S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 916–937 (2019) УДК 514.1,517.912

DOI 10.33048/semi.2019.16.061 MSC 53D05,39B22

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЛОЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ПОДВИЖНОСТИ

В.А. КЫРОВ

Abstract. In this paper, we solve the problem of embedding two-dimensional geometries: simplicial, dual-gelmgoltz, Helmholtz proper and pseudohelmholtz, into three-dimensional geometries. This problem is solved by an analytical method. The functions defining these geometries are found. Basic operators of Lie algebras of groups of motions are calculated.

Keywords: geometry of maximum mobility, Lie transformation group, functional equation, differential equation, Lie algebra.

Введение

Хорошо известными примерами двумерных геометрий локальной максимальной подвижности являются: евклидова, псевдоевклидова, симплектическая, сферическая, Лобачевского. Например, метрическая функция плоскости Евклида записывается так:

$$g = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2.$$

Группы движений всех этих геометрий имеют размерность три. Другими примерами двумерных геометрий локальной максимальной подвижности являются геометрии, задаваемые функциями:

$$g = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}; \tag{1}$$

$$g = (x_i - x_j)^2 e^{\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}; \tag{2}$$

Kyrov, V.A., Analytic embedding of some two-dimensional geometries of maximal mobility.

Поступила 26 августа 2018 г., опубликована 28 июня 2019 г.

$$g = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] e^{2\gamma \operatorname{arctg} \dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}; \tag{3}$$

$$g = \frac{(y_i - y_j)^\beta}{x_i - x_j}, \tag{4}$$

где, например, (x_i, y_i) — координаты точки i, причем $\gamma, \beta = \mathrm{const}$, $\gamma \neq 0$, $\beta \neq -1, 0, 1$. Геометрия с функцией (1) называется симплициальной, с функцией (2) — дуальногельмгольцевой, с функцией (3) — собственно гельмгольцевой, и, наконец, с функцией (4) — псевдогельмгольцевой. Заметим, что функция (4) получается из функции

$$q = [(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2] e^{2\alpha \operatorname{Ar(c)th} \dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}$$

заменой координат: $x = u + v$, $y = u - v$ и преобразованием $g = (q/4)^{\frac{-1}{1+\alpha}}$, $\beta = (\alpha - 1)/(\alpha + 1)$.

Геометрии с функциями (1) — (4) впервые появились при классификации феноменологически симметричных двумерных геометрий [1, 2], хотя собственно гельмгольцева геометрия упоминается еще в работе Г. Гельмгольца [3] при анализе оснований геометрии. Феноменологическая симметрия для двумерных геометрий с функциями (1) — (4), заданными на двумерном многообразии означает существование функциональной связи между шестью значениями функции g для произвольных четырех точек $\langle i, j, k, l \rangle$ двумерного многообразия: $\Phi(g(i,j), g(i,k), g(i,l), g(j,k), g(j,l), g(k,l)) = 0$, где Φ — некоторая дифференцируемая функция. Отметим, что для геометрии (1) такая функциональная связь явно найдена и записывается так [1]:

$$\begin{vmatrix} g(i,j) - g(j,k) & g(j,k) - g(i,k) & 0 \\ g(i,j) - g(j,l) & 0 & g(i,l) - g(j,l) \\ 0 & g(i,k) - g(k,l) & g(i,l) - g(k,l) \end{vmatrix} = 0.$$

Для геометрий (2) — (4) явная запись функциональной связи пока ещё неизвестна. Г.Г. Михайличенко доказано, теорема об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий [1], согласно которой вместо феноменологической симметрии двумерной геометрии можно говорить о групповой симметрии степени три, то есть о трехпараметрической группе движений двумерного многообразия. Ниже даются точные определения, в которых вместо аксиомы феноменологической симметрии приводится аксиома максимальной подвижности.

Локальные действия групп движений геометрий (1) — (4) задаются так:

$$x' = xe^a + b,\ y' = ye^a + c; \tag{5}$$

$$x' = xe^{-a/2} + b,\ y' = xae^{-a/2} + ye^{-a/2} + c; \tag{6}$$

$$x' = xe^{-\gamma a} \cos a - ye^{-\gamma a} \sin a + b,\ y' = xe^{-\gamma a} \sin a + ye^{-\gamma a} \cos a + c; \tag{7}$$

$$x' = xe^{\beta a} + b,\ y' = ye^a + c. \tag{8}$$

Базисные операторы алгебр Ли данных групп движений следующие [1]:

$$X^1 = \partial_x,\ X^2 = \partial_y,\ X^3 = x\partial_x + y\partial_y; \tag{9}$$

$$X^1 = \partial_x,\ X^2 = \partial_y,\ X^3 = x\partial_x + (y - 2x)\partial_y; \tag{10}$$

$$X^1 = \partial_x,\ X^2 = \partial_y,\ X^3 = -(\gamma x + y)\partial_x + (x - \gamma y)\partial_y; \tag{11}$$

$$X^1 = \partial_x,\ X^2 = \partial_y,\ X^3 = \beta x\partial_x + y\partial_y. \tag{12}$$

Несложно заметить, что параметрические группы групп движений (5) — (8) локально изоморфны следующим матричным группам:

$$\begin{pmatrix} e^a & 0 & b \\ 0 & e^a & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} e^{-a/2} & 0 & b \\ ae^{-a/2} & e^{-a/2} & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e^{-\gamma a}\cos a & -e^{-\gamma a}\sin a & b \\ e^{-\gamma a}\sin a & e^{-\gamma a}\cos a & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} e^{\beta a} & 0 & b \\ 0 & e^a & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как было сказано выше, примером двумерной геометрии локальной максимальной подвижности является евклидова плоскость, группа движений которой, как известно, имеет размерность 3. Также известно, что трехмерные евклидова и псевдоевклидова геометрии с метрическими функциями

$$f = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2,$$
$$f = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (z_i - z_j)^2,$$

имеют группы движений размерности 6, т.е. допускают максимальную подвижность. Заметим, что эти метрические функции можно представить в виде:

$$f = g + (z_i - z_j)^2,\ f = g - (z_i - z_j)^2.$$

Возникает естественная задача о нахождении всех трехмерных геометрий с функциями вида:

$$f = \chi(g, z_i, z_j),$$

где g — метрическая функция из списка (1) — (4), допускающих группы движений размерности 6. Решению этой задачи и посвящена данная работа.

Отметим, что задача с подобной постановкой решалась в работах [4]–[8].

1. Точные определения и основные результаты

Рассмотрим трехмерное аналитическое многообразие M, которое локально диффеоморфно прямому произведению двумерного аналитического многообразия N и одномерного аналитического многообразия L. Локальный диффеоморфизм осуществляет аналитическое отображение $h : M \to N \times L$. Пусть $\pi_1 : N \times L \to N$ и $\pi_2 : N \times L \to L$ — проекции. Рассмотрим функции $g : N \times N \to R$, с открытой и плотной областью определения S_g в N^2, и $\chi : R \times L \times L \to R$. Построим функцию $f : M \times M \to R$ по следующей формуле:

$$f = \chi(g(\pi_1(h), \pi_1(h)), \pi_2(h), \pi_2(h)),$$

область определения S_f которой открыта и плотна в M^2. На точках эта функция выглядит так:

$$f(i, j) = \chi(g(\pi_1(h(i)), \pi_1(h(j))), \pi_2(h(i)), \pi_2(h(j))), \tag{13}$$

где i, j — произвольные две точки из M, причем $\langle i, j\rangle \in S_f$.

Для произвольной точки из M рассмотрим координатную окрестность $U \subset M$, в которой h является диффеоморфизмом и для любых точек $i, j \in U$, $\langle i, j\rangle \in$

S_f, существуют окрестности $U(i) \subset U$, $U(j) \subset U$ такие, что $\langle i', j' \rangle \in S_f$, $\forall i' \in U(i)$, $\forall j' \in U(j)$. Из выше сказанного имеем диффеоморфизм окрестностей $h : U \to V \times W$, где V, W — некоторые координатные окрестности в N и L соответственно. Координаты в окрестности V обозначим (x, y), а координату в окрестности W — (z). Тогда в локальных координатах функция (13) принимает следующий вид:

$$f = f(i, j) = \chi(\theta, z_i, z_j), \tag{14}$$

где $g(\pi_1(h(i)), \pi_1(h(j))) = \theta = \theta(x_i, y_i, x_j, y_j)$ — метрическая функция геометрии с максимальной подвижностью из списка (1) — (4), $\pi_2(h(i)) = z_i$, $\pi_2(h(j)) = z_j$. Пусть выполняются аксиомы.

Аксиома аналитичности. Функция $\chi : R \times L \times L \to R$ аналитическая во всех точках области определения.

Аксиома невырожденности. Для функции (14) в произвольной точке окрестности $U(i) \times U(j) \subset M^2$ справедливы неравенства

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \neq 0,\ \frac{\partial \chi}{\partial z_i} \neq 0,\ \frac{\partial \chi}{\partial z_j} \neq 0. \tag{15}$$

Пусть группа Ли G действует эффективно и аналитично в $U \subset M$ [9, 1]. Это означает, что задано аналитическое инъективное отображение (эффективное действие)

$$\lambda : U \times G \to U',$$

где $U' \subset M$ — открытая область, причем выполняются свойства:

1). $\lambda(i, e) = i$, $e \in G$ — единица, $i \in U$;

2). $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ab)$, для любых $a, b \in G$ и $i \in U$;

3). Для любого $i \in U$ $\lambda(i, a) = i$, только если $a = e$.

Действие λ_a, определяемое произвольным элементом $a \in G$, называется *движением*, если для любых точек $i, j \in U$ таких, что $\langle i, j \rangle \in S_f$, $\langle \lambda_a(i), \lambda_a(j) \rangle \in S_f$, выполняется равенство

$$f(\lambda_a(i), \lambda_a(j)) = f(i, j).$$

Действия группы G можно определить в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j, причем если эти окрестности пересекаются, то действия в пересечении совпадают. Множество всех движений образует группу движений.

