S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 949–954 (2019) УДК 517.938
DOI 10.33048/semi.2019.16.063 MSC 35L65,37J35

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ НА ПОВЕРХНОСТИ

Г. АБДИКАЛИКОВА, А.Е. МИРОНОВ

Abstract. In this paper, for the first time, explicit solutions of a semi-Hamiltonian system of quasi- linear differential equations by the generalized hodograph method are found. These solutions define (local) metrics on a surface for which the geodesic flow has a polynomial in momenta integrals of the fourth degree.

Keywords: integrable geodesic flows, the generalized hodograph method.

1. Введение и основные результаты

Данная работа посвящена построению точных (локальных) решений системы квазилинейных уравнений, эквивалентной условию существования полиномиального по импульсам интеграла четвертой степени.

Предположим, что на поверхности Σ задана риманова метрика

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(q)dq^i dq^j.$$

Геодезический поток на Σ называется интегрируемым, если гамильтонова система

$$\dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j},\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j},\ j = 1, 2,\ H = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}(q)p_i p_j \tag{1}$$

Abdikalikova, G., Mironov, A.E., On exact solutions of a system of quasi-linear equations describing integrable geodesic flows on a surface.

Работа поддержана грантом РНФ (грант 19-11-00044).

Поступила 18 мая 2019 г., опубликована 1 июля 2019 г.

на $T^*\Sigma$ допускает первый интеграл $F : T^*\Sigma \to \mathbb{R}$ (почти всюду функционально независимый с H), то есть

$$\{F, H\} = \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial F}{\partial q^j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\partial F}{\partial p_j} \right) = 0.$$

На двумерном торе существует два вида метрик, для которых отвечающий им геодезический поток интегрируем. В изотермических координатах эти метрики принимают вид

1. $ds^2 = f(x)(dx^2 + dy^2)$,
2. $ds^2 = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2)$.

В первом случае геодезический поток обладает интегралом первой степени по импульсам, во втором случае (метрика Лиувилля) геодезический поток обладает интегралом второй степени по импульсам. Вопрос о существовании других метрик на торе с интегрируемыми геодезическими потоками остается открытым на протяжении долгого времени. В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что геодезический поток на двумерном торе допускает полиномиальный по импульсам интеграл F степени n. Тогда на торе существуют глобальные полугеодезические координаты (t, x), в которых метрика имеет следующий вид*

$$ds^2 = g^2(t, x)dt^2 + dx^2,$$

а интеграл F имеет вид

$$F = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k(t, x)}{g^{n-k}} p_1^{n-k} p_2^k,$$

где $a_{n-1} \equiv g$ и $a_n \equiv 1$. Тогда соотношение $\{F, H\} = 0$ эквивалентно квазилинейной системе дифференциальных уравнений на функции $a_0, \dots, a_{n-1}$

$$U_t + A(U)U_x = 0, \tag{2}$$

где $U = (a_0, \dots, a_{n-1})^T$, матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 2a_2 - na_0 \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 3a_3 - (n-1)a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 & (n-1)a_{n-1} - 3a_{n-3} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & na_n - 2a_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Функции a_i, g являются периодическими по переменной x и квазипериодическими по переменной t.

Замечательным свойством системы (2) является то, что она полугамильтонова. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2 ([1])**.** *1. В гиперболической области (все собственные числа матрицы A вещественны и различны) существует замена переменных $(a_0, \dots, a_n) \to (r_1, \dots, r_n)$, которая преобразует систему (2) в диагональный вид:*

$$(r_i)_t + \lambda_i(r_1, \dots, r_n)(r_i)_x = 0, \; i = 1, \dots, n.$$

2. Существует замена переменных $(a_0, \dots, a_n) \to (G_1, \dots, G_n)$*, такая что выполнены законы сохранения*

$$(G_i(a_0, \cdots, a_n))_t + (H_i(a_0, \cdots, a_n))_x = 0, \ i = 1, \dots, n.$$

Функции $r_i(a)$ называются инвариантами Римана. Система (2) изучалась в [2], [3]. К полугамильтоновым системам квазилинейных уравнений применим обобщенный метод годографа [4]. Этот метод сводит нелинейную систему квазилинейных уравнений к линейным дифференциальным уравнениям и алгебраическим уравнениям. На практике этот метод применить очень сложно. Автору не известны другие примеры (кроме решений, построенных в этой работе), когда этот метод давал бы явные решения у систем квазилинейных уравнений.

