть P, Q, R — ненулевые многочлены из $\mathbb{C}[z,\omega_1,\omega_2]$, причем (Q,R) — взаимно просты и $\deg_{\omega_2}R\ge 1$. Через $\frac{P}{Q}\bmod R$ будем обозначать множество рациональных функций $T\in\mathbb{C}(z,\omega_1,\omega_2)$, таких, что $T=A/B$ ($A,B\in\mathbb{C}[z,\omega_1,\omega_2]$ и A, B — взаимно просты) и $AQ-BP$ делится на R в кольце $\mathbb{C}[z,\omega_1,\omega_2]$.

Основным результатом статьи является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $B(z,\omega_1,\omega_2)$ — неприводимый многочлен из кольца $\mathbb{C}[z,\omega_1,\omega_2]$, $B=\sum\limits_{m=0}^{N}\sum\limits_{n=0}^{d}b_{mn}(z)\omega_1^m\omega_2^n$ и $\dfrac{\partial B}{\partial\omega_2}\not\equiv 0$;*

$$\triangle_B=\frac{\partial}{\partial z}+\omega_2\frac{\partial}{\partial\omega_1}-\frac{\frac{\partial B}{\partial z}+\frac{\partial B}{\partial\omega_1}\omega_2}{\frac{\partial B}{\partial\omega_2}}\cdot\frac{\partial}{\partial\omega_2}.$$

Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка, не являющаяся многочленом, и такая, что $B(z,f(z),f'(z))\equiv 0$ в $\mathbb{C}$. Тогда для любого набора различных натуральных чисел $i_1,\ldots,i_{d+1}$ найдутся многочлены $\{a_{i_k}(z),k=1,\ldots,d+1\}$ и многочлен $a_{i_0}(z)$ со следующими свойствами:

1) коэффициенты каждого из $a_{i_1}(z),\ldots,a_{i_{d+1}}(z)$ являются рациональными функциями с комплексными коэффициентами от коэффициентов многочленов $\{b_{mn}(z)\}$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{d+1}a_{i_k}(z)\triangle_B^{i_k}(\omega_1)-a_{i_0}(z)\omega_1\in 0\bmod(B)$;

3) функция $y=f(z)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\sum_{k=1}^{d+1}a_{i_k}(z)y^{(i_k)}-a_{i_0}(z)y=0;\tag{1.1}$$

4) если точка $(z_0,\omega_1^0,\omega_2^0)\in\mathbb{C}^3$ такова, что

$$B(z_0,\omega_1^0,\omega_2^0)=0,\quad\frac{\partial B}{\partial\omega_2}(z_0,\omega_1^0,\omega_2^0)\ne 0$$

и функция $y=\varphi(z)$ удовлетворяет уравнению $B(z,\varphi(z),\varphi'(z))\equiv 0$ в некотором непустом круге $K=\{|z-z_0|<\delta\}$, причем $\varphi(z_0)=\omega_1^0$, $\varphi'(z_0)=\omega_2^0$, то

$y = \varphi(z)$ также удовлетворяет уравнению (1.1) в круге $K_1 = \{|z - z_0| < \delta_1\}$ (при некотором $\delta_1 > 0$).

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *([3], § 2, лемма 2) Пусть $\delta \in (0;1)$; $R > 10^{1/\delta}$; B_R — конечное множество кружков с общей суммой радиусов менее $2R^{1-\delta}$, лежащих в кольце $C_R = \{2R \le |z| \le 3R\}$. Тогда найдется число $R_1 \in (2R;3R)$, такое, что окружность $\beta_{R_1} = \{z : |z| = R_1\}$ не пересекается с множеством B_R.*

Лемма 2. *([3], § 2, предложение 1) Пусть $h(z)$ — целая функция и $\overline{\lim\limits_{R\to+\infty}} \dfrac{\ln\ln M_h(R)}{\ln R} = \rho$, где $\rho \in [0;+\infty)$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $R_0 \equiv R_0(\varepsilon) > 0$, такое, что при всяком $R > R_0$ при любом $H > 0$ из кольца $C_R = \{2R \le |z| \le 3R\}$ можно выбросить конечное число кружков с общей суммой радиусов не более $2H$ так, что при всяком $z \in C_R$, но вне выброшенных кружков, справедлива оценка*

$$\left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right| \le \sigma\left(1 + R^{\rho+\varepsilon-1}\ln R + \frac{R^{\rho+\varepsilon}\ln R}{H}\right)$$

(где $\sigma > 0$ — постоянная, зависящая только от функции $h(z)$ и ε).