Аксиома максимальной подвижности. Размерность группы Ли G максимальная и равна 6.

Основная задача этой работы — поиск всех функций вида (14), являющихся двухточечными инвариантами некоторой шестимерной группы движений.

Алгебра Ли действия группы Ли G состоит из операторов

$$X = X_1 \partial_x + X_2 \partial_y + X_3 \partial_z, \tag{16}$$

где $X_\alpha = X_\alpha(x, y, z)$ — аналитическая функция в U, $\alpha = 1, 2, 3$ [9, 1]. Через операторы (1.4) записывается условие локальной инвариантности [10, 1, 11]:

$$X(i) f(i, j) + X(j) f(i, j) = 0, \tag{17}$$

которое выполняется в окрестностях $U(i) \subset U$ и $U(j) \subset U$ точек i и j.

Ниже ищем все функции вида (14), являющиеся двухточечными инвариантами шестипараметрической группы движений, причем θ — функция из списка (1) — (4).

Пусть $k \in U \subset M$ — начало некоторой системы координат в U, в которой эта точка имеет нулевые координаты $(0,0,0)$. В такой системе координат справедливы разложения в ряд Тейлора для компонент оператора (16) и функции (14) [12]:

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = X_1(z) + D_1(X_1)(z)x + D_2(X_1)(z)y+ \\ +\frac{1}{2}D_{1,1}(X_1)(z)x^2 + D_{1,2}(X_1)(z)xy + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_1)(z)y^2 + \cdots, \\ X_2 = X_2(z) + D_1(X_2)(z)x + D_2(X_2)(z)y+ \\ +\frac{1}{2}D_{1,1}(X_2)(z)x^2 + D_{1,2}(X_2)(z)xy + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_2)(z)y^2 + \cdots, \\ X_3 = X_3(z) + D_1(X_3)(z)x + D_2(X_3)(z)y+ \\ +\frac{1}{2}D_{1,1}(X_3)(z)x^2 + D_{1,2}(X_3)(z)xy + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_3)(z)y^2 + \cdots, \end{array}\right. \tag{18}$$

$$f(\theta, z_i, z_j) = f(z_i, z_j) + D_1(f)(z_i, z_j)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f)(z_i, z_j)\theta^2 + \cdots, \tag{19}$$

где, например, $X_1(z) = X_1(0,0,z)$, $D_1(X_1)(z) = \dfrac{\partial X_1(x,y,z)}{\partial x}|_{x=y=0}$, $D_2(X_1)(z) = \dfrac{\partial X_1(x,y,z)}{\partial y}|_{x=y=0}$, $D_{1,2}(X_2)(z) = \dfrac{\partial^2 X_2(x,y,z)}{\partial x \partial y}|_{x=y=0}$, $f(z_i, z_j) = f(0, z_i, z_j)$, $D_1(f)(z_i, z_j) = \dfrac{\partial f(\theta, z_i, z_j)}{\partial \theta}|_{\theta=0}$. Основные результат работы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Рассмотрим произвольную точку $k \in M$ и ее координатную окрестность U. Возьмем также две точки $i, j \in U$ с окрестностями $U(i)$ и $U(j)$ такие, что*

$$U(i) \cup U(j) \subset U, \ \ \textit{причем} \ \ \langle i,j\rangle, \langle i',j'\rangle \in S_f, \ \ \forall i' \in U(i), \ \ \forall j' \in U(j).$$

Тогда функция (14) в аналитическом многообразии M, являющаяся двухточечным инвариантом шестипараметрической группы движений, в окрестности $U(i) \times U(j)$ в подходящих локальных координатах и масштабном преобразовании ($\varphi(f) \to f$) имеет один из следующих видов:

$$f(i,j) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j; \tag{20}$$

$$f(i,j) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} e^{z_i + z_j}; \tag{21}$$

$$f(i,j) = arctg\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j; \tag{22}$$

$$f(i,j) = (x_i - x_j)^2 e^{\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j}; \tag{23}$$

$$f(i,j) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] e^{2\gamma\, arctg\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j}; \tag{24}$$

$$f(i,j) = \frac{(y_i - y_j)^\beta}{x_i - x_j} e^{z_i + z_j}, \tag{25}$$

где $\gamma, \beta = const$, $\gamma \neq 0$, $\beta \neq -1, 0, 1$.

Заметим, что (20) — функция трехмерной симплициальной геометрии первого типа, (21) — функция трехмерной симплициальной геометрии второго типа, (22) — функция трехмерной симплициальной геометрии третьего типа, (23) — функция трехмерной дуальногельмгольцевой геометрии, (24) — функция трехмерной собственно гельмгольцевой геометрии, и, наконец, (25) — функция трехмерной псевдогельмгольцевой геометрии. В процессе доказательства теоремы применяется лемма.

Лемма 1. *Система дифференциальных уравнений*

$$\frac{\partial\chi}{\partial z_i} = \varphi(z_i)(p+q\theta+r\theta^2)\frac{\partial\chi}{\partial\theta},\ \frac{\partial\chi}{\partial z_j} = \varphi(z_j)(p+q\theta+r\theta^2)\frac{\partial\chi}{\partial\theta},$$

где $\chi = \chi(\theta, z_i, z_j)$, φ *— аналитические функции,* $p^2+q^2+r^2 \neq 0$, *в окрестности* $U(i)\times U(j) \subset M$ *имеет решение:*
при $r = q = 0$*:*

$$\chi = \psi(\theta/p + K(z_i) + K(z_j)), \tag{26}$$

при $r = 0$, $q \neq 0$*:*

$$\chi = \psi(\ln(p+q\theta)/q + K(z_i) + K(z_j)), \tag{27}$$

при $r \neq 0$, $q^2 - 4pr = 0$*:*

$$\chi = \psi(-2/(2r\theta+q) + K(z_i) + K(z_j)), \tag{28}$$

при $r \neq 0$, $q^2 - 4pr > 0$*:*

$$\chi = \psi\left(\ln\frac{2r\theta+q-\sqrt{q^2-4pr}}{2r\theta+q+\sqrt{q^2-4pr}} + K(z_i) + K(z_j)\right), \tag{29}$$

при $r \neq 0$, $q^2 - 4pr < 0$*:*

$$\chi = \psi\left(\frac{2}{\sqrt{4pr-q^2}}\,arctg\left(\frac{2r}{\sqrt{4pr-q^2}}\left(\theta+\frac{q}{2r}\right)\right) + K(z_i) + K(z_j)\right), \tag{30}$$

причем $K = \int \varphi(z)dz$.

Доказательство. Записываются уравнения характеристик по исходным дифференциальным уравнениям [13] $d\theta/(p+q\theta+r\theta^2) = -\varphi(z_i)dz_i$, $d\theta/(p+q\theta+r\theta^2) = -\varphi(z_j)dz_j$. Интегрируя которые, приходим к утверждению леммы 1. □

Как сказано выше, функция (14) является двухточечным инвариантом действия шестимерной группы Ли G, поэтому условие локальной инвариантности (17) в явном виде, для различных значений аргумента θ из списка (1) — (4), записывается так:

$$\left\{\begin{array}{l} [(x_i-x_j)(X_2(i)-X_2(j)) - (y_i-y_j)(X_1(i)-X_1(j))]\frac{\partial\chi}{\partial\theta} \\ +(x_i-x_j)^2\left(X_3(i)\frac{\partial\chi}{\partial z_i} + X_3(j)\frac{\partial\chi}{\partial z_j}\right) = 0; \end{array}\right. \tag{31}$$

$$\left\{\begin{array}{l} [(2(x_i-x_j)-(y_i-y_j))(X_1(i)-X_1(j)) + (x_i-x_j)(X_2(i)-X_2(j))]\frac{\partial\chi}{\partial\theta} \\ +e^{-\dfrac{y_i-y_j}{x_i-x_j}}\left(X_3(i)\frac{\partial\chi}{\partial z_i} + X_3(j)\frac{\partial\chi}{\partial z_j}\right) = 0; \end{array}\right. \tag{32}$$

$$(33)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2[((x_i-x_j)-\gamma(y_i-y_j))(X_1(i)-X_1(j)) \\ +((y_i-y_j)+\gamma(x_i-x_j))(X_2(i)-X_2(j))]\frac{\partial\chi}{\partial\theta} \\ +e^{-2\gamma\mathrm{arctg}\dfrac{y_i-y_j}{x_i-x_j}}\left(X_3(i)\frac{\partial\chi}{\partial z_i}+X_3(j)\frac{\partial\chi}{\partial z_j}\right)=0; \end{array}\right.$$

$$(34)\qquad \left\{\begin{array}{l} [\beta(x_i-x_j)(X_2(i)-X_2(j))-(y_i-y_j)(X_1(i)-X_1(j))]\frac{\partial\chi}{\partial\theta} \\ +(x_i-x_j)^2(y_i-y_j)^{1-\beta}\left(X_3(i)\frac{\partial\chi}{\partial z_i}+X_3(j)\frac{\partial\chi}{\partial z_j}\right)=0, \end{array}\right.$$

где X_1, X_2, X_3 — компоненты оператора (16). Заметим, что выражения (31) — (34) выполняются тождественно по координатам точек i и j из окрестностей $U(i)$ и $U(j)$, причем $U(i)\cup U(j)\subset U$, U — координатная окрестность.

Затем находятся базисные операторы алгебр Ли групп движений.

