S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 938–948 (2019) УДК 517.518
DOI 10.33048/semi.2019.16.062 MSC 43A80

ГИПЕРПРОСТРАНСТВА, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ УСЛОВИЮ *cc*-ОДНОРОДНОГО КОНУСА, НА КАНОНИЧЕСКИХ ГРУППАХ ГЕЙЗЕНБЕРГА И ЭНГЕЛЯ

А.В. ГРЕШНОВ

Abstract. We get a new proof that hyperspace $\{(x, y, t) \mid t > 0\}$ of canonical Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ satisfies inner and outer continuously deformable *cc*-homogeneous cone conditions and *cc*-uniformity condition. By means of that we prove that hyperspace $\{(x, y, t, z) \mid t > 0\}$ of canonical Engel group $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ satisfies inner and outer continuously deformable *cc*-homogeneous cone conditions.

Keywords: Carnot-Carathéodory metric, *cc*-homogeneous cone, Heisenberg group, Engel group, inner cone, outer cone, *cc*-uniform domain, hyperspace.

1. Введение

Рассмотрим некоторую гиперплоскость $A_1x_1+\ldots+A_nx_n+D = 0$ в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем неограниченные множества вида

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid A_1x_1+\ldots+A_nx_n+D > 0\},\ \{(x_1, \ldots, x_n) \mid A_1x_1+\ldots+A_nx_n+D < 0\}$$

мы будем называть гиперпространствами.

Каноническая одномерная группа Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ определяется в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с системой координат (x, y, t), индуцированной координатным репером (O, e_1, e_2, e_3) (здесь e_1, e_2, e_3 — стандартные орты

Greshnov, A.V., Hyperspaces that satisfy *cc*-homogeneous cone condition on canonical Heisenberg and Engel groups.

Публикация выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Проект № 1.3087.2017/4.6) .

Поступила 23 мая 2019 г., опубликована 28 июня 2019 г.

$\mathbb{R}^3$), при помощи таблицы коммутаторов

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = \alpha e_3, & \alpha > 0, \\ [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Используя формулу Кэмпбелла — Хаусдорфа, при помощи (1) мы получаем аналитическую запись операции левого сдвига произвольного элемента $w' = (x', y', t') \in \mathbb{H}^1$ на произвольный элемент $w = (x, y, t) \in \mathbb{H}^1$:

$$L_w w' = w \cdot w' = \Big(x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y)\Big). \tag{2}$$

Используя (2), мы получаем выражения для базисных левоинвариантных векторных полей группы $\mathbb{H}^1$ в любой точке (x, y, t):

$$X = (1, 0, -\frac{\alpha}{2}y) = e_1 - \frac{\alpha y}{2} \cdot e_3, \quad Y = (0, 1, \frac{\alpha}{2}x) = e_2 + \frac{\alpha x}{2} \cdot e_3, \quad T = (0, 0, 1) = e_3.$$

Каноническая группа Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ определяется в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ с системой координат (x, y, t, z), индуцированной координатным репером (O, e_1, e_2, e_3, e_4) (здесь e_1, e_2, e_3, e_4 — стандартные орты $\mathbb{R}^4$), при помощи таблицы коммутаторов

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = \alpha e_3, & \alpha > 0, \\ [e_1, e_3] = \beta e_4, & \beta > 0; \end{cases} \tag{3}$$

все остальные возможные коммутаторы e_1, e_2, e_3, e_4 равны 0. Пусть $v = (x, y, t, z)$, $w' = (x', y', t', z')$. Тогда, используя формулу Кэмпбелла — Хаусдорфа, при помощи (3) мы получаем мы получаем аналитическую запись операции левого сдвига произвольного элемента $w' = (x', y', t', z') \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ на произвольный элемент $w = (x, y, t, z) \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$:

$$\begin{aligned} L_w w' = w \cdot w' = \Big(&x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y), \\ &z + z' + \frac{\beta}{2}(xt' - x't) + \frac{\alpha\beta}{12}(x - x')(xy' - x'y)\Big). \end{aligned} \tag{4}$$

Используя (4), мы получаем выражения для базисных левоинвариантных векторных полей группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ в любой точке (x, y, t, z):

$$\begin{gathered} X = (1, 0, -\frac{\alpha}{2}y, -\frac{\beta t}{2} - \frac{\alpha\beta xy}{12}) = e_1 - \frac{\alpha y}{2} \cdot e_3 - (\frac{\beta t}{2} + \frac{\alpha\beta xy}{12}) \cdot e_4, \\ Y = (0, 1, \frac{\alpha x}{2}, \frac{\alpha\beta x^2}{12}) = e_2 + \frac{\alpha x}{2} \cdot e_3 + \frac{\alpha\beta x^2}{12} \cdot e_4, \\ T = (0, 0, 1, \frac{\beta x}{2}) = e_3 + \frac{\beta x}{2} \cdot e_4, \quad Z = e_4. \end{gathered}$$

Несложно видеть, что между каноническими группами $\mathbb{H}^1$ и $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ существует взаимосвязь.