В этой работе мы с помощью обобщенного метода годографа строим точные решения системы (2) при $n = 4$. Для построения решений нам понадобятся симметрии системы (2). Имеет место теорема.

Теорема 3. *Система (2) обладает симметриями вида*

$$U_\tau = B(U)U_x, \tag{4}$$

где матрица B *имеет вид*

$$B = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$m_{11} = c_1 - 4c_2 - 2\tfrac{c_3^2}{3}(2a_0(4 - 3a_0) + a_2(3 - 2a_0 - \tfrac{1}{4}a_2) + a_1^2 - \tfrac{3}{8}g^2),$$
$$m_{12} = \tfrac{c_3^2}{3}a_1(-6 + 4a_0 + a_2), m_{13} = \tfrac{c_3^2}{3}a_1(a_1 + \tfrac{3}{2}g), m_{14} = a_1(c_2 + \tfrac{c_3^2}{3}(a_0 + \tfrac{3}{2}a_2)),$$

$$m_{21} = \tfrac{c_3^2}{3}a_1(-22 + 12a_0 + 5a_2) + g(c_2 + \tfrac{c_3^2}{3}(12 - 11a_0 + \tfrac{3}{2}a_2)),$$
$$m_{22} = c_1 - 4c_2 + 2\tfrac{c_3^2}{3}(2a_0(2 - a_0) + a_1^2 - \tfrac{3}{8}g^2 - 3a_2(1 - \tfrac{1}{4}a_2)),$$
$$m_{23} = c_3^2(a_1(-2 + a_2) - g(2a_0 - a_2)),$$
$$m_{24} = -4a_0(c_2 + \tfrac{c_3^2}{3}a_0) + \tfrac{c_3^2}{3}a_1(a_1 + \tfrac{3}{2}g) + a_2(2c_2 - \tfrac{c_3^2}{3}(4a_0 - 3a_2)),$$

$$m_{31} = \tfrac{c_3^2}{3}(24 - 8a_0(2 - a_2) - 2a_2(8 - a_2) + g(a_1 + \tfrac{3}{2}g)),$$
$$m_{32} = 2\tfrac{c_3^2}{3}a_1(-2 + a_2) + g(c_2 - \tfrac{c_3^2}{3}(6 - a_0 - \tfrac{9}{2}a_2)),$$
$$m_{33} = c_1 - 4c_2 + \tfrac{c_3^2}{3}(4a_0(2 - a_0) - 6a_2(1 - \tfrac{1}{4}a_2) - a_1^2 - \tfrac{3}{2}g(a_1 - \tfrac{5}{2}g)),$$
$$m_{34} = a_1(3(-c_2 - 2\tfrac{c_3^2}{3}) - c_3^2(a_0 + \tfrac{1}{2}a_2)) + 3g(c_2 - \tfrac{c_3^2}{3}(a_0 - \tfrac{5}{2}a_2)),$$

$$m_{41} = \tfrac{c_3^2}{3}g(-6 + 4a_0 + a_2), m_{42} = \tfrac{c_3^2}{3}g(a_1 + \tfrac{3}{2}g), m_{43} = g(c_2 + \tfrac{c_3^2}{3}(a_0 + \tfrac{3}{2}a_2)),$$
$$m_{44} = c_1 + \tfrac{c_3^2}{3}(4a_0(3 - a_0) - a_1^2 - \tfrac{3}{2}g(a_1 - \tfrac{5}{2}g)) - 2a_2(c_2 + \tfrac{c_3^2}{3}(a_0 + \tfrac{3}{4}a_2)),$$

c_1, c_2, c_3 *— константы.*

Отметим, что все компоненты матрицы B являются квадратичными полиномами по полевым переменным a_0, a_1, a_2, g.

С помощью обобщенного метода годографа из теоремы 3 мы получаем следующие точные решения системы (1).