Теорема 2. *Базис алгебр Ли групп движений геометрий максимальной подвижности с функциями* (20) — (25) *составляют операторы* X^1, X^2, X^3, X^4, X^5, X^6, *которые в координатной окрестности* U *имеют соответственно следующий вид:*
для (20)*:*

$$(35)\qquad \partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x+y\partial_y,\ -2x\partial_y+\partial_z,\ -x^2\partial_y+x\partial_z,\ -x^2\partial_x-2xy\partial_y+y\partial_z;$$

для (21)*:*

$$(36)\qquad \partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x+y\partial_y,\ x\partial_x-y\partial_y+\partial_z,\ x^2\partial_x+x\partial_z,\ -y^2\partial_y+y\partial_z;$$

для (22)*:*

$$(37)\qquad \left\{\begin{array}{l} \partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x+y\partial_y,\ 2y\partial_x-2x\partial_y+\partial_z, \\ 2xy\partial_x+(y^2-x^2)\partial_y+x\partial_z,\ (x^2-y^2)\partial_x+2xy\partial_y-y\partial_z; \end{array}\right.$$

для (23)*:*

$$(38)\qquad \left\{\begin{array}{l} \partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x+(y-2x)\partial_y,\ -2x\partial_y+\partial_z, \\ -x^2\partial_y+x\partial_z,\ -x^2\partial_x+2(x^2-xy)\partial_y+y\partial_z; \end{array}\right.$$

для (24)*:*
(39)

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_x,\ \partial_y,\ -(y+\gamma x)\partial_x+(x-\gamma y)\partial_y,\ (\gamma y-x)\partial_x-(y+\gamma x)\partial_y+(1+\gamma^2)\partial_z, \\ (-x^2+y^2+2\gamma xy)\partial_x-(\gamma(x^2-y^2)+2xy)\partial_y+2(1+\gamma^2)x\partial_z, \\ (\gamma(-x^2+y^2)-2xy)\partial_x+(x^2-y^2-2\gamma xy)\partial_y+2(1+\gamma^2)y\partial_z; \end{array}\right.$$

для (25)*:*

$$(40)\qquad \partial_x,\ \partial_y,\ \beta x\partial_x+y\partial_y,\ \beta x\partial_x-y\partial_y+\beta\partial_z,\ x^2\partial_x+x\partial_z,\ -y^2\partial_y+\beta y\partial_z,$$

где $\gamma,\beta=const$, $\gamma\neq 0$, $\beta\neq -1,0,1$.

Отметим, что операторы (36), (38) и (39) приводятся в работе [14].

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 2. *В окрестности* $U(i)\times U(j)$ *для тождеств* (31) — (34) *выполняются неравенства:*

$$(x_i-x_j)(X_2(i)-X_2(j))-(y_i-y_j)(X_1(i)-X_1(j))\neq 0;$$
$$(2(x_i-x_j)-(y_i-y_j))(X_1(i)-X_1(j))+(x_i-x_j)(X_2(i)-X_2(j))\neq 0;$$
$$((x_i-x_j)-\gamma(y_i-y_j))(X_1(i)-X_1(j))+((y_i-y_j)+\gamma(x_i-x_j))(X_2(i)-X_2(j))\neq 0;$$
$$\beta(x_i-x_j)(X_2(i)-X_2(j))-(y_i-y_j)(X_1(i)-X_1(j))\neq 0.$$

Доказательство. Подробно докажем первые два неравенства. Остальные неравенства доказываются аналогично. Метод, применяемый при доказательстве этой леммы, впервые апробирован в работе [15].

I. Предположим, что первое неравенство не выполняется в $U(i)\times U(j)$, т.е. справедливо равенство

$$(x_i-x_j)(X_2(i)-X_2(j))-(y_i-y_j)(X_1(i)-X_1(j))=0. \tag{41}$$

Продифференцируем равенство (41) дважды по: x_i и x_j, y_i и y_j, x_i и y_j, z_i и x_j, z_i и y_j

$$X'_{2x}(j)+X'_{2x}(i)=0,\ X'_{1y}(j)+X'_{1y}(i)=0,$$
$$X'_{2y}(j)-X'_{1x}(i)=0,\ X'_{2z}(i)=0,\ X'_{1z}(i)=0.$$

Затем разделяем переменные:

$$X'_{1x}=c=\mathrm{const},\ X'_{2y}=c,\ X'_{2x}=0,\ X'_{1y}=0,\ X'_{1z}=0,\ X'_{2z}=0.$$

Интегрируя эти уравнения и подставляя результат в (41), получаем первые две компоненты оператора (16) алгебры Ли группы движений:

$$X_1=cx+a,\ X_2=cy+b,$$

причем $a,b=\mathrm{const}$.

В тождестве (31), с учетом (41), возможны два случая: либо $X_3=0$, либо $X_3\neq 0$.

Если $X_3=0$, то произвольный оператор алгебры Ли группы движений, оставляющий функцию (14) инвариантной, имеет вид:

$$X=(cx+a)\partial_x+(cy+b)\partial_y.$$

Придавая произвольным постоянным (a,b,c) значения $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, получаем три базисных оператора (9), а их должно быть шесть. Противоречие.

Пусть теперь $X_3\neq 0$. Тогда

$$X_3(i)\frac{\partial\chi}{\partial z_i}+X_3(j)\frac{\partial\chi}{\partial z_j}=0. \tag{42}$$

От выражения (42) переходим к тождеству

$$\frac{X_3(i)}{X_3(j)}=\varphi(\theta,z_i,z_j), \tag{43}$$

для чего левую и правую части делим на ненулевое произведение $X_3(j)\frac{\partial\chi}{\partial z_i}$ и вводим обозначение $\varphi(\theta,z_i,z_j)=-\frac{\partial\chi}{\partial z_j}/\frac{\partial\chi}{\partial z_i}$. В (43) аргумент θ принимает вид (1). Дифференцируем (43) по x_i и по x_j:

$$\frac{X'_{3x}(i)}{X_3(j)}=-\frac{y_i-y_j}{(x_i-x_j)^2}\varphi'_\theta,\ -\frac{X_3(i)X'_{3x}(j)}{X_3^2(j)}=\frac{y_i-y_j}{(x_i-x_j)^2}\varphi'_\theta,$$

затем полученное складываем и разделяем переменные:

$$\frac{X'_{3x}(i)}{X_3(i)} = \frac{X'_{3x}(j)}{X_3(j)} = \alpha = \mathrm{const}.$$

Уравнение (43) теперь дифференцируем по y_i и y_j, затем поступаем как в предыдущем случае:

$$\frac{X'_{3y}(i)}{X_3(i)} = \frac{X'_{3y}(j)}{X_3(j)} = \beta = \mathrm{const}.$$

И, наконец, дифференцируем (43) по x_i и по y_j, после преобразований получаем:

$$\frac{(x_i - x_j)X'_{3x}(i)}{X_3(i)} + \frac{(y_i - y_j)X'_{3y}(j)}{X_3(j)} = 0.$$

Таким образом,

$$X'_{3x} = \alpha X_3,\ X'_{3y} = \beta X_3,\ \alpha(x_i - x_j) + \beta(y_i - y_j) = 0.$$

Значит $\alpha = \beta = 0$. Тогда

$$X_3 = a(z) \neq 0.$$

Подставляя найденное в (42), имеем

$$a(z_i)\frac{\partial\chi}{\partial z_i} + a(z_j)\frac{\partial\chi}{\partial z_j} = 0.$$

Вводим замену: $\int \frac{dz}{a(z)} = \overline{z}$. Тогда в новых координатах $X_3 = 1$.

Таким образом, произвольный оператор алгебры Ли группы движений трехмерного пространства сохраняющей функцию (16), имеет вид:

$$X = (cx + a)\partial_x + (cy + b)\partial_y + \partial_{\overline{z}}.$$

Придавая постоянным (a, b, c) значения $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,0,0)$, получаем базисные операторы $\partial_x + \partial_{\overline{z}}$, $\partial_y + \partial_{\overline{z}}$, $x\partial_x + y\partial_y + \partial_{\overline{z}}$, $\partial_{\overline{z}}$. Видно, что таких операторов четыре, а должно быть шесть. Противоречие.

II. Приступим теперь к доказательству второго неравенства. Предположим, что оно не выполняется в $U(i) \times U(j)$, т.е. справедливо равенство

$$(2(x_i - x_j) - (y_i - y_j))(X_1(i) - X_1(j)) + (x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) = 0. \tag{44}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущим, поэтому частично они будут опускаться. Продифференцируем тождество (44) дважды по x_i и x_j, y_i и y_j, x_i и y_j, z_i и x_j, z_i и y_j:

$$2X'_{1x}(j) + 2X'_{1x}(i) + X'_{2x}(j) + X'_{2x}(i) = 0,\ X'_{1y}(j) + X'_{1y}(i) = 0,$$

$$2X'_{1y}(j) + X'_{2y}(j) - X'_{1x}(i) = 0,\ 2X'_{1z}(i) + X'_{2z}(i) = 0,\ X'_{1z}(i) = 0.$$

Затем разделяем переменные:

$$X'_{1x} = c = \mathrm{const},\ X'_{2y} = c,\ X'_{2x} = -2c,\ X'_{1y} = 0,\ X'_{1z} = 0,\ X'_{2z} = 0.$$

Интегрируя последние уравнения и возвращаясь в (44), получаем первые две компоненты оператора (16):

$$X_1 = cx + a,\ X_2 = c(y - 2x) + b,$$

причем $a, b = \mathrm{const}$.

В тождестве (44), как и в первом случае, возможно, либо $X_3 = 0$, либо $X_3 \neq 0$.

Если $X_3 = 0$, то имеем следующий оператор алгебры Ли группы движений:

$$X = (cx + a)\partial_x + (c(y - 2x) + b)\partial_y.$$

Тогда получаем три базисных оператора (10), а должно быть шесть. Противоречие.

Пусть теперь $X_3 \neq 0$. Тогда решаем уравнение (43), причем аргумент θ принимает значение (2). Рассуждая как и выше, получаем произвольный оператор алгебры Ли группы движений трехмерного пространства:

$$X = (cx + a)\partial_x + (c(y - 2x) + b)\partial_y + \partial_{\overline{z}}.$$

Придавая постоянным (a, b, c) значения $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, 0)$, имеем базисные операторы $\partial_x + \partial_{\overline{z}}$, $\partial_y + \partial_{\overline{z}}$, $x\partial_x + (y - 2x)\partial_y + \partial_{\overline{z}}$, $\partial_{\overline{z}}$. Видно, что таких операторов четыре, а должно быть шесть. Противоречие.