Канонические группы (по-другому, группалгебы [1]) Гейзенберга и Энгеля являются частными случаями канонических групп Карно, см., например, [2, 3]; здесь мы не будем приводить определение групп Карно, все необходимые сведения по этому вопросу (в том числе и о метрике Карно — Каратеодори) читатель может найти, например, в книге [4].

Расстояние Карно — Каратеодори $d_{cc}(u,v)$ между двумя произвольными точками u,v как группы $\mathbb{H}^1$, так и группы $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, определяется как точная нижняя грань длин $l(\gamma)$ всех абсолютно непрерывных горизонтальных путей $\gamma=\gamma(s)$, определенных на некотором отрезке $[0,s_0]$, соединяющих точки u,v, т. е. таких, что $u=\gamma(0)$, $v=\gamma(s_0)$,

$$\dot\gamma(s)=\alpha(s)X(\gamma(s))+\beta(s)Y(\gamma(s))\quad \text{п. в. } s\in[0,s_0],$$

где $\alpha(s),\beta(s)$ — некоторые интегрируемые функции. Длина кривой здесь определяется при помощи стандартной формы скалярного произведения, индуцированного базисными левоинвариантными векторными полями рассматриваемой канонической группы. В дальнейшем символом $B_{cc}(x,r)$ мы будем обозначать открытый шар в метрике Карно — Каратеодори с центром в точке x радиуса r, символом $S_{cc}(x,r)$ — сферу в метрике Карно — Каратеодори с центром в точке x радиуса r ($S_{cc}(x,r)=\partial B_{cc}(x,r)$).

На любой группе Карно определена однопараметрическая подгруппа растяжений (дилатаций) δ_ε, $\varepsilon>0$, которая для $\mathbb{H}^1$ определяется как

$$\delta_\varepsilon(x,y,t)=(\varepsilon x,\varepsilon y,\varepsilon^2 t),$$

для $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ — как

$$\delta_\varepsilon(x,y,t,z)=(\varepsilon x,\varepsilon y,\varepsilon^2 t,\varepsilon^3 z).$$

Известно, что метрика Карно — Каратеодори инвариантна относительно действий δ_ε и левых сдвигов, т. е.

$$d_{cc}(\delta_\varepsilon u,\delta_\varepsilon v)=\varepsilon d_{cc}(u,v),\quad d_{cc}(L_u v,L_u w)=d_{cc}(v,w).$$

В ряде случаев полезно использовать билипшицево эквивалентную d_{cc} квазиметрику, например, Box-квазиметрику, см., например, [3].

В настоящей работе мы изучаем вопросы, связанные с задачей о существовании областей, удовлетворяющих условиям внутреннего и внешнего cc-однородных конусов на $\mathbb{H}^1$ и $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$. Эти области имеют важное значение для теории квазиконформных отображений и пространств Соболева, см., например, [2, 6, 7], в гармоническом анализе, см., например, [5, 8, 9].

В дальнейшем символом O (в зависимости от контекста) мы обозначаем начало координат соответствующего рассмотрению евклидова пространства. Отметим, что O является единичным элементом любой канонической группы Карно: $L_O u=u$.

Определение 1 (ср. с [5]). *Множество*

$$K_\infty(M,X,r)=\bigcup_{\varepsilon\ge 0} M\cdot\delta_\varepsilon B_{cc}(X,r),\quad d_{cc}(O,X)=1>r,$$

группы Карно будем называть cc-однородным конусом с вершиной в точке M, осью $M\cdot\delta_\varepsilon X$ и раствором r. Множество

$$K_{\varepsilon_0}(M,X,r)=\bigcup_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]} M\cdot\delta_\varepsilon B_{cc}(X,r),\quad d_{cc}(O,X)=1>r,$$

будем называть усеченным cc-однородным конусом с вершиной в точке M, осью $M\cdot\delta_\varepsilon X$ и раствором r.

Определение 2 (ср. с [5]). *Говорим, что неограниченная область $\mathcal{D}$ группы Карно удовлетворяет условию внутреннего cc-однородного конуса, если существует r такое, что для каждой точки $M \in \partial\mathcal{D}$ найдется cc-однородный конус $K_\infty(M, X, r)$, $X = X(M)$, такой, что $\big(K_\infty(M, X, r) \setminus M\big) \subset \mathcal{D}$, где r не зависит от выбора M.*

Аналогично определению 2 определяется понятие ограниченной области, удовлетворяющей условию *cc*-внутреннего однородного конуса, однако в таком определении мы должны рассматривать усеченные конуса с фиксированным параметром ε_0 (ср. с [5]). Условие внешнего *cc*-однородного конуса для области $\mathcal{D}$ — это условие *cc*-однородного конуса для внешней к $\mathcal{D}$ области (в ряде задач при определении области, удовлетворяющей условию внешнего *cc*-однородного конуса, достаточно ограничиться усеченными конусами).

Кривую вида

$$M \cdot \delta_\varepsilon X, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0),\ \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+,$$

где M — некоторая точка группы Карно, X — некоторая точка группы Карно такая, что $d_{cc}(O, X) = 1$, мы будем называть дилатацией.