Следствие. *В условиях леммы 2 при всяком натуральном n для любого $\varepsilon > 0$ найдется $R_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при любых $R > R_1(\varepsilon)$ и любом $H > 0$ из кольца $C_R = \{2R \le |z| \le 3R\}$ можно выбросить конечное число кружков с общей суммой радиусов не более $2nH$ так, что при любом $z \in C_R$, но вне выброшенных кружков, при всех $k = 1, \dots, n$ справедлива оценка:*

$$\left|\frac{h^{(k)}(z)}{h(z)}\right| \le \sigma\left(1 + R^{\rho+\varepsilon-1}\ln R + \frac{R^{\rho+\varepsilon}\ln R}{H}\right)^n$$

(где σ зависит только от $h(z)$, n, ε).

Доказательство. Фиксируем произвольные $\varepsilon > 0$, $H > 0$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Так как при всех целых неотрицательных l $\overline{\lim\limits_{R\to+\infty}} \dfrac{\ln\ln M_{h^{(l)}}(R)}{\ln R} = \rho$ ([4], гл. 1), то, применив к функции $h^{(k-1)}(z)$ лемму 2, найдем, что существует $R_{0,k}(\varepsilon) > 0$, такое, что при всяком $R > R_{0,k}(\varepsilon)$ из кольца C_R можно выбросить конечное число кружков $B_{R,k}$ с общей суммой радиусов не более $2H$ так, что при всяком $z \in C_R \backslash B_{R,k}$ справедлива оценка

$$\frac{h^{(k-1)}(z)}{h^{(k)}(z)} \le \sigma_k\left(1 + R^{\rho+\varepsilon-1}\ln R + \frac{R^{\rho+\varepsilon}\ln R}{H}\right). \tag{2.1}$$

Пусть $R_1(\varepsilon) = \max\limits_k R_{0,k}(\varepsilon)$. Тогда при любом $R > R_1(\varepsilon)$ неравенство (2.1) выполняется при любом $k \in \{1, \dots, n\}$ и любом $z \in C_R \backslash (\prod\limits_{k=1}^n B_{R,k})$. Но тогда при тех же z, k

$$\left|\frac{h^{(k)}(z)}{h(z)}\right| = \left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{h^{(k)}(z)}{h^{(k-1)}(z)}\right| \le \sigma\left(1 + R^{\rho+\varepsilon-1}\ln R + \frac{R^{\rho+\varepsilon}}{H}\ln R\right)^k$$

(где $\sigma = \prod\limits_{k=1}^n \sigma_k$), что завершает доказательство следствия 1. $\square$

Лемма 3. *Пусть $P \in \mathbb{C}[z, \omega_1, \omega_2]$; P неприводим в этом кольце и* $\dfrac{\partial P}{\partial \omega_2}$ *— ненулевой многочлен. Пусть*

$$\triangle_P = \frac{\partial}{\partial z} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \frac{\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial \omega_1}\omega_2}{\frac{\partial P}{\partial \omega_2}} \frac{\partial}{\partial \omega_2}.$$

Тогда:

1) для любых $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}(z, \omega_1, \omega_2)$

$$\begin{aligned}
&\triangle_P(Q_1 + Q_2) = \triangle_P(Q_1) + \triangle_P(Q_2),\\
&\triangle_P(Q_1 Q_2) = Q_2 \triangle_P(Q_1) + Q_1 \triangle_P(Q_2),\\
&\triangle_P(Q_1/Q_2) = \tfrac{1}{Q_2^2}(Q_2 \triangle_P(Q_1) - Q_1 \triangle_P(Q_2)) \text{ при } Q_2 \not\equiv 0;
\end{aligned}$$

2) $\triangle_P(P) \equiv 0$, $\triangle_P(Q_1 P) = P \triangle_P(Q_1)$;

3) если $h(z)$ — голоморфная в некотором непустом круге K функция, удовлетворяющая в K уравнению $P(z, h(z), h'(z)) = 0$ и $\dfrac{\partial P}{\partial \omega_2}(z, h(z), h'(z)) \neq 0$ в K, то при любом натуральном m

$$h^{(m)}(z) = (\triangle_P^m(\omega_1))\big|_{(z,\omega_1,\omega_2)=(z,h(z),h'(z))}$$

(по определению $\triangle_P^0(\omega_1) \equiv \omega_1$).