Таким образом, первые два неравенства в $U(i) \times U(j)$, верны. Аналогично доказывается справедливость неравенств (33) и (34). Лемма доказана. □

Лемма 3. *В окрестности* $U(i) \times U(j)$ *для тождеств* (31) — (34) *справедливо неравенство* $X_3 \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное, пусть в окрестности $U(i) \times U(j)$ для тождеств (31) — (34) выполняется равенство $X_3 = 0$. Тогда из леммы 2 и этих тождеств следует $\partial\chi/\partial\theta = 0$, что противоречит неравенствам (15). □

Лемма 4. *В окрестности* $U(i) \times U(j)$ *функция* $X_3(x, y, z)$*, входящая в тождества* (31) — (34)*, зависит либо от* x*, либо от* y*, т. е.*

$$\left(\frac{\partial X_3(x, y, z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_3(x, y, z)}{\partial y}\right)^2 \neq 0.$$

Доказательство. Эта лемма сформулирована сразу для четырех тождеств. Случаи для всех этих тождеств проверяются аналогично, поэтому подробно мы остановимся на случаях (33) и (34). Доказательство проводится методом от противного. Согласно лемме 3 тогда в тождествах (31) — (34) будем иметь $X_3 = X_3(z) \neq 0$.

I. Тождество (33) в окрестности $U(i) \times U(j)$ представим в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} ((x_i - x_j) - \gamma(y_i - y_j))(X_1(i) - X_1(j)) + \\ ((y_i - y_j) + \gamma(x_i - x_j))(X_2(i) - X_2(j)) = F(u, v, z_i, z_j), \end{array} \right. \tag{45}$$

где введены обозначения

$$F(\theta, z_i, z_j) = e^{-2\gamma \operatorname{arctg}\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j}} \overline{F}(\theta, z_i, z_j),$$

$$\overline{F}(\theta, z_i, z_j) = -\frac{1}{2}\left(X_3(z_i)\frac{\partial\chi}{\partial z_i} + X_3(z_j)\frac{\partial\chi}{\partial z_j}\right) / \frac{\partial\chi}{\partial\theta},$$

$u = x_i - x_j$, $v = y_i - y_j$, причем аргумент θ имеет вид (3). Продифференцируем равенство (45) по переменным x_i, x_j, y_i, y_j:

$$X_1(i) - X_1(j) + \gamma(X_2(i) - X_2(j)) + (u - \gamma v)X'_{1x}(i) + (v + \gamma u)X'_{2x}(i) = F'_u,$$

$$X_1(i) - X_1(j) + \gamma(X_2(i) - X_2(j)) + (u - \gamma v)X'_{1x}(j) + (v + \gamma v)X'_{2x}(j) = F'_u,$$

$$-\gamma(X_1(i) - X_1(j)) + X_2(i) - X_2(j) + (u - \gamma v)X'_{1y}(i) + (v + \gamma u)X'_{2y}(i) = F'_v,$$

$$-\gamma(X_1(i) - X_1(j)) + X_2(i) - X_2(j) + (u - \gamma v)X'_{1y}(j) + (v + \gamma u)X'_{2y}(j) = F'_v,$$

где $u = x_i - x_j$, $v = y_i - y_j$. Далее комбинируем первое и второе, а также третье и четвертое равенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} (u-\gamma v)X'_{1x_i} + (v+\gamma u)X'_{2x_i} = (u-\gamma v)X'_{1x_j} + (v+\gamma u)X'_{2x_j}, \\ (u-\gamma v)X'_{1y_i} + (v+\gamma u)X'_{2y_i} = (u-\gamma v)X'_{1y_j} + (v+\gamma u)X'_{2y_j}. \end{array} \right. \tag{46}$$

Затем уравнения в системе (46) дифференцируем по x_i и x_j; по x_i и y_j; по y_i и y_j, после чего производим разделение переменных:

$$X'_{2xx} = X'_{2xy} = X'_{2yy} = X'_{1xx} = X'_{1xy} = X'_{1yy} = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$X_1 = q_1(z)x + q_2(z)y + q(z),\ X_2 = p_1(z)x + p_2(z)y + p(z).$$

Далее найденное подставляем в систему (46)

$$(u-\gamma v)q_1(z_i) + (v+\gamma u)p_1(z_i) = (u-\gamma v)q_1(z_j) + (v+\gamma u)p_1(z_j),$$

$$(u-\gamma v)q_2(z_i) + (v+\gamma u)p_2(z_i) = (u-\gamma v)q_2(z_j) + (v+\gamma u)p_2(z_j).$$

Сравнивая, имеем $p_1, p_2, q_1, q_2 = \mathrm{const}$. Тогда

$$X_1 = q_1x + q_2y + q(z),\ X_2 = p_1x + p_2y + p(z).$$

Полученное подставляем в (45)

$$[(u-\gamma v)(q_1u+q_2v+q(z_i)-q(z_j)) + (v+\gamma u)(p_1u+p_2v+p(z_i)-p(z_j))]e^{2\gamma arctg\dfrac{v}{u}} = \\ = \overline{F}(\theta, z_i, z_j).$$

Далее полученное равенство дифференцируем по u и по v, после чего сократим на общий множитель $e^{2\gamma arctg\dfrac{v}{u}}$:

$$[(q_1u+q_2v+q(z_i)-q(z_j)) + \gamma(p_1u+p_2v+p(z_i)-p(z_j)) + q_1(u-\gamma v) + p_1(v+\gamma u)] - \\ -\frac{2\gamma v}{u^2+v^2}[(u-\gamma v)(q_1u+q_2v+q(z_i)-q(z_j)) + (v+\gamma u)(p_1u+p_2v+p(z_i)-p(z_j))] = \\ = 2(u-\gamma v)\overline{F}'_\theta(\theta, z_i, z_j),$$

$$[-\gamma(q_1u+q_2v+q(z_i)-q(z_j)) + (p_1u+p_2v+p(z_i)-p(z_j)) + q_2(u-\gamma v) + p_2(v+\gamma u)] + \\ \frac{2\gamma u}{u^2+v^2}[(u-\gamma v)(q_1u+q_2v+q(z_i)-q(z_j)) + (v+\gamma u)(p_1u+p_2v+p(z_i)-p(z_j))] = \\ = 2(v+\gamma u)\overline{F}'_\theta(\theta, z_i, z_j).$$

Потом из первого равенства, умноженного на $v+\gamma u$, вычтем второе, умноженное на $u-\gamma v$:

$$(v+\gamma u)[(q_1u+q_2v+q(z_i)-q(z_j)) + \gamma(p_1u+p_2v+p(z_i)-p(z_j)) + q_1(u-\gamma v) + p_1(v+\gamma u)] \\ -(u-\gamma v)[-\gamma(q_1u+q_2v+q(z_i)-q(z_j)) + \\ +(p_1u+p_2v+p(z_i)-p(z_j)) + q_2(u-\gamma v) + p_2(v+\gamma u)] - \\ -2\gamma[(u-\gamma v)(q_1u+q_2v+q(z_i)-q(z_j)) + (v+\gamma u)(p_1u+p_2v+p(z_i)-p(z_j))] = 0.$$

Приводя подобные, получаем: $p_1 = -q_2 = w$, $p_2 = q_1 = r$, $p(z) = p = \mathrm{const}$, $q(z) = q = \mathrm{const}$. Тогда произвольный оператор (16) алгебры Ли группы движений примет вид:

$$X = (rx - wy + q)\partial_x + (wx + ry + p)\partial_y + X_3(z)\partial_z.$$

Далее поступаем как в конце доказательства леммы 2: вводим замену $\int \frac{dz}{X_3(z)} = \overline{z}$, после чего приходим к базисным операторам $\partial_x + \partial_{\overline{z}}$, $\partial_y + \partial_{\overline{z}}$, $\partial_x + y\partial_y + \partial_{\overline{z}}$, $-y\partial_x + x\partial_y + \partial_{\overline{z}}$, $\partial_{\overline{z}}$, которых пять, а должно быть шесть. Противоречие.

II. Тождество (34) в окрестности $U(i) \times U(j)$ можно представить в виде:

$$\beta(x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) - (y_i - y_j)(X_1(i) - X_1(j)) = F(x_i - x_j, y_i - y_j, z_i, z_j), \tag{47}$$

где введены обозначения

$$F(x_i - x_j, y_i - y_j, z_i, z_j) = (x_i - x_j)(y_i - y_j)\overline{F}(\theta, z_i, z_j),$$

$$\overline{F}(\theta, z_i, z_j) = -\frac{1}{\theta}\left(X_3(z_i)\frac{\partial\chi}{\partial z_i} + X_3(z_j)\frac{\partial\chi}{\partial z_j}\right) / \frac{\partial\chi}{\partial\theta},$$

$u = x_i - x_j$, $v = y_i - y_j$.