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая область группы Карно. Каждому $M \in \mathcal{M}$ сопоставим некоторое множество $\mathcal{X}_M \subset S_{cc}(O, 1)$. Обозначим $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_M\}$. Введем в рассмотрение совокупность дилатаций

$$\Gamma_{\mathcal{M},\mathcal{X}} = \{M \cdot \delta_\varepsilon X \mid M \in \mathcal{M},\ X \in \mathcal{X}_M, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0),\ \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+\}. \tag{5}$$

Говорим, что дилатации $M_i \cdot \delta_\varepsilon X_i \in \Gamma_{\mathcal{M},\mathcal{X}}$, $i = 1, 2$, можно непрерывно деформировать друг в друга в семействе дилатаций $\Gamma_{\mathcal{M},\mathcal{X}}$, если найдется кривая

$$M(s) : [s_1, s_2] \to \mathcal{M}, \quad M(s_i) = M_i,\ i = 1, 2,$$

(вырожденная в случае $M_1 = M_2$) такая, что **найдется** множество

$$\lambda(s) = \bigcup_{s \in [s_1, s_2]} X(s), \quad M(s) \cdot \delta_\varepsilon X(s) \in \Gamma_{\mathcal{M},\mathcal{X}}\ \forall s \in [s_1, s_2],$$

представляющее из себя кривую

$$\lambda(s) : [s_1, s_2] \to \bigcup_M \mathcal{X}_M, \quad X(s_i) = X_i,\ i = 1, 2.$$

(Отметим, что $M(s)$ и $\lambda(s)$ могут определяться неединственным образом.) В этом случае каждую дилатацию $M(s) \cdot \delta_\varepsilon X(s)$ мы будем называть элементом деформации дилатаций $M_i \cdot \delta_\varepsilon X_i \in \Gamma_{\mathcal{M},\mathcal{X}}$, $i = 1, 2$.

Если любые две дилатации семейства $\Gamma_{\mathcal{M},\mathcal{X}}$ можно непрерывно деформировать друг в друга в $\Gamma_{\mathcal{M},\mathcal{X}}$, то говорим, что семейство дилатаций $\Gamma_{\mathcal{M},\mathcal{X}}$ обладает свойством непрерывной деформируемости.

Определение 3. *Если область $\mathcal{D}$ группы Карно удовлетворяет условию внутреннего cc-однородного конуса и при этом оси cc-однородных конусов области $\mathcal{D}$ образуют непрерывно деформируемое семейство, то говорим, что область $\mathcal{D}$ группы Карно удовлетворяет условию непрерывно деформируемого внутреннего cc-однородного конуса*

Определение 4 (ср. с [2, 5, 6, 7]). *Говорим, что область $\mathcal{D}$ группы Карно является cc-равномерной, если для каждой пары точек $x, y \in \mathcal{D}$ найдется* *абсолютно непрерывный горизонтальный путь* $\gamma = \gamma(s) \subset \mathcal{D}$, *определенный на* $[0, s_0]$, *соединяющий точки* x, y, *такой, что*

$$\begin{cases} l(\gamma) \leq a d_{cc}(x, y), \\ \min\{l(\gamma_{x,z}), l(\gamma_{y,z})\} \leq b d_{cc}(z, \partial\mathcal{D}), \end{cases}$$

где $z \in \gamma$ — *текущая точка,* $\gamma_{y,z}$ — *участок кривой* γ *от точки* y *до точки* z, $\gamma_{x,z}$ — *участок кривой* γ *от точки* x *до точки* z, *и константы* a, b *не зависят от выбора* $x, y \in \mathcal{D}$.

Главным результатом настоящей работы является доказательство того, что неограниченная область

$$\Pi^{t+}_{E_{\alpha,\beta}} = \{(x, y, t, z) \mid t > 0\} \subset \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$$

удовлетворяет условиям непрерывно деформируемых внутреннего (теорема 3) и внешнего (следствие 2) cc-однородных конусов.

Отметим, что из [2, Теорема 1] следует, что неограниченные области

$$\Pi^{x+}_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}} = \{(x, y, t, z) \mid x > 0\},\ \Pi^{y+}_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}} = \{(x, y, t, z) \mid y > 0\} \subset \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$$

являются cc-равномерными областями, а из вычислений, проделанных в [10, 3008–3009], следует, что неограниченная область

$$\Pi^{z+}_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}} = \{(x, y, t, z) \mid z > 0\} \subset \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$$

не удовлетворяет условию внутреннего cc-однородного конуса. При этом неограниченная область $\Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1}$ является cc-равномерной областью (см. [2, 5]).

Далее мы будем использовать следующие обозначения

$$\Pi^{t-}_{\mathbb{H}^1} = \{(x, y, t) \mid t < 0\}, \quad \Pi^{t-}_{E_{\alpha,\beta}} = \{(x, y, t, z) \mid t < 0\}.$$

Для произвольного множества A некоторого метрического пространства символом $[A]$ обозначаем его замыкание.

Для доказательств теоремы 3 и следствия 2 мы разработали новые методы доказательств (по сравнению с методами работы [2]) того, что гиперпространство $\Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1}$ удовлетворяет условию внутреннего cc-однородного конуса и является cc-равномерной областью. Суть методов работы [2] основывалась на использовании в качестве подходящих кривых ломаные, состоящие из отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей X, Y, что было оправдано тем, что такие отрезки с геометрической точки зрения действительно являются обычными с точки зрения евклидовой геометрии отрезками. Однако на канонической группе Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ таких свойств нет, что делает технически трудным прямолинейное обобщение доказательств из [2].