Доказательство. Утверждения пп. 1), 2) — следствие соответствующих свойств производных. Утверждение п. 3) докажем по индукции.

При $m = 0$ $h(z) = \omega_1\big|_{(z,h(z),h'(z))} = \triangle_P^0(\omega_1)\big|_{(z,h(z),h'(z))} = h(z)$.

При $m = 1$ $h'(z) = \omega_2\big|_{(z,h(z),h'(z))} = \triangle_P(\omega_1)\big|_{(z,h(z),h'(z))}$.

Далее, дифференцируя равенство $P(z, h(z), h'(z)) = 0$, найдем:

$$h''(z) = \left(-\frac{\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial \omega_1}\omega_2}{\frac{\partial P}{\partial \omega_2}}\right)\Bigg|_{(z,h(z),h'(z))} = (\triangle_P^2(\omega_1))\big|_{(z,h(z),h'(z))}.$$

Предположим теперь, что утверждение верно при всех $m \leq N$ $(N \geq 1)$. Положим $T_N = \triangle_P^N(\omega_1)$. Тогда

$$h^{(N+1)}(z) = (h^{(N)}(z))' = (T_N(z, h(z), h'(z)))' =$$

$$= \left(\frac{\partial T_N}{\partial z} + \frac{\partial T_N}{\partial \omega_1}\omega_2 + \frac{\partial T_N}{\partial \omega_2} h''(z)\right)\Bigg|_{(z,h(z),h'(z))} =$$

$$= \left[\frac{\partial T_N}{\partial z} + \frac{\partial T_N}{\partial \omega_1}\omega_2 + \left(-\frac{\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial \omega_1}\omega_2}{\frac{\partial P}{\partial \omega_2}}\right)\frac{\partial T_N}{\partial \omega_2}\right]\Bigg|_{(z,h(z),h'(z))} =$$

$$= (\triangle_P(\triangle_P^N(\omega_1)))\big|_{(z,h(z),h'(z))} = \triangle_P^{N+1}(\omega_1)\big|_{(z,h(z),h'(z))}.$$

□

Следствие. *В условиях леммы 3 $h^{(m)}(z) = (\triangle_P^m(\omega_1) \bmod P)\big|_{(z,h(z),h'(z))}$ при всех m.*

Доказательство. Действительно, если $\triangle_P^m(\omega_1) = A/B$ и A, B взаимно просты, то B взаимно прост с P (так как B — делитель $\left(\dfrac{\partial P}{\partial \omega_2}\right)^N$ при некотором

N). Поэтому множество $\triangle_P^m(\omega_1) \bmod P$ определено. Но тогда, согласно определению этого множества, для любых $T_1, T_2 \in \triangle_P^m(\omega_1) \bmod P$ в силу равенства $P(z, h(z), h'(z)) = 0$ найдем, что $T_1(z, h(z), h'(z)) = T_2(z, h(z), h'(z))$ в круге K. □

Лемма 4. *Пусть m, d — натуральные, $m > d+1$. Пусть $P_1, \ldots, P_m$ — ненулевые многочлены из кольца $\mathbb{C}[z, \omega_1, \omega_2]$, причем $\deg_{\omega_2} P_i \le d$ при всех i. Тогда найдутся многочлены $Q_1, \ldots, Q_m \in \mathbb{C}[z, \omega_1]$, не все равные нулю и такие, что $\sum\limits_{i=1}^{m} Q_i P_i \equiv 0$. При этом коэффициенты многочленов $Q_1, \ldots, Q_m$ являются рациональными функциями от коэффициентов многочленов $P_1, \ldots, P_m$.*

Доказательство. Пусть натуральное N таково, что $\deg_z P_i, \deg_{\omega_1} P_i \le N$ при всех i. Пусть $K = 3(N+1)^2(d+1)$.