Продифференцируем равенство (47) по переменным x_i, x_j, y_i, y_j:

$$\beta(X_2(i) - X_2(j)) + \beta u X'_{2x_i} - vX'_{1x_i} = F'_u,$$
$$\beta(X_2(i) - X_2(j)) + \beta u X'_{2x_j} - vX'_{1x_j} = F'_u,$$
$$\beta u X'_{2y_i} - X_1(i) + X_1(j) - (y_i - y_j)X'_{1y_i} = F'_v,$$
$$\beta u X'_{2y_j} - X_1(i) + X_1(j) - (y_i - y_j)X'_{1y_j} = F'_v.$$

Далее комбинируем первое и второе, а также третье и четвертое равенства:

$$\beta u X'_{2x_i} - vX'_{1x_i} = \beta u X'_{2x_j} - vX'_{1x_j},\ \beta u X'_{2y_i} - vX'_{1y_i} = \beta u X'_{2y_j} - vX'_{1y_j}. \tag{48}$$

Затем уравнения (48) дифференцируем по x_i и x_j; по x_i и y_j; по y_i и y_j, после чего производим разделение переменных, потом интегрируем и возвращаемся в (48), в результате получим:

$$X_1 = q_1x + q_2y + q(z),\ X_2 = p_1x + p_2y + p(z).$$

Найденное подставляем в (47)

$$[-v(q_1u + q_2v + q(z_i) - q(z_j)) + \beta u(p_1u + p_2v + p(z_i) - p(z_j))]\frac{1}{uv} = \overline{F}(\theta, z_i, z_j).$$

Далее дифференцируем по u и по v, после чего сократим на общий множитель $e^{2\gamma arctg\frac{v}{u}}$:

$$v[\beta(p_1u + p_2v + p(z_i) - p(z_j)) - q_1v + p_1\beta u] -$$
$$-[-v(q_1u + q_2v + q(z_i) - q(z_j)) + \beta u(p_1u + p_2v + p(z_i) - p(z_j))] =$$
$$= -v^2\overline{F}'_\theta(\theta, z_i, z_j),$$
$$u[-(q_1u + q_2v + q(z_i) - q(z_j)) - q_2v + p_2\beta u] -$$
$$-[-v(q_1u + q_2v + q(z_i) - q(z_j)) + \beta u(p_1u + p_2v + p(z_i) - p(z_j))] =$$
$$= \beta u^2\overline{F}'_\theta(\theta, z_i, z_j).$$

Потом первое равенство, умноженное на βu^2, сложим со вторым, умноженным на v^2:

$$\beta u^2[v[\beta(p_1u + p_2v) - q_1v + p_1\beta u] - [-v(q_1u + q_2v) + \beta u(p_1u + p_2v)]] +$$
$$+v^2[u[-(q_1u + q_2v) - q_2v + p_2\beta u] - [-v(q_1u + q_2v) + \beta u(p_1u + p_2v)]] = 0.$$

Приводя подобные, получаем: $p_1 = q_2 = 0$, $p_2 = r$, $q_1 = \beta r$, $p(z) = p = \mathrm{const}$, $q(z) = q = \mathrm{const}$. Тогда произвольный оператор (16) алгебры Ли группы движений примет вид:

$$X = (\beta r x + q)\partial_x + (ry + p)\partial_y + X_3(z)\partial_z.$$

Потом, как и выше, вводим замену $\int \frac{dz}{X_3(z)} = \overline{z}$, после чего приходим к базисным операторам $\partial_x + \partial_{\overline{z}}$, $\partial_y + \partial_{\overline{z}}$, $\beta x\partial_x + y\partial_y + \partial_{\overline{z}}$, $\partial_{\overline{z}}$, которых четыре, а должно быть шесть. Противоречие. Лемма доказана. □

3. Доказательство теоремы 1

Функциональные уравнения (31) — (34) в окрестности $U(i) \times U(j)$ удобно переписать в виде:

$$(x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) - (y_i - y_j)(X_1(i) - X_1(j))+$$

$$+(x_i - x_j)^2(X_3(i)F_1 + X_3(j)F_2) = 0, \tag{49}$$

$$(2(x_i - x_j) - (y_i - y_j))(X_1(i) - X_1(j)) + (x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j))+$$

$$+e^{-\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}(X_3(i)F_1 + X_3(j)F_2) = 0, \tag{50}$$

$$((x_i - x_j) - \gamma(y_i - y_j))(X_1(i) - X_1(j)) + ((y_i - y_j) + \gamma(x_i - x_j))(X_2(i) - X_2(j))+$$

$$+e^{-2\gamma \operatorname{arctg}\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}(X_3(i)F_1 + X_3(j)F_2) = 0, \tag{51}$$

$$\beta(x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) - (y_i - y_j)(X_1(i) - X_1(j))+$$

$$+(x_i - x_j)^2(y_i - y_j)^{1-\beta}(X_3(i)F_1 + X_3(j)F_2) = 0, \tag{52}$$

где введены обозначения

$$F_1(\theta, z_i, z_j) = \frac{\partial\chi}{\partial z_i}/\frac{\partial\chi}{\partial\theta},\ F_2(\theta, z_i, z_j) = \frac{\partial\chi}{\partial z_j}/\frac{\partial\chi}{\partial\theta}. \tag{53}$$

Из аксиом аналитичности и невырожденности, очевидно, следуют аналитичность функций (53) в окрестности $U(i) \times U(j)$ и справедливость неравенств $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$. Тогда, учитывая (19), имеем разложения в ряд Тейлора [12]

$$\begin{cases} F_1 = f_1(z_i, z_j) + D_1(f_1)(z_i, z_j)\theta + 1/2D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j)\theta^2 + \cdots, \\ F_2 = f_2(z_i, z_j) + D_1(f_2)(z_i, z_j)\theta + 1/2D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j)\theta^2 + \cdots. \end{cases} \tag{54}$$

Далее разложения (18) и (54) подставляем в тождества (49) — (52) и рассматриваем четыре случая.

I. Разложения (18) и (54) подставляем в тождество (49), в котором аргумент θ имеет вид (1), затем сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных x_i, y_i, x_j, y_j, а также перед отрицательными степенями $(x_i - x_j)^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Отметим, что отрицательные степени $(x_i - x_j)^{-n}$, входящие в тождество (49), в окрестности нуля в ряд Тейлора не разлагаются, поэтому коэффициенты перед ними обращаются в нуль. Эта задача существенно упрощается с применением математического пакета программ MAPLE 15 [16].

Сравнивая коэффициенты перед отрицательными степенями $(x_i - x_j)^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, имеем

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_i)\overline{F_1}(z_i, z_j) = 0,\ D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_j)\overline{F_2}(z_i, z_j) = 0,$$

причем $\alpha_n = 1, 2$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$,

$$\overline{F_1} = (D_{1,1,1}(f_1), D_{1,1,1,1}(f_1), \ldots),\ \overline{F_2} = (D_{1,1,1}(f_2), D_{1,1,1,1}(f_2), \ldots).$$

Поэтому из леммы 4 следует $\overline{F_1} = \overline{F_2} = 0$. Значит

$$F_1 = f_1(z_i, z_j) + D_1(f_1)(z_i, z_j)\theta + 1/2D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j)\theta^2 \neq 0,$$
$$F_2 = f_2(z_i, z_j) + D_1(f_2)(z_i, z_j)\theta + 1/2D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j)\theta^2 \neq 0,$$

следовательно

$$\begin{cases} (f_1(z_i, z_j))^2 + (D_1(f_1)(z_i, z_j))^2 + (D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j))^2 \neq 0, \\ (f_2(z_i, z_j))^2 + (D_1(f_2)(z_i, z_j))^2 + (D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j))^2 \neq 0. \end{cases}$$

Далее сравниваем все коэффициенты со степенями выше 4 при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j, получаем

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_i) f_1(z_i, z_j) = 0,\ D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_j) f_2(z_i, z_j) = 0,$$
$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_i) D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0,\ D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_j) D_1(f_2)(z_i, z_j) = 0,$$
$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_i) D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j) = 0,\ D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_j) D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j) = 0,$$

причем $\alpha_n = 1, 2$, $n = 3, 4, 5, \ldots$ Из предыдущего тогда будет следовать:

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3) = 0,$$

где $\alpha_n = 1, 2$, $n = 3, 4, 5, \ldots$ Из сравнения этих же степеней также получаем

$$D_{\beta_1,\beta_2,\ldots}(X_1) = 0,\ D_{\beta_1,\beta_2,\ldots}(X_2) = 0,$$

где $\beta_n = 1, 2$, $n = 4, 5, 6, \ldots$

Потом сравниваем коэффициенты со степеней 4 при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j:

$$D_{1,1,1}X_1 = D_{1,1,2}X_1 = D_{1,2,2}X_1 = D_{2,2,2}X_1 = 0,$$
$$D_{1,1,1}X_2 = D_{1,1,2}X_2 = D_{1,2,2}X_2 = D_{2,2,2}X_2 = 0,$$
$$D_{1,1}X_3 = D_{1,2}X_3 = D_{2,2}X_3 = 0.$$

Сравниваем коэффициенты со степенями 1:

$$X_1(z) = \alpha = \mathrm{const},\ X_2(z) = \beta = \mathrm{const}.$$

Затем сравниваем все коэффициенты перед степенями 2 и записываем явные выражения:

$$-D_1(X_1)(z_i) + D_2(X_2)(z_i) + X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) + X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0;$$
$$-D_1(X_2)(z_j) - D_1(X_2)(z_i) - 2X_3(z_i)f_1(z_i, z_j) - 2X_3(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0;$$
$$D_1(X_1)(z_i) - D_2(X_2)(z_j) - X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) - X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0;$$
$$D_1(X_1)(z_j) - D_2(X_2)(z_i) - X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) - X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0;$$
$$D_2(X_1)(z_i) + D_2(X_1)(z_j) - X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j) - X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j) = 0;$$
$$-D_1(X_1)(z_j) + D_2(X_2)(z_j) + X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) + X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0;$$
$$D_1(X_2)(z_i) + X_3(z_i)f_1(z_i, z_j) + X_3(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0;$$
$$-2D_2(X_1)(z_i) + X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j) + X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j) = 0;$$
$$D_1(X_2)(z_j) + X_3(z_i)f_1(z_i, z_j) + X_3(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0;$$
$$-2D_2(X_1)(z_j) + X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j) + X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j) = 0.$$

Комбинируем уравнения и разделяем переменные:

$$D_1(X_2) = a = \mathrm{const},\ D_2(X_1) = b = \mathrm{const},$$
$$D_1(X_1) = c = \mathrm{const},\ D_2(X_2) = d = \mathrm{const},$$
$$X_3(z_i)f_1(z_i, z_j) + X_3(z_j)f_2(z_i, z_j) = -a,$$

$$X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i,z_j) + X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i,z_j) = c - d,$$
$$X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i,z_j) + X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_i,z_j) = 2b.$$