Следует отметить, что в работе [9] доказано, что любая область произвольной 2-ступенчатой группы Карно (к таковым относится $\mathbb{H}^1$) с достаточно гладкой в обычном смысле границей является cc-равномерной, в частности, cc-равномерной является и область $\Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1}$. В отличие от [9], наши построения подходящих горизонтальных путей, удовлетворяющих условиям равномерности, основаны на том, что оси внутренних и внешних cc-однородных конусов образуют непрерывно деформируемые семейства, и не используют цепочки Гарнака. Также отметим, что наши методы основаны на геометрических свойствах канонических групп $\mathbb{H}^1$, $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, и отличаются от методов работы [10].

Мы уверены, что, используя методы настоящей работы, возможно доказать, что гиперпространство $\Pi^{t+}_{E_{\alpha,\beta}}$ является cc-равномерной областью, а гиперпространство $\Pi^{z+}_{E_{\alpha,\beta}}$ не является cc-равномерной областью, и эти результаты могут быть перенесены на произвольные 3-ступенчатые группы Карно.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Пусть $K_\infty(M,X,r) \subset \big(\mathcal{D} \setminus M\big)$, где $\mathcal{D}$ — область группы Карно. Тогда*

1^0 *найдется константа $\kappa > 0$ такая, что*

$$\frac{d_{cc}\big(M, M\cdot\delta_\varepsilon X\big)}{d_{cc}\big(M\cdot\delta_\varepsilon X, \partial\mathcal{D}\big)} \le \kappa \quad \forall\varepsilon > 0;$$

2^0 *зафиксируем некоторое число $\epsilon \in (0,1)$, и рассмотрим последовательность точек $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $A_0 = X$, $A_n = \delta_\epsilon A_{n-1}$, группы Карно, $r_0 = d_{cc}(A_0, A_1)$. Всегда можно выбрать $r_0 < r$ таким образом, что для любых точек x, y, таких, что*

$$x \in B_{cc}(A_m, \epsilon^m r_0), \quad y \in B_{cc}(A_n, \epsilon^n r_0), \quad n \ge m,$$

существует горизонтальный путь $\gamma_{x,y} = \gamma_{x,y}(s)$, $s \in [0, l(\gamma_{x,y})]$, такой, что

$$\gamma_{x,y}(0) = x, \quad \gamma(l(\gamma_{x,y})) = y,$$

$$\begin{cases} l(\gamma) \le \kappa_1 r_0(\epsilon^n + \epsilon^{n-1} + \ldots + \epsilon^m), \\ l(\gamma(s)) \le \kappa_2 d_{cc}\big(\gamma_{x,y}(s), \partial\mathcal{D}\big), \quad \forall s \in [0, l(\gamma_{x,y})], \end{cases}$$

для некоторых констант κ_1, κ_2, не зависящих от выбора s, n, m.

Доказательство. П. 1^0 вытекает из инвариантности метрики Карно — Каратеодори под действием группы растяжений.

П. 2^0 Пусть $r_0 = \frac{r}{10}$. Мы имеем $K_\infty(M,X,r_0) \subset K_\infty(M,X,r)$. Тогда в случае $n = m$ кривая $\gamma_{x,y}$ — объединение двух cc-кратчайших, соединяющих каждую из точек x, y с точкой A_n; если $n > m$, то

$$\gamma_{x,y} = \gamma(x, A_m) \cup \gamma(A_m, A_{m+1}) \cup \ldots \cup \gamma(A_{n-1}, A_n) \cup \gamma(A_n, y),$$

где $\gamma(C_1, C_2)$ — cc-кратчайшая, соединяющая точки C_1, C_2. □

Лемма 2 (см. [2], Лемма 1)**.** *Пусть S — связное множество, принадлежащее области $\mathcal{D}$ группы Карно, обладающее следующими свойствами*

(1) $x_1 \in S$, $x_2 \in S$,

(2) *существует константа $\beta > 0$ такая, что для любой точки $x \in S$ выполняется $d_{cc}(x, \partial\mathcal{D}) \ge \beta d_{cc}(x_1, x_2)$,*

(3) $S \subset B_{cc}(z, \alpha\rho_c(x_1, x_2))$, *где z — некоторая точка группы Карно, α — некоторая положительная константа.*

Тогда для точек x_1, x_2 найдется горизонтальная кривая $\gamma \subset \mathcal{D}$, соединяющая x_1 x_2, такая, что для нее выполняются условия равномерности в области $\mathcal{D}$ с некоторыми константами, зависящими только от α, β.