Подберем многочлены $Q_i \equiv \sum\limits_{k_1=0}^{K} \sum\limits_{k_2=0}^{K} C_{i,k_1,k_2} z^{k_1} \omega_1^{k_2}$ так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{m} Q_i P_i \equiv 0. \tag{4.1}$$

Равенство (4.1) можно рассмотреть как систему линейных уравнений относительно неизвестных $\{C_{i,k_1,k_2}\}$.

При этом уравнений будет не более $(K+N+1)^2(d+1)$, неизвестных — не менее $((K+1)^2 - 1)m$. Так как

$$((K+1)^2-1)m \ge ((K+1)^2-1)(d+2) \ge K^2(d+2) = K^2(d+1) + K^2 >$$

$$> K^2(d+1) + (2(N+1)K + (N+1)^2)(d+1) = (K+N+1)^2(d+1),$$

то данная линейная система имеет нетривиальное решение, причем $\{C_{i,k_1,k_2}\}$ могут быть выражены рационально через коэффициенты данной системы, что и завершает доказательство леммы 4. □

Следствие. *Пусть d — натуральное; $A_1 = \dfrac{P_1}{T_1}, \ldots, A_m = \dfrac{P_m}{T_m}$, где $P_i \in \mathbb{C}[z, \omega_1, \omega_2]$; $T_i \in \mathbb{C}[z, \omega_1]$, $T_i \not\equiv 0$; $\deg_{\omega_2} P_i \le d-1$ при всех i. Тогда при всяком натуральном $m \ge d+1$ найдутся многочлены $Q_1, \ldots, Q_m \in \mathbb{C}[z, \omega_1]$, не все равные нулю и такие, что $\sum\limits_{i=1}^{m} Q_i A_i \equiv 0$, причем коэффициенты многочленов Q_i рационально выражаются через коэффициенты многочленов $\{P_i, T_i\}$.*

Лемма 5. *Пусть $P, Q, R \in \mathbb{C}[z, \omega_1, \omega_2]$, причем: а) $\{P, Q\}$ взаимно просты; б) $\{Q, R\}$ взаимно просты; в) $\dfrac{\partial R}{\partial \omega_2} \not\equiv 0$. Тогда найдутся многочлены $P_1 \in \mathbb{C}[z, \omega_1, \omega_2]$, $Q_1 \in \mathbb{C}[z, \omega_1]$, такие, что:*

1) $\deg_{\omega_2} P_1 < \deg_{\omega_2} R$;

2) $\dfrac{P}{Q} \in \dfrac{P_1}{Q_1} \operatorname{mod}(R)$.

Доказательство. Если $\dfrac{\partial Q}{\partial \omega_2} \equiv 0$, то положим $Q_0 = Q$. Пусть $\dfrac{\partial Q}{\partial \omega_2} \not\equiv 0$. Тогда (исключаем ω_2, взяв результант Q, R — см., например, [5], гл. 5, § 35, § 36) найдутся многочлены T_1, T_2, такие, что $T_1Q + T_2R = Q_0$, где $Q_0 \in \mathbb{C}[z, \omega_1]$ — ненулевой многочлен. Поэтому

$$\frac{P}{Q} = \frac{T_1P}{T_1Q} \in \frac{T_1P}{T_1Q + T_2R} \operatorname{mod}(R) = \frac{T_1P}{Q_0} (\operatorname{mod} R). \tag{5.1}$$

Разделим многочлен T_1P на многочлен R в кольце $\mathbb{C}(z, \omega_1)[\omega_2]$ с остатком. Тогда $B_1 \cdot T_1P = B_2 + B_3R$, где $B_1 \in \mathbb{C}[z, \omega_1]$, $B_2, B_3 \in \mathbb{C}[z, \omega_1, \omega_2]$, $\deg_{\omega_2} B_2 < \deg R$. С учетом равенства (5.1) найдем:

$$\frac{P}{Q} \in \frac{B_1T_1P}{B_1Q_0} (\operatorname{mod} R) = \frac{B_2 + B_3R}{B_1Q_0} \equiv \frac{B_2}{B_1Q_0} (\operatorname{mod} R).$$