И, наконец, сравниваем коэффициенты перед степенями 3, комбинируем и разделяем переменные:

$$D_{1,1}X_1 = a_1,\ D_{1,2}X_1 = a_2,\ D_{2,2}X_1 = a_3,$$
$$D_{1,1}X_2 = b_1,\ D_{1,2}X_2 = b_2,\ D_{2,2}X_2 = b_3,$$
$$D_1X_3(z_i)f_1(z_i,z_j) = D_1X_3(z_j)f_2(z_i,z_j) = -b_1/2,$$
$$D_2X_3(z_i)f_1(z_i,z_j) + D_2X_3(z_j)f_2(z_i,z_j) = -b_2,$$
$$D_1X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i,z_j) + D_1X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i,z_j) = a_1 - b_2,$$
$$D_2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i,z_j) + D_2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i,z_j) = a_2 - b_3,$$
$$D_1X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i,z_j) + D_1X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_i,z_j) = 2a_2,$$
$$D_2X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i,z_j) = D_2X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_i,z_j) = a_3,$$
$$D_1X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i,z_j) + 2D_2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i,z_j) = -b_3 + 2a_2,$$
$$D_1X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i,z_j) - 2D_2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i,z_j) = b_3,$$
$$D_1X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_i,z_j) + 2D_2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i,z_j) = 2a_2 - b_3,$$
$$D_1X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_i,z_j) - 2D_2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i,z_j) = b_3,$$
$$2D_2X_3(z_i)f_1(z_i,z_j) - 2D_1X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i,z_j) = -a_1,$$
$$2D_2X_3(z_i)f_1(z_i,z_j) + 2D_1X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i,z_j) = a_1 - 2b_2,$$
$$2D_2X_3(z_j)f_2(z_i,z_j) - 2D_1X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i,z_j) = -a_1,$$
$$2D_2X_3(z_j)f_2(z_i,z_j) + 2D_1X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i,z_j) = -2b_2 + a_1,$$

где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 = \mathrm{const}$.

Из этих равенств вытекает:

$$f_1(z_i,z_j) = f_1(z_i),\ f_2(z_i,z_j) = f_2(z_j),$$
$$D_1(f_1)(z_i,z_j) = D_1(f_1)(z_i),\ D_1(f_2)(z_i,z_j) = D_1(f_2)(z_j),$$
$$D_{1,1}(f_1)(z_i,z_j) = D_{1,1}(f_1)(z_i),\ D_{1,1}(f_2)(z_i,z_j) = D_{1,1}(f_2)(z_j).$$

Тогда в предыдущей системе можно провести разделение переменных:

$$D_1X_3(z_i)f_1(z_i) = D_1X_3(z_j)f_2(z_j) = -b_1/2,$$
$$D_2X_3(z_i)f_1(z_i) = D_2X_3(z_j)f_2(z_j) = -b_2/2,$$
$$D_1X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i) = D_1X_3(z_j)D_1(f_2)(z_j) = (a_1 - b_2)/2,$$
$$D_2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i) = D_2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_j) = (a_2 - b_3)/2,$$
$$D_1X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i) + D_1X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_j) = a_2,$$
$$D_2X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i) = D_2X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_j) = a_3/2,$$

Из последней системы следует:

$$f_1(z_i) = p\varphi(z_i),\ D_1(f_1)(z_i) = q\varphi(z_i),\ D_{1,1}(f_1)(z_i) = r\varphi(z_i),$$
$$f_2(z_j) = p\varphi(z_j),\ D_1(f_2)(z_j) = q\varphi(z_j),\ D_{1,1}(f_2)(z_j) = r\varphi(z_j),$$

где введены сокращающие обозначения: $\varphi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{(D_1X_3(z))^2 + (D_2X_3(z))^2}} \neq 0$, $p = -\sqrt{b_1^2 + b_2^2}/2$, $q = \sqrt{(a_1 - b_2)^2 + (a_2 - b_3)^2}/2$, $r = \sqrt{4a_2^2 + a_3^2}/2$. Тогда будем иметь:

$$F_1 = \varphi(z_i)(p + q\theta + r\theta^2) \neq 0,\ F_2 = \varphi(z_j)(p + q\theta + r\theta^2) \neq 0. \tag{55}$$

Далее учитываем лемму 4, из которой следует, что $(D_1(X_3))^2 + (D_2(X_3))^2 \neq 0$. Поэтому выражения (55) примут вид:

$$\varphi(z_i)(p + q\theta + r\theta^2) = \frac{\partial\chi}{\partial z_i}/\frac{\partial\chi}{\partial\theta},\ \varphi(z_j)(p + q\theta + r\theta^2) = \frac{\partial\chi}{\partial z_j}/\frac{\partial\chi}{\partial\theta}. \tag{56}$$

Приводя к общему знаменателю, приходим к уравнениям:

$$(p + q\theta + r\theta^2)\frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \frac{1}{\varphi(z_i)}\frac{\partial\chi}{\partial z_i} = 0,\ (p + q\theta + r\theta^2)\frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \frac{1}{\varphi(z_j)}\frac{\partial\chi}{\partial z_j} = 0.$$

Получена система уравнения, ранее решенная в лемме 1. Применяя эту лемму, учитывая явное выражение (1) для аргумента θ, после чего вводим новые координаты. Тогда для функции f будем иметь:

для (25): $\overline{x} = px$, $\overline{y} = y$, $\overline{z} = K(z)$,

$$f = \overline{\psi}(\overline{\theta} + \overline{z}_i + \overline{z}_j),\ p \neq 0,\ \overline{\psi}(u) = \psi(u),$$

для (26): $\overline{x} = x$, $\overline{y} = px + qy$, $\overline{z} = qK(z)$,

$$f = \overline{\psi}(\ln\overline{\theta} + \overline{z}_i + \overline{z}_j),\ \overline{\psi}(u) = \psi(qu),$$

для (27): $\overline{y} = -2x$, $\overline{x} = qx + 2ry$, $\overline{z} = K(z)$,

$$f = \overline{\psi}(\overline{\theta} + \overline{z}_i + \overline{z}_j),\ \overline{\psi}(u) = \psi(u),$$

для (28): $\overline{x} = 2ry + (q + \sqrt{q^2 - 4pr})x$, $\overline{y} = 2ry + (q - \sqrt{q^2 - 4pr})x$, $\overline{z} = K(z)$,

$$f = \overline{\psi}(\ln\overline{\theta} + \overline{z}_i + \overline{z}_j),\ \overline{\psi}(u) = \psi(u),$$

для (29): $\overline{x} = 2rx$, $\overline{y} = (2qx + 4ry)/\sqrt{4pr - q^2}$, $\overline{z} = \sqrt{4pr - q^2}K(z)/2$,

$$f = \overline{\psi}(\mathrm{arctg}\overline{\theta} + \overline{z}_i + \overline{z}_j),\ \overline{\psi}(u) = \psi(\sqrt{4pr - q^2}u/2),$$

где $\overline{\theta} = \dfrac{\overline{y}_i - \overline{y}_j}{\overline{x}_i - \overline{x}_i}$. Далее переходя к прежним обозначениям координат, получаем функции (20), (21) и (10).

II. Теперь, как и в первой части, разложения (18) и (54) подставляем в тождество (50) и сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных x_i, y_i, x_j, y_j, а также перед степенями $e^{-\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}$, $e^{n\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Заметим, что выражения $e^{-\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}$, $e^{n\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}$, входящие в тождество (50), в окрестности нуля в ряд Тейлора не разлагаются, поэтому коэффициенты перед ними обращаются в нуль. Задача перебора коэффициентов существенно упрощается с применением математического пакета программ MAPLE 15 [16].

Сначала сравниваем коэффициенты перед степенями $e^{-\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}$, $e^{n\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}$ и приравниваем их к нулю, где $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_i)\overline{F_1}(z_i, z_j) = 0,\ D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_j)\overline{F_2}(z_i, z_j) = 0,$$

причем $\alpha_n = 1, 2$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$,

$$\overline{F_1} = (f_1, D_{1,1}(f_1), D_{1,1,1}(f_1), D_{1,1,1,1}(f_1), \ldots),$$

$$\overline{F_2} = (f_2, D_{1,1}(f_2), D_{1,1,1}(f_2), D_{1,1,1,1}(f_2), \ldots).$$

По лемме 4, будем иметь $\overline{F_1} = \overline{F_2} = 0$. Тогда

$$F_1 = D_1(f_1)(z_i, z_j)\theta \neq 0,\ F_2 = D_1(f_2)(z_i, z_j)\theta \neq 0,$$

следовательно

$$D_1(f_1)(z_i, z_j) \neq 0,\ D_1(f_2)(z_i, z_j) \neq 0.$$

Далее сравниваем все коэффициенты со степенями выше 3 при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j, получаем

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0,\ D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = 0,$$

причем $\alpha_n = 1, 2$, $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ Из предыдущих равенств тогда будет следовать:

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3) = 0,\ D_{\beta_1,\beta_2,\ldots}(X_1) = 0,\ D_{\beta_1,\beta_2,\ldots}(X_2) = 0,$$

где $\alpha_n, \beta_m = 1, 2$, $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, $m = 3, 4, 5, 6, \ldots$

Сравниваем коэффициенты перед степенями 1 и разделяем переменные:

$$X_1(z) = c = \mathrm{const},\ X_2(z) = d = \mathrm{const}.$$

Теперь сравниваем коэффициенты перед степенями 2, затем комбинируем уравнения с разделением переменных:

$$D_1(X_2) = b = \mathrm{const},\ D_2(X_1) = 0,\ D_1(X_1) = a = \mathrm{const},\ D_2(X_2) = a,$$

$$X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) + X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -2a - b.$$

И, наконец, сравниваем коэффициенты со степенями 3 при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j, затем комбинируем и разделяем переменные:

$$D_{1,1}X_1 = a_1,\ D_{1,2}X_1 = 0,\ D_{2,2}X_1 = 0,$$

$$D_{1,1}X_2 = a_2,\ D_{1,2}X_2 = a_1,\ D_{2,2}X_2 = 0,$$

$$D_1X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = -a_1 - a_2/2,\ D_1X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -a_1 - a_2/2,$$

$$D_2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = -a_1/2,\ D_2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -a_1/2,$$

где $a_1, a_2 = \mathrm{const}$.