3. Специальное слоение дилатаций на $\mathbb{H}^1$

В плоскости XOY рассмотрим единичную окружность

$$S(1) = \{(x_1, y_1, 0) \mid x_1^2 + y_1^2 = 1\}.$$

Горизонтальная плоскость Π_{x_1,y_1}, проходящая через точку $(x_1, y_1, 0) = M_1 \in S(1)$, состоит из точек (x, y, t) таких, что

$$\frac{\alpha y_1}{2} x - \frac{\alpha x_1}{2} y + t = 0.$$

Отметим, что косинус угла между Π_{x_1,y_1} и координатной плоскостью XOY равен

$$\frac{2}{\sqrt{4+\alpha^2}}. \tag{6}$$

Рассмотрим дилатацию

$$\tau^+_{M_1} = \tau^+_{M_1}(\varepsilon) = (x_1, y_1, 0)\cdot(\varepsilon(-y_1), \varepsilon x_1, \varepsilon^2\cdot 1) = \bigl(x_1 - \varepsilon y_1,\ y_1 + \varepsilon x_1,\ \frac{\alpha}{2}\varepsilon + \varepsilon^2\bigr), \quad \varepsilon \geq 0.$$

Отметим, что найдется число $\kappa > 0$ такое, что

$$\frac{d_{cc}\bigl(M_1, \tau^+_{M_1}(\varepsilon)\bigr)}{d_{cc}\bigl(\tau^+_{M_1}(\varepsilon), \partial\Pi^+_t\bigr)} \leq \kappa \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{7}$$

Оценка (7) вытекает из элементарных геометрических построений, основанных на (6), и леммы 1.

Рассмотрим пучок дилатаций

$$\begin{aligned} \tau^+_{M_1,b} = \tau^+_{M_1,b}(\varepsilon) &= (x_1, y_1, 0) \cdot \delta_\varepsilon(-y_1 - b_1, x_1 + b_2, 1 + b_3) \\ &= (x_1, y_1, 0) \cdot (-\varepsilon(y_1 + b_1), \varepsilon(x_1 + b_2), \varepsilon^2(1 + b_3)) \\ &= \bigl(x_1 - \varepsilon(y_1 + b_1), y_1 + \varepsilon(x_1 + b_2), \frac{\alpha}{2}\varepsilon + \frac{\alpha}{2}\varepsilon(x_1 b_2 + y_1 b_1) + \varepsilon^2(1 + b_3)\bigr), \quad \varepsilon \geq 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Понятно, что если вектор $b = (b_1, b_2, b_3) \in B_e(k) = \bigcup\limits_{x^2+y^2+t^2<k^2} (x, y, t)$, где k достаточно мало, то, см. (8),

$$\frac{\alpha}{2}\varepsilon + \frac{\alpha}{2}\varepsilon(x_1 b_2 + y_1 b_1) + \varepsilon^2(1 + b_3) > 0,$$

вне зависимости от выбора $M_1 \in S(1)$, откуда вытекает, что

$$\tau^+_{M_1,b}(\varepsilon) \subset \Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1},\ \varepsilon > 0 \quad \forall b \in B_e(k). \tag{9}$$

Включение (9) говорит нам о том, что в каждой точке $M_1 \in \partial\Pi_{\mathbb{H}^1}$ мы построили cc-однородный конус $K_\infty(M_1, X_{M_1}, r_{M_1})$ для области $\Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1}$ с осью

$$\tau^+_{M_1} = \tau^+_{M_1}(\varepsilon) = M_1 \cdot \delta_\varepsilon(-y_1, x_1, 1), \quad X_{M_1} \in \tau^+_{M_1},\ d_{cc}(X_{M_1}, O) = 1,$$

причем r_{M_1} не зависит от выбора $M_1 \in S(1)$.

Несложно видеть, что для любых различных точек $M_1, M_1' \in S(1)$ мы имеем

$$\tau^+_{M_1} \cap \tau^+_{M_1'} = \emptyset.$$

Понятно, что множество $\Gamma_1 = \bigcup\limits_{M_1 \in S(1),\ \varepsilon>0} \tau^{1,+}_{M_1}(\varepsilon)$ образует поверхность вращения, разделяющую положительное полупространство $\Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1}$ на две неограниченных множества (внутреннее и внешнее).

При любом $r > 0$ множество $\delta_r \Gamma_1 = \Gamma_r$, $r > 0$, является объединением дилатаций

$$\tau^+_{M_r}(\varepsilon) = M_r \cdot (-\varepsilon y_1, \varepsilon x_1, \varepsilon^2) = \big(x_r - \varepsilon y_1, y_r + \varepsilon x_1, \frac{\alpha}{2} r\varepsilon + \varepsilon^2\big), \quad \varepsilon \geq 0,$$

где $M_r = (rx_1, ry_1, 0) = \delta_r M_1$, $M_1 \in S(1)$, — произвольная точка множества

$$S(r) = \{(x_r, y_r, 0) \mid x_r^2 + y_r^2 = r^2\}, \quad r > 0.$$

Учитывая инвариантность расстояния Карно — Каратеодори при действии растяжения δ_r и (7), мы имеем

$$\frac{d_{cc}\big(M_r, \tau^+_{M_r}(\varepsilon)\big)}{d_{cc}\big(\tau^+_{M_r}(\varepsilon), \partial \Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1}\big)} \leq \kappa \quad \forall r, \varepsilon > 0. \tag{10}$$

Отметим, что для любой точки M_r выполняется

$$\tau^+_{M_r}(\varepsilon) \subset p(x_r, y_r),$$

где плоскость $p(x_r, y_r)$ определяется уравнением $x_r x + y_r y - (x_r)^2 - (y_r)^2 = 0$.