Положив $P_1 = B_2$, $Q_1 = B_1Q_0$, получим утверждение леммы 5. □

Лемма 6. *Пусть $T \in \mathbb{C}[\omega_1, \omega_2]$ — ненулевой многочлен и $\deg_{\omega_2} T \geq 1$. Пусть целая функция $f(z)$ удовлетворяет в $\mathbb{C}$ уравнению $T(z, f(z)) \equiv 0$. Тогда $f(z)$ — многочлен.*

Доказательство. Пусть

$$T(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i,j} C_{ij}\omega_1^i\omega_2^j = \sum_{j=0}^{d} a_j(\omega_1)\omega_2^j,$$

где $a_j(\omega_1) \in \mathbb{C}[\omega_1]$ при всех j и $a_d(\omega_1)$ — ненулевой многочлен. Пусть $f(z)$ — не постоянная. Имеем:

$$a_d(z)f^d(z) = -\sum_{j=0}^{d-1} a_j(z)f^j(z). \tag{6.1}$$

Пусть R — достаточно велико (так, чтобы корни многочлена $a_d(z)$ лежали внутри круга $|z| \leq R/2$ и $M_f(R) > 1$). Пусть $z_R \in \mathbb{C}$ таково, что $|z_R| = R$ и $M_f(R) = |f(z_R)|$. Тогда из (6.1) найдем:

$$|f(z_R)|^d = \left|\sum_{j=0}^{d-1} a_j(z_R)f^j(z_R)\right| \frac{1}{|a_d(z_R)|} \Rightarrow M_f(R)^d \leq (M_f(R))^{d-1} \cdot \gamma R^N$$

(при некоторых постоянных γ и N, не зависящих от R).

Отсюда $M_f(R) \leq \gamma R^N$ при всех достаточно больших R. Следовательно ([4], гл. 1) $f(z)$ — многочлен. Таким образом, лемма 6 доказана. □

3. Доказательство теоремы

Дифференцируя равенство $B(z, f(z), f'(z)) = 0$, найдем:

$$\frac{\partial B}{\partial z}(z, f(z), f'(z)) + \frac{\partial B}{\partial \omega_1}(z, f(z), f'(z))f'(z) + \frac{\partial B}{\partial \omega_2}(z, f(z), f'(z))f''(z) = 0.$$

Заметим, что $\dfrac{\partial B}{\partial \omega_2} \not\equiv 0$ (в противном случае, согласно лемме 6, $f(z)$ была бы многочленом).

Так как B неприводим в кольце $\mathbb{C}[z, \omega_1, \omega_2]$, то B и $\dfrac{\partial B}{\partial \omega_2}$ взаимно просты. Если бы $\dfrac{\partial B}{\partial \omega_2}(z, f(z), f'(z)) \equiv 0$, то, рассмотрев результант по переменной ω_2

$A = \mathrm{Res}_{\omega_2}\left(B; \dfrac{\partial B}{\partial \omega_2}\right)$ ([5], гл. 5, § 35, § 36), нашли бы, что A — ненулевой многочлен и $A(z, f(z)) \equiv 0$, откуда из леммы 6 следовало бы, что $f(z)$ — многочлен. Поэтому $\dfrac{\partial B}{\partial \omega_2}(z, f(z), f'(z)) \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}$. Тогда, применив следствие к лемме 3, найдем, что при всех натуральных m $f^{(m)}(z) = (\triangle_B^m(\omega_1) \bmod B)\big|_{(z,\omega_1,\omega_2)=(z,f(z),f'(z))}$. Применяя лемму 5, найдем: при любом натуральном n

$$\triangle_B^n(\omega_1) \in \frac{G_n}{F_n} \bmod B,$$

где $G_n \in \mathbb{C}[z, \omega_1, \omega_2]$, $F_n \in \mathbb{C}[z, \omega_1]$ и $\deg_{\omega_2} G_n \le d - 1$ ($d = \deg_{\omega_2} B$). При этом (так как $B(z, f(z), f'(z)) \equiv 0$)

$$f^{(n)} = \frac{G_n(z, f(z), f'(z))}{F_n(z, f(z))}, \tag{1}$$

Фиксируем произвольный набор различных натуральных чисел $i_1, \dots, i_{d+1}$. Применив следствие к лемме 4, получим: найдутся многочлены $Q_{i_1}, \dots, Q_{i_{d+1}} \in \mathbb{C}[z, \omega_1]$, не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{n=1}^{d+1} Q_{i_n} \frac{G_{i_n}}{F_{i_n}} \equiv 0. \tag{2}$$