Из последней системы равенств следует:

$$D_1(f_1)(z_i) = q\varphi(z_i),\ D_1(f_2)(z_j) = q\varphi(z_j),$$

где введены сокращающие обозначения: $\varphi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{(D_1X_3(z))^2 + (D_2X_3(z))^2}} \neq 0$, $q = \pm\sqrt{(a_1)^2 + (2a_1 + a_2)^2}/2$. Тогда будем иметь:

$$F_1 = \varphi(z_i)q\theta \neq 0,\ F_2 = \varphi(z_j)q\theta \neq 0. \tag{57}$$

Далее учитываем лемму 4, из которой следует, что $(D_1(X_3))^2 + (D_2(X_3))^2 \neq 0$. Тогда выражения (57) примут вид:

$$\varphi(z_i)q\theta = \frac{\partial\chi}{\partial z_i}/\frac{\partial\chi}{\partial\theta},\ \varphi(z_j)q\theta = \frac{\partial\chi}{\partial z_j}/\frac{\partial\chi}{\partial\theta}. \tag{58}$$

Приводя к общему знаменателю, приходим к уравнениям:

$$q\theta\frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \frac{1}{\varphi(z_i)}\frac{\partial\chi}{\partial z_i} = 0,\ q\theta\frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \frac{1}{\varphi(z_j)}\frac{\partial\chi}{\partial z_j} = 0.$$

Получена система уравнения, решение которой находим по лемме 1 при $p = r = 0$. Затем учитываем явное выражение (2) для аргументы θ, после чего вводим новые координаты, потом записываем явное выражение для функции f:

$$f = \overline{\psi}(\ln\theta + \overline{z}_i + \overline{z}_j),\ \overline{\psi}(u) = \psi(u/q),\ \overline{z} = qK(z),$$

где аргумент θ задается выражением (2). Далее переходя к преждним обозначениям координат, получаем функцию (23), задающую геометрию максимальной подвижности.

III. Разложения (18) и (54) подставляем в (51) и сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных x_i, y_i, x_j, y_j, а также перед степенями $e^{-2\gamma\mathrm{arctg}\dfrac{y_i-y_j}{x_i-x_j}}$, $e^{n2\gamma\mathrm{arctg}\dfrac{y_i-y_j}{x_i-x_j}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Заметим, что выражения $e^{-2\gamma\mathrm{arctg}\dfrac{y_i-y_j}{x_i-x_j}}$, $e^{n2\gamma\mathrm{arctg}\dfrac{y_i-y_j}{x_i-x_j}}$, входящие в тождество (51), в окрестности нуля в ряд Тейлора не разлагаются, поэтому коэффициенты перед ними обращаются в нуль. Как и выше, задача перебора коэффициентов, существенно упрощается с применением математического пакета программ MAPLE 15 [16].

Сравнивая коэффициенты перед $e^{-2\gamma\mathrm{arctg}\dfrac{y_i-y_j}{x_i-x_j}}$ и $e^{n2\gamma\mathrm{arctg}\dfrac{y_i-y_j}{x_i-x_j}}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, имеем

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_i)\overline{F_1}(z_i, z_j) = 0,\ D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_j)\overline{F_2}(z_i, z_j) = 0,$$

причем $\alpha_n = 1, 2$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$,

$$\overline{F_1} = (f_1, D_{1,1}(f_1), D_{1,1,1}(f_1), D_{1,1,1,1}(f_1), \ldots),$$
$$\overline{F_2} = (f_2, D_{1,1}(f_2), D_{1,1,1}(f_2), D_{1,1,1,1}(f_2), \ldots).$$

Поэтому из леммы 4 следует $\overline{F_1} = \overline{F_2} = 0$. Значит

$$D_1(f_1)(z_i, z_j) \neq 0,\ D_1(f_2)(z_i, z_j) \neq 0.$$

Далее поступаем как и выше, сравнивая коэффициенты при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j, затем комбинируя и разделяя переменные, имеем:

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3) = 0,\ D_{\beta_1,\beta_2,\ldots}(X_1) = 0,\ D_{\beta_1,\beta_2,\ldots}(X_2) = 0,$$
$$D_{1,1}X_1 = a_1,\ D_{1,2}X_1 = -b_1,\ D_{2,2}X_1 = -a_1,$$
$$D_{1,1}X_2 = b_1,\ D_{1,2}X_2 = a_1,\ D_{2,2}X_2 = -b_1,$$
$$D_1X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = D_1X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -(\gamma b_1 + a_1)/2,$$
$$D_2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = D_2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = (b_1 - \gamma a_1)/2,$$

где $\alpha_n, \beta_m = 1, 2$, $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, $m = 3, 4, 5, 6, \ldots$, $a_1, a_2 = \mathrm{const}$.

Из последней системы следует:

$$D_1(f_1)(z_i) = q\varphi(z_i),\ D_1(f_2)(z_j) = q\varphi(z_j),$$

где введены сокращающие обозначения: $\varphi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{(D_1X_3(z))^2 + (D_2X_3(z))^2}} \neq 0$, $q = \pm\sqrt{(a_1 + \gamma b_1)^2 + (b_1 - \gamma a_1)^2}/2 \neq 0$. Тогда, как и выше, будем иметь систему уравнений (58), решением которой является функция:

$$f = \overline{\psi}(\ln\theta + \overline{z}_i + \overline{z}_j),\ \overline{z} = qK(z),\ \overline{\psi}(u) = \psi(u/q),$$

причем аргумент θ имеет явное выражение (3). Далее переходя к прежним обозначениям координат, получаем функцию (24).

IV. И, наконец, разложения (18) и (54) подставляем в (52) и сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных x_i, y_i, x_j, y_j, а также перед степенями $\dfrac{x_i - x_j}{(y_i - y_j)^\beta}$, $\dfrac{(y_i - y_j)^{n\beta}}{(x_i - x_j)^n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Выражения $\dfrac{x_i - x_j}{(y_i - y_j)^\beta}$, $\dfrac{(y_i - y_j)^{n\beta}}{(x_i - x_j)^n}$, входящие в тождество (52), в окрестности нуля в ряд Тейлора не разлагаются, поэтому коэффициенты перед ними обращаются в нуль.

Сравнивая коэффициенты перед $\dfrac{x_i - x_j}{(y_i - y_j)^\beta}$ и $\dfrac{(y_i - y_j)^{n\beta}}{(x_i - x_j)^n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, имеем

$$\overline{F_1} = (f_1, D_{1,1}(f_1), D_{1,1,1}(f_1), D_{1,1,1,1}(f_1), \ldots) = 0,$$
$$\overline{F_2} = (f_2, D_{1,1}(f_2), D_{1,1,1}(f_2), D_{1,1,1,1}(f_2), \ldots) = 0.$$

Значит

$$D_1(f_1)(z_i, z_j) \neq 0,\ D_1(f_2)(z_i, z_j) \neq 0.$$

Далее, сравниваем коэффициенты при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j, затем комбинируем и разделяем переменные:

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3) = 0,\ D_{\beta_1,\beta_2,\ldots}(X_1) = 0,\ D_{\beta_1,\beta_2,\ldots}(X_2) = 0,$$
$$D_{1,1}X_1 = a_1,\ D_{1,2}X_1 = 0,\ D_{2,2}X_1 = 0,\ D_{1,1}X_2 = 0,\ D_{1,2}X_2 = 0,\ D_{2,2}X_2 = a_2,$$
$$D_1X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = D_1X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = a_1/2,$$
$$D_2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = D_2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -\beta a_2/2,$$

где $\alpha_n, \beta_m = 1, 2$, $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, $m = 3, 4, 5, 6, \ldots$, $a_1, a_2 = \mathrm{const}$.

Из последней системы следует:

$$D_1(f_1)(z_i) = q\varphi(z_i),\ D_1(f_2)(z_j) = q\varphi(z_j),$$

где введены сокращающие обозначения: $\varphi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{(D_1X_3(z))^2 + (D_2X_3(z))^2}} \neq 0$, $q = \pm\sqrt{(a_1^2 + (\beta a_2)^2}/2 \neq 0$. Тогда, как и выше, справедлива система уравнений (58), решением которой является функция:

$$f = \overline{\psi}(\ln\theta + \overline{z}_i + \overline{z}_j),\ \overline{z} = qK(z),\ \overline{\psi}(u) = \psi(u/q),$$

где аргумент θ имеет явное выражение (4). Потом переходя к прежним обозначениям координат, получаем (25). Теорема 1 полностью доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Подробно вычислим базисные операторы (35), (37) и (40). Операторы (36), (38) и (39) уже вычислены в работе [15]. Все вычисления ведутся в окрестности $U(i) \times U(j)$, а базисные операторы записываются в подходящей системе координат окрестности $U(i)$.

I. Согласно критерию локальной инвариантности (17) записывается функциональное уравнение на операторы алгебры Ли группы движений с двухточечным инвариантом (20):

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) - (y_i - y_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \\ +(x_i - x_j)^2(X_3(i) + X_3(j)) = 0. \end{array} \right. \tag{59}$$

Дифференцируем данное уравнение по x_i, y_i, z_i, а результаты — по x_j, y_j, z_j:

$$-X'_{2x}(j) - X'_{2x}(i) + 2(x_i - x_j)(X'_{3x}(j) - X'_{3x}(i)) - 2(X_3(i) + X_3(j)) = 0,$$
$$-X'_{2y}(j) + X'_{1x}(i) + 2(x_i - x_j)X'_{3y}(j) = 0,$$
$$-X'_{2z}(j) + 2(x_i - x_j)X'_{3z}(j) = 0,\ -X'_{2z}(i) - 2(x_i - x_j)X'_{3z}(i) = 0,$$
$$-X'_{2y}(i) + X'_{1x}(j) - 2(x_i - x_j)X'_{3y}(i) = 0,\ X'_{1y}(i) + X'_{1y}(j) = 0,$$
$$X'_{1z}(j) = 0,\ X'_{1z}(i) = 0.$$

В полученной системе дифференцируем, разделяем переменные, а затем интегрируем:

$$X_1 = -ax^2 + cx + d,\ X_2 = -2axy - mx^2 + cy - 2nx + l,\ X_3 = ay + mx + n.$$

Несложно установить, что полученные выражения обращают равенство (59) в тождество. Далее постоянным a, b, c, d, m, n придавая значений 0 и 1, приходит к базисным операторам (35).