Переходя к пределу, мы получим

$$\lim_{r\to 0} \delta_r \Gamma_1 = \Gamma_0 = \bigcup_{x_1^2 + y_1^2 = 1} \delta_\varepsilon(x_1, y_1, 1), \quad \varepsilon \geq 0.$$

Пусть $\Gamma' = \bigcup\limits_{\substack{0 \leq (x')^2 + (y')^2 = k^2 \leq 1 \\ \varepsilon \geq 0}} \delta_\varepsilon(x', y', 1)$. Понятно, что $\Gamma_0 \subset \Gamma'$. Несложно проверить, что константа κ может быть выбрана таким образом, что для любой дилатации $\delta_\varepsilon(x', y', 1) \in \Gamma'$ будет выполняться оценка

$$\frac{d_{cc}\big(O, \delta_\varepsilon(x', y', 1)\big)}{d_{cc}\big(\delta_\varepsilon(x', y', 1), \partial \Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1}\big)} \leq \kappa \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{11}$$

Обозначим

$$\Gamma^+ = \Gamma' \cup \bigcup_{r \in [0,\infty)} \Gamma_r.$$

Теорема 1. *Область $\Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1}$ удовлетворяет условию непрерывно деформируемого внутреннего cc-однородного конуса.*

Доказательство. Условие внутреннего cc-однородного конуса для $\Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1}$ вытекает из оценок (10), (11). Условие непрерывной деформируемости осей внутренних cc-однородного конусов области $\Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1}$ вытекет из саособа построения семейств Γ_r, $r \geq 0$, и Γ'.

$\square$

Используя дилатации вида

$$\tau^-_{M_1}(\varepsilon) = (x_1, y_1, 0)\cdot(\varepsilon y_1, \varepsilon\cdot(-x_1), (-1)\cdot\varepsilon^2) = \big(x_1 + \varepsilon y_1,\ y_1 - \varepsilon x_1,\ -\frac{\alpha}{2}\varepsilon - \varepsilon^2\big), \quad \varepsilon \geq 0,$$

также, как и выше, построим множество Γ^-, представляющее из себя семейство непрерывно деформируемых дилатаций, начинающихся в точках $M_1 \in \partial \Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1}$, принадлежащих отрицательному гиперпространству $\overline{\Pi}^{t-}_{\mathbb{H}^1}$.

Следствие 1. *Гиперпространство $\Pi^{t-}_{\mathbb{H}_1}$ удовлетворяет условию непрерывно деформируемого внутреннего cc-однородного конуса. Следовательно, гиперпространство $\Pi^{t+}_{\mathbb{H}_1}$ удовлетворяет условию непрерывно деформируемого внешнего cc-однородного конуса.*

Доказательство. Очевидно, семейство Γ^- обладает по отношению к $\Pi^{t-}_{\mathbb{H}_1}$ теми же свойствами, что и Γ^+ обладает по отношению к $\Pi^{t+}_{\mathbb{H}_1}$. □

Каждой дилатации $\tau^+_{M_1}(\varepsilon)$ сопоставим дилатацию $\tau^-_{M_1}(\varepsilon)$, их объединение обозначим

$$\tau_{M_1}(\varepsilon) = \begin{cases} \tau^-_{M_1}(-\varepsilon), & \varepsilon < 0, \\ \tau^+_{M_1}(\varepsilon), & \varepsilon \geq 0. \end{cases},$$

Каждой дилатации $\delta_\varepsilon(x', y', 1)$, $(x')^2 + (y')^2 = k^2 \leq 1$, $\varepsilon > 0$, поставим в соответствие дилатацию $\delta_\varepsilon(-x', -y', -1)$, $\varepsilon > 0$, их объединение обозначим

$$\delta_{(x',y')}(\varepsilon) = \begin{cases} (\varepsilon x', \varepsilon y', -\varepsilon^2), & \varepsilon < 0, \\ (\varepsilon x', \varepsilon y', \varepsilon^2), & \varepsilon \geq 0. \end{cases}$$

Совокупность всевозможных кривых $\tau_{M_1}(\varepsilon)$, $\delta_{(x',y')}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, обозначим через $\Gamma = \{\omega_G\}$, $\omega_G = \omega_G(\varepsilon)$, где индекс G обозначает

— или некоторую точку $M_1 \in \partial\Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1}$, $M_1 \neq O$, (тогда $\omega_G = \tau_{M_1}(\varepsilon)$),

— или некоторый вектор (x', y') (тогда $\omega_G = \delta_{(x',y')}(\varepsilon)$).

По построению мы имеем $\bigcup\limits_{\omega_G \in \Gamma} \omega_G = \mathbb{R}^3$.

В дальнейшем, если $u \in \omega_G$ для некоторой точки u, то мы будем писать $G(u)$, тем самым подчеркивая, что по точке u мы определяем $G = G(u)$ подходящим (в зависимости от контекста построения) способом.

Так же, как и для (5), для Γ можно ввести понятие непрерывной деформируемости.