Тогда (в силу (1))

$$\sum_{n=1}^{d+1} Q_{i_n}(z, f(z)) f^{(i_n)}(z) \equiv 0 \text{ в } \mathbb{C} \tag{3}$$

(причем коэффициенты всех Q_{i_j} — рациональные функции от коэффициентов $\{F_{i_n}; G_{i_n}\}$). Последнее равенство можно записать в виде:

$$f^H(L_0 + L_1 f + \dots + L_M f^M) \equiv 0 \tag{4}$$

(где $L_K = \sum\limits_{j=1}^{d+1} \alpha_{Kj}(z) f^{(i_j)}(z)$, $\alpha_{Kj}(z) \in \mathbb{C}[z]$ при всех K, j и не все многочлены среди $\{\alpha_{0j}(z)\}$ нулевые; H — целое неотрицательное).

Возможны два случая:

1) $L_0 \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}$;

2) $L_0 \equiv 0$ в $\mathbb{C}$.

Так как функция $f(z)$ — не постоянная, то в первом случае равенство (4) можно переписать в виде:

$$\frac{L_0}{f} = L_1 + \dots + L_M f^{M-1},$$

откуда следует, что L_0/f — целая функция.

Пусть $N = \max\{i_1, \dots, i_{d+1}\}$, $\varepsilon = 1$. Тогда по следствию к лемме 2 найдется R_0, такое, что при любом $R > R_0$ (для $H = R^{1/2}$) из кольца $C_R = \{2R \le |z| \le 3R\}$ можно выбросить D_R конечное число кружков с общей суммой радиусов не более $2NR^{1/2}$ так, что при всяком $z \in C_R \backslash D_R$ при всех $k = 1, 2 \dots, N$ справедливы оценки

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \le \gamma_1 R^{N(\rho + \frac{1}{2})} \ln^N R,$$

где постоянная γ_1 не зависит от R. Но тогда при тех же z для целой функции L_0/f справедлива оценка:

$$\left|\frac{L_0}{f}(z)\right| \le \gamma_2 R^{N(\rho+\frac{1}{2})+E} \ln^N R, \tag{5}$$

где $E = \max\limits_j \deg(a_{0j}(z))$, γ_2 — некоторая постоянная, не зависящая от R.

Применим теперь лемму 1. Тогда при каждом $R > R_0$ найдется окружность $\beta_{R_1} = \{|z| = R_1\}$, где $R_1 \in [2R; 3R]$, такая, что $\beta_{R_1} \in C_R \backslash D_R$. Но тогда (учитывая (3)) найдем:

$$\max_{|z|\le R} \left|\frac{L_0}{f}(z)\right| \le \max_{z\in\beta_{R_1}} \left|\frac{L_0}{f}(z)\right| \le \gamma_3 R^{N(\rho+\frac{1}{2})+E} \ln^N R.$$

Следовательно ([4], гл. 1) L_0/f является многочленом, т.е. существует многочлен $a_{i_0}(z)$ такой, что $L_0 - a_{i_0}(z)f \equiv 0$ в $\mathbb{C}$.

Во втором случае (когда $L_0 \equiv 0$ в $\mathbb{C}$) положим $a_{i_0}(z) \equiv 0$. В любом случае для $y = f(z)$ в $\mathbb{C}$ выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{d+1} a_{i_k}(z) y^{(i_k)} - a_{i_0}(z) y = 0 \tag{6}$$

(где не все $a_{i_k}(z)$ — ненулевые).

Таким образом, утверждения 1), 3) теоремы доказаны.

Докажем утверждение 2) теоремы.

Рассмотрим (учитывая (1)) рациональную функцию

$$H(z,\omega_1,\omega_2) = \sum_{k=1}^{d+1} a_{i_k} \frac{G_{i_k}(z,\omega_1,\omega_2)}{F_{i_k}(z,\omega_1)} - a_{i_0}(z)\omega_1$$

(согласно (6) $H(z, f(z), f'(z)) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$).