II. По критению локальной инвариантности (17) записывается функциональное уравнение на операторы алгебры Ли группы движений с функцией (22):

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) - (y_i - y_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \\ +[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2](X_3(i) + X_3(j)) = 0. \end{array} \right. \tag{60}$$

Дифференцируем данное уравнение по x_i, y_i, z_i, а результаты — по x_j, y_j, z_j:

$$-X'_{2x}(j) - X'_{2x}(i) + 2(x_i - x_j)(X'_{3x}(j) - X'_{3x}(i)) - 2(X_3(i) + X_3(j)) = 0,$$
$$-X'_{2y}(j) + X'_{1x}(i) - 2(y_i - y_j)X'_{3x}(i) + 2(x_i - x_j)X'_{3y}(j) = 0,$$
$$-X'_{2z}(j) + 2(x_i - x_j)X'_{3z}(j) = 0,\ -X'_{2z}(i) - 2(x_i - x_j)X'_{3z}(i) = 0,$$
$$-X'_{2y}(i) + X'_{1x}(j) - 2(x_i - x_j)X'_{3y}(i) + 2(y_i - y_j)X'_{3x}(j)) = 0,$$
$$X'_{1y}(i) + X'_{1y}(j) + 2(y_i - y_j)(X'_{3y}(j) - X'_{3y}(i)) - 2(X_3(i) + X_3(j)) = 0,$$
$$X'_{1z}(j) + 2(y_i - y_j)X'_{3z}(j)) = 0,\ X'_{1z}(i) - 2(y_i - y_j)X'_{3z}(i) = 0.$$

Полученную систему дифференцируем по координатам точек i и j, а затем разделяем переменные:

$$X_{1z} = X_{2z} = X_{3z} = 0,\ X'_{3xx} = X'_{3yy} = X'_{3xy} = 0,\ X_3 = ax + by + c,$$
$$X'_{1x} = 2ay - 2bx + d,\ X'_{1y} = 2ax + 2by + 2c,$$
$$X'_{2x} = -2ax - 2by - 2c,\ X'_{2y} = 2ay - 2bx + d,$$

где $a, b, c, d, m, n = \mathrm{const}$. Интегрируя найденное, получаем

$$X_1 = 2axy - b(x^2 - y^2) + dx + 2cy + m,$$
$$X_2 = -2bxy - a(x^2 - y^2) - 2cx + dy + n,\ X_3 = ax + by + c.$$

Найденные выражения обращают равенство (60) в тождество. Далее постоянным a, b, c, d, m, n придавая значений 0 и 1, приходим базисным операторам (37).

III. Критений локальной инвариантности (17) приводит к функциональному уравнению на операторы для алгебры Ли группы движений с двухточечным инвариантом (25):

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta(x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) - (y_i - y_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \\ +(x_i - x_j)(y_i - y_j)(X_3(i) + X_3(j)) = 0. \end{array} \right. \tag{61}$$

Далее как и выше, дифференцируем уравнение (61) по x_i, y_i, z_i, а результаты — по x_j, y_j, z_j:

$$-\beta(X'_{2x}(i) + X'_{2x}(j)) + (y_i - y_j)(X'_{3x}(j) - X'_{3x}(i)) = 0,$$

$$-\beta X'_{2y}(j) + X'_{1x}(i) + (y_i - y_j)X'_{3y}(j) - (x_i - x_j)X'_{3x}(i) - (X_3(i) + X_3(j)) = 0,$$

$$-\beta X'_{2z}(j) + (y_i - y_j)X'_{3z}(j) = 0,$$

$$-\beta X'_{2y}(i) + X'_{1x}(j) - (y_i - y_j)X'_{3y}(i) + (x_i - x_j)X'_{3x}(j) - (X_3(i) + X_3(j)) = 0,$$

$$X'_{1y}(i) + X'_{1y}(j) + (x_i - x_j)(X'_{3y}(j) - X'_{3y}(i)) = 0,$$

$$X'_{1z}(j) + (x_i - x_j)X'_{3z}(j) = 0.$$

Далее поступаем как и выше, получаем:

$$X_{1z} = X_{2z} = X_{3z} = 0,\ X'_{3xx} = X'_{3yy} = X'_{3xy} = 0,\ X_3 = ax + by + c,$$

$$X'_{1x} = -2ax + c + d,\ X'_{1y} = 0,\ X'_{2x} = 0,\ \beta X'_{2y} = -2by - c + d,$$

где $a, b, c, d, m, n = \mathrm{const}$. Интегрируя найденное, получаем

$$X_1 = -ax^2 + (c + d)x + m,\ X_2 = -by^2/\beta + (d - c)y/\beta + n,\ X_3 = ax + by + c.$$

Полученные выражения равенство (61) обращают в тождество. Далее, в предыдущих выражениях, постоянным a, b, c, d, m, n придавая значения 0, 1 и β, получаем базисные операторы (40). Теорема 2 доказана.

Заключение

Итак, выше поставленная задача об аналитическом вложении геометрий максимальной подвижности с метрическими функциями (1) — (4) полностью решена. В результате получились трехмерные геометрии максимальной подвижности с функциями (20) — (25). Оказалось, что функция (22) трехмерной симплициальной геометрии третьего типа не содержится в классификации В.Х. Лева [17], которая, построена совершенно другим методом и *ранее считалась полной.* В работе также найдены базисные операторы (35) — (40) алгебр Ли групп движений этих геометрий.

Аналогично можно поставить и решить задачу об аналитическом вложении пространства со скалярным произведением, то есть найти все функции вида:

$$f(i, j) = f(x_i y_j + y_i y_j + z_i z_j, w_i, w_j),$$

являющиеся двухточечными инвариантами группы преобразований размерности три. Задачу о вложении можно также поставить и для трехмерной геометрии, то есть когда функции четырехменых геометрий ищутся в виде:

$$f = \chi(g(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j), w_i, w_j),$$

где g — метрические функции известных трехмерных геометрий.

Также можно поставить задачу вложения для геометрий двух множеств, одна из которых решена в работах [18, 19].

Выражаю благодарность профессору Михайличенко Геннадию Григорьевичу за обсуждение полученных результатов.

References

[1] G.G. Mikhailichenko, *The mathematical basics and results of the theory of physical structures*, https://arxiv.org/pdf/1602.02795, 2012.

[2] G.G. Mikhailichenko, *Two-dimensional geometry*, Soviet Math. Doklady, **24**:2 (1981), 346–348. MR0631804

[3] H. Helmholz, *Uber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen*, Nachr. Konigl.Ges. Wiss. und Georg-Augusts-Univ. Gottingen, 1868, 19.

[4] V.A. Kyrov, *Functional equations in pseudo-Euclidean geometry*, Sib. Zn. Ind. Mat, **13**:4 (2010), 38–51. (in Russian). MR2841212

[5] V.A. Kyrov, G.G. Mikhailichenko, *An analytic method for the embedding of the Euclidean and pseudo-Euclidean geometries*, Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk, **23**:2 (2017), 167–181 (in Russian).

[6] V.A. Kyrov, *Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений*, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, **26**:1 (2012), 31–38 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu986

[7] V.A. Kyrov, G.G. Mikhailichenko, *The analytic method of embedding symplectic geometry*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 657—672 (in Russian). Zbl 1372.53081

[8] V.A. Kyrov, *The analytical method for embedding multidimensional pseudo-Euclidean geometries*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 741—758 (in Russian). Zbl 1396.53024

[9] G.G. Mikhailichenko, *On group and phenomenological symmetry in geometry*, Siberian Mathematical Journal, **25**:5 (1984), 99–113. MR0762243

[10] L.V. Ovsyannikov, *A group analysis of differential equation*, Nauka, M., 1978. MR0511921

[11] V.A. Kyrov, *The geometry of Helmgolz*, LAP, Saarbrucken, 2011.

[12] G.M. Fichtengolz, *A course of differential and integral calculus. T. 2*, M.: Phismhatgis, 1963.

[13] L.E. Elsgoltz, *Differential equations and calculus of variations*, M.: Nauka, 1969.

[14] V.A. Kyrov, R.A. Bogdanova *The groups of motions of some three-dimensional maximal mobility geometries*, Siberian Mathematical Journal, **59**:2 (2018), 323–331 (in Russian). Zbl 1406.51014

[15] V.A. Kyrov, *Six-dimensional lie algebras of groups of motions of Tree-dimensional phenomenologically symmetric geometries*, Polymetric geometries, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 2001, 116–143.

[16] V. Dyakonov, *Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations*, M.: DMS, 2014.

[17] V.H. Lev, *Three-dimensional geometries in the theory of physical structures*, Vychisl. Sistemy, **125** (1988), 90–103. (in Russian). MR1002931

[18] V.A. Kyrov, *Embedding of phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank* $(N, 2)$ *into phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank* $(N + 1, 2)$, Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, **26**:3 (2016), 312–323 (in Russian). Zbl 1367.51009

[19] V.A. Kyrov, *Embedding of phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank* (N, M) *into phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank* $(N + 1, M)$, Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, **27**:1 (2017), 42–53 (in Russian). Zbl 1376.51005

Vladimir Alexandrovich Kyrov
Gorno-Altaiisk State University,
1, Lenkina str.,
Gorno-Altaisk, 649000, Russia
E-mail address: kyrovVA@yandex.ru