Теорема 2. *Область* $\Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1}$ *является cc-равномерной.*

Доказательство. Отметим, что кривые из Γ обладают следующим **свойством непрерывности**, вытекающим из способ построения семейства Γ. Рассмотрим (не обязательно горизонтальную) кривую $\gamma : [0, s_0] \to \mathbb{H}^1$, соединяющую произвольные точки $u, v \in \Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1}$, тогда кривые $\omega_{G(u)}$, $\omega_{G(v)}$ всегда можно непрерывно деформировать друг в друга в семействе кривых Γ вдоль γ (т.е. для каждого $s \in (0, s_0)$ найдется кривая $\omega_{G(\gamma(s))}$, являющаяся элементом деформации).

Поверхность, которая получается как объединение всех кривых $\omega_{G(\gamma(s))}$, мы будем обозначать символом $\Sigma(u, v)$.

Рассмотрим призвольные точки $u, v \in \Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1}$. Соединим их кратчайшей Карно — Каратеодори $\sigma(s)$, $s \in [0, s_1]$. Предположим, что $O \notin \sigma(s)$. (В противном случае рассмотрим некоторый шар $B_{cc}(0, \delta)$, где δ — достаточно малое число; всегда можно соединить точки $\sigma(s) \cap \partial B_{cc}(0, \delta) = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ горизонтальной кривой, которой не принадлежит точка O и длина которой не превосходит величины $cd_{cc}(\sigma_1, \sigma_2)$ для некоторой константы c, не зависящей от выбора δ.) Рассмотрим поверхность $\Sigma(u, v)$. Используя п. 2^0 леммы 1, учитывая при этом теорему 1, мы всегда можем найти на $\omega_{G(\sigma(s))} = \omega_{G(\sigma(s))}(\varepsilon)$ точку $p(s)$ такую, что

$$\begin{cases} C_1 d_{cc}(u, v) \leq d_{cc}\big(p(s), \partial\Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1}\big) \leq C_2 d_{cc}(u, v), \\ d_{cc}(\sigma(s), p(s)) \leq C_3 d_{cc}(u, v), \end{cases}$$

где C_1, C_2, C_3 — некоторые константы, зависящие от раствора конусов из теоремы 1, и константы ϵ из п. 2^0 леммы 1, и не зависящие от выбора точки $\sigma(s)$, а также выбора точек u, v.

Рассмотрим множество $[P] \subset \Sigma(u, v)$, являющееся замыканием множества

$$P = \bigcup_{s \in [0, s_1]} p(s).$$

Множество $[P]$ может и не быть связным, в таком случае у нас должны найтись хотя бы две точки A_1, $A_2 \in [P]$, принадлежащие некоторой кривой $\omega_G = \omega_G(\varepsilon)$, $G = G(A_i)$, $A_i = \omega_G(\varepsilon_i)$, $i = 1, 2$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, и при этом $[P] \cap \bigcup\limits_{\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \omega_G(\varepsilon) = \emptyset$. Для всех таких точек A_1, A_2 мы добавим множество $\bigcup\limits_{\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \omega_G(\varepsilon)$ к множеству $[P]$. Используя инвариантность метрики Карно — Каратеодори относительно действия группы растяжений и неравенство треугольника, мы получаем, что для любой точки $X \in \bigcup\limits_{\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \omega_G(\varepsilon)$ выполняется $d_{cc}(A_1, X) \le C_4 d_{cc}(u, v)$, где константа C_4 не зависит от выбота точек u, v. В результате мы получим связное множество S, удовлетворяющее условиям леммы 2 (вместо точек x_1, x_2 рассматриваем точки u, v, константы α, β зависят только от C_1, C_2, C_3), и поэтому теорема 2 доказана.

□

4. Гиперпространство $\Pi^{t+}_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}}$

Используя (4), мы получаем

$$\begin{aligned} (12) \quad w = v \cdot \delta_\varepsilon w' &= (x, y, t, z) \cdot (\varepsilon x', \varepsilon y', \varepsilon^2 t', \varepsilon^3 z') \\ &= \Big(x + \varepsilon x', y + \varepsilon y', t + \varepsilon^2 t' + \frac{\alpha\varepsilon}{2}(xy' - x'y), \\ &\qquad z + \varepsilon^3 z' + \frac{\beta\varepsilon}{2}(x\varepsilon t' - x't) + \frac{\alpha\beta\varepsilon}{12}(x - x'\varepsilon)(xy' - x'y)\Big). \end{aligned}$$

Теорема 3. *Гиперпространство $\Pi^{t+}_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}}$ удовлетворяет условию непрерывно деформируемого внутреннего cc-однородного конуса.*

Доказательство. Из (12) следует, что

$$\begin{aligned} (13) \quad & (x, y, 0, z) \cdot (\varepsilon x', \varepsilon y', \varepsilon^2 t', \varepsilon^3 z') \\ &= \Big(x + \varepsilon x', y + \varepsilon y', \varepsilon^2 t' + \frac{\alpha\varepsilon}{2}(xy' - x'y), z + \varepsilon^3 z' + \frac{\beta\varepsilon^2}{2} x + \frac{\alpha\beta\varepsilon}{12}(x - x'\varepsilon)(xy' - x'y)\Big). \end{aligned}$$