Пусть $H(z,\omega_1,\omega_2) = \dfrac{M(z,\omega_1,\omega_2)}{D(z,\omega_1)}$ (где M, D — взаимно простые многочлены). Тогда

$$M(z, f(z), f'(z)) \equiv 0, \quad \deg_{\omega_2} M < \deg B. \tag{7}$$

Предположим, что $M(z,\omega_1,\omega_2) \not\equiv 0$. Заметим, что $\dfrac{\partial M}{\partial \omega_2} \not\equiv 0$, так как в противном случае, из условия $M(z, f(z), f'(z) \equiv 0$, применив лемму 6, нашли бы, что $f(z)$ — многочлен, что противоречит условию теоремы. Отметим также, что (в силу (7) и неприводимости $B(z,\omega_1,\omega_2)$) многочлены B, M взаимно просты. Тогда, рассмотрев их результант по переменной ω_2, найдем, что для ненулевого многочлена $C(z,\omega_1) = \mathrm{Res}_{\omega_2}(B, M)$ справедливо равенство $C(z, f(z)) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$, откуда (лемма 6) $f(z)$ — многочлен, что противоречит условию теоремы.

Таким образом, $M(z,\omega_1,\omega_2) \equiv 0$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{d+1} a_{i_k}(z) \frac{G_{i_k}(z,\omega_1,\omega_2)}{F_{i_k}(z,\omega_1)} - a_{i_0}(z)\omega_1 \equiv 0,$$

что равносильно утверждению 2) теоремы.

Утверждение 4) теоремы следует теперь из леммы 3.

Таким образом, теорема полностью доказана.

4. Некоторые замечания

1. Условие неприводимости многочлена B в теореме носит технический характер, так как если целая функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению $B(z, f(z), f'(z)) = 0$, где B — приводим, то (в силу голоморфности $f(z)$) найдется неприводимый делитель B_1, такой, что $B_1(z, f(z), f'(z)) = 0$.

2. Условия (полученные в теореме), которым должен удовлетворять многочлен B (для того, чтобы одним из решений уравнения $B(z, y, y') = 0$ была бы целая функция), являются всего лишь необходимыми. Тем не менее, они дают достаточно много уравнений связи между коэффициентами многочлена B. Поэтому доля подобных многочленов среди всех многочленов кольца $\mathbb{C}[z, \omega_1, \omega_2]$ мала.

3. В случае конкретного многочлена

$$B(z, \omega_1, \omega_2) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{d} b_{mn}(z)\omega_1^m \omega_2^n$$

проверка выполнения условий, полученных в теореме (и, следовательно, проверка необходимых условий существования у уравнения $B(z, y, y') = 0$ целого трансцендентного решения), сводится к вычислению ранга над $\mathbb{C}(z)$ некоторой матрицы, порождаемой коэффициентами (из $\mathbb{C}(z)$) рациональных функций ω_1; $\triangle_B(\omega_1) \bmod B, \ldots, \triangle_B^{d+1}(\omega_1) \bmod B$, и может быть осуществлена за конечное число операций.

References

[1] V.V. Golubev, *Lectures on the differential differential theory*, Moscow: GITTL, 1953.

[2] V.N. Gorbuzov, *Integral solutions of algebraic differential equations*, Grodno: GrSU, 2006.

[3] A.Ya. Yanchenko, V.A. Podkopaeva, *On integral solutions — solutions of a class of algebraic differential equations*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 1284–1291 (in Russian). Zbl 1402.34089

[4] B.Ya. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Moscow: GITTL, 1956. Zbl 0111.07401

[5] B.L. Van der Waerden, *Algebra*, Moscow: Nauka, 1976. Zbl 0997.00501

Victoria Alexandrovna Podkopaeva
National Research University «MPEI»,
14, Krasnokazarmennaya str.,
Moskow, 111250, Russia
E-mail address: vapodk@yandex.ru

Alexander Yakovlevich Yanchenko
National Research University «MPEI»,
14, Krasnokazarmennaya str.,
Moskow, 111250, Russia
E-mail address: yanchenkoAY@mpei.ru