Рассмотрим множество $S^{1,t}$ точек $\tilde{M}_r = (x_r, y_r, 0, z_{1-r})$, где

$$x_r^2 + y_r^2 + z_{1-r}^2 = 1, \quad x_r = r x_1, \quad y_r = r y_1, \quad x_1^2 + y_1^2 = 1, \quad r \in [0, 1].$$

Для каждой точки из $S^{1,t}$ такой, что $r \in (0, 1]$, рассмотрим кривую

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}^{+}_{\tilde{M}_r}(\varepsilon) = \tilde{M}_r \cdot (-\varepsilon y_1, \varepsilon x_1, \varepsilon^2, 0) = \Big(r x_1 - \varepsilon y_1, r y_1 + \varepsilon x_1, \frac{\alpha}{2} r\varepsilon + \varepsilon^2, \\ z_{1-r} + \frac{\beta}{2}\varepsilon^2 r x_1 + \frac{\alpha\beta\varepsilon r}{12}(x_1 r + y_1 \varepsilon)\Big), \quad \varepsilon \ge 0. \end{aligned}$$

Используя те же аргументы, что и при построении cc-однородного конуса для $\Pi^{t+}_{\mathbb{H}^1}$, мы получаем, что для каждой точки $\tilde{M}_r \in S^{1,t}$ существует cc-однородный конус

$$K_\infty(\tilde{M}_r, X_{\tilde{M}_r}, r_{\tilde{M}_r}) \subset \big(\Pi^{t+}_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}} \setminus \tilde{M}_r\big)$$

с осью

$$\tilde{\tau}^+_{\tilde{M}_r} = \tilde{\tau}^+_{\tilde{M}_r}(\varepsilon) = \tilde{M}_r \cdot \delta_\varepsilon(-y_1, x_1, 1, 0), \quad X_{\tilde{M}_r} \in \tau^+_{\tilde{M}_r},\ d_{cc}(X_{\tilde{M}_r}, O) = 1,$$

где $r_{\tilde{M}_r}$ не зависит от выбора точки $\tilde{M}_r \in S^{1,t}$. При этом точки $M_{\pm 1}$ с координатами $(0,0,0,\pm 1)$, также, как и в случае с началом координат на $\mathbb{H}^1$, являются вершинами неограниченного числа cc-однородных конусов с осями $M_{\pm 1} \cdot (\varepsilon x', \varepsilon y', \varepsilon^2, 0)$, $(x')^2 + (y')^2 \le 1$.

Далее рассмотрим всевозможные конусы

$$\delta_s K_\infty(\tilde{M}_r, X_{\tilde{M}_r}, r_{\tilde{M}_r}), \quad s \in [0, \infty).$$

Так как точки $\delta_s \tilde{M}_r$, $s \in [0,\infty)$, $r \in [0,1]$, образуют всю плоскость $t = 0$, то теорема 3 доказана. □

Следствие 2. *Гиперпространство $\Pi^{t-}_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}}$ удовлетворяет условию непрерывно деформируемого внутреннего cc-однородного конуса. Следовательно, гиперпространство $\Pi^{t+}_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}}$ удовлетворяет условию непрерывно деформируемого внешнего cc-однородного конуса.*

Доказательство. Доказательство следствия 2 получается теми же аргументами, что и доказательство следствия 1. □

References

[1] Postnikov M. M., *Lie groups and algebras, Lectures in geometry, Semester V*, «Nauka», Moscow, 1982. MR0685757

[2] Greshnov A. V., *On uniform and NTA-domains on Carnot groups*, Siberian Math. J., **42**:5 (2001), 851–864. MR1861631

[3] Greshnov A. V., Tryamkin M. V., *Exact values of constants in the generalized triangle inequality for some $(1, q_2)$-quasimetrics on canonical Carnot groups*, Mathematical Notes, **98**:3-4 (2015), 694–698. MR3438519

[4] Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F., *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacian*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2007. MR2363343

[5] Capogna L., Garofalo N., *Non tangentially accassible domains for Carnot-Carathéodory metrics and a Fatou type theorem*, C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math., **321**:12 (1995), 1565–1570. MR1367808

[6] Jones P., *Extension theorems for BMO*, Indiana Univ. Math., **29**:1 (1980), 41–66. MR0554817

[7] Jones P., *Quasiconformal mappinga and extendability of functions in Sobolev spaces*, Acta Math., **147** (1981), 71–88. MR0631089

[8] Greshnov, A. V. *On the existence of domains that satisfy inner and outer spiral conditions*, Mat. Tr. **5**:2 (2002), 138–154 (in Russian). MR1944068

[9] Capogna L., Garofalo N., *Boundary behavior of non-negative solutions of subelliptic equations in NTA-domains for Carnot-Carathéodory metrics*, J. Fourier Anal. Appl., **4**:4-5 (1998), 403–432. MR1658616

[10] Monti R., Morbidelli D., *Regular domains in homogeneous groups*, TAMS, **357**:8 (2005), 2975–3011. MR2135732

Alexandr Valer'yevich Greshnov
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia,
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: greshnov@math.nsc.ru