Теорема 4. *Система (1) обладает следующими решениями*

$$a_0 = \frac{3(c_2+t+3c_3^2)}{5c_3^2},\ a_1 = -\frac{3\sqrt{c_3^2(-5c_1-4(3c_2+8t)-18c_3^2+5x)-12(c_2+t)^2}}{5c_3^2},$$
$$a_2 = -\frac{6(2c_2+2t+c_3^2)}{5c_3^2},\ g = \frac{2\sqrt{c_3^2(-5c_1-4(3c_2+8t)-18c_3^2+5x)-12(c_2+t)^2}}{5c_3^2},$$

где c_1, c_2, c_3 *— константы.*

2. Обобщенный метод годографа

Полугамильтоновы системы квазилинейных уравнений — это обобщение гамильтоновых систем квазилинейных уравнений, допускающих скобки Пуассона гидродинамического типа [5]. Полугамильтоновы системы введены в [4] С.П. Царевым. Напомним,что гамильтонова система (записанная в инвариантах Римана)

$$r^i_t = v_i(r)r^i_x,\ i = 1,\dots,n,\ v_i \neq v_j, \tag{6}$$

называется полугамильтоновой, если для нее выполнены тождества (см. [4])

$$\partial_i\left(\frac{\partial_j v_k}{v_j - v_k}\right) = \partial_j\left(\frac{\partial_i v_k}{v_i - v_k}\right),\ i \neq j \neq k. \tag{7}$$

Если система квазилинейных уравнений обладает инвариантами Римана и может быть записана в виде законов сохранения (как система (2)), то для нее выполнены соотношения (7) и система является полугамильтоновой [6].

К полугамильтоновым системам применим следующий обобщенный метод годографа Царева [4]. Мы сначала рассмотрим случай, когда система записана в инвариантах Римана (6). Напомним (см. [4]), что полугамильтоновы системы обладают бесконечным числом симметрий (коммутирующих с (2) потоками) гидродинамического типа

$$r^i_\tau = w_i(r)r^i_x,\ i = 1,\dots,n,$$

где w_i и v_i связаны соотношениями

$$\frac{\partial_k v_i}{v_k - v_i} = \frac{\partial_k w_i}{w_k - v_i},\ i \neq k. \tag{8}$$

Решение системы (2) находится из уравнений

$$w_i(r) = v_i(r)t + x. \tag{9}$$

Таким образом, для того, чтобы построить решение системы (2) обобщенным методом годографа, нужно решить совместную систему линейных дифференциальных уравнений (8) на функции $w_i(r)$, а затем решить систему уравнений (9) на функции $r_i(x,t)$.

Если же полугамильтонова система имеет общий не диагональный вид

$$u^i_t = \sum_{j=1}^n v^i_j(u)u^j_x,\ i = 1,\dots,n, \tag{10}$$

то изложенная выше схема обобщенного метода годографа может быть представлена следующим образом. Предположим, что система (10) обладает симметрией (коммутирующим потоком)

$$u^i_\tau = \sum_{j=1}^n w^i_j(u)u^j_x,\ i = 1,\dots,n,$$

то есть смешанные производные совпадают

$$\partial_\tau(u^i_t) = \partial_\tau\left(\sum_{j=1}^n v^i_j(u)u^j_x\right) = \partial_t(u^i_\tau) = \partial_t\left(\sum_{j=1}^n w^i_j(u)u^j_x\right). \tag{11}$$

Тогда решение системы (10) находится из системы уравнений [4]

$$x\delta^i_k + tv^i_k = w^i_k. \tag{12}$$

Прямыми вычислениями, которые мы здесь опускаем, можно проверить, что для уравнений (2) и (4) выполнены тождества (11).

Уравнение (12) для матриц (3) и (5) сводится к следующей совместной системе из 16 уравнений на функции a_0, a_1, a_2, g.

$$-c_1 + 4c_2 + x + 2\tfrac{c_3^2}{3}(2a_0(4-3a_0) - a_2(3-2a_0-\tfrac14 a_2) - a_1^2 + \tfrac38 g^2) = 0,$$
$$2\tfrac{c_3^2}{3}a_1(3-2a_0-\tfrac12 a_2) = 0,$$
$$-\tfrac{c_3^2}{3}a_1(a_1+\tfrac32 g) = 0,$$
$$-a_1(c_2+t) - \tfrac{c_3^2}{3}a_1(a_0+\tfrac32 a_2) = 0,$$
$$\tfrac{c_3^2}{3}a_1(22-12a_0-5a_2) - g(t+c_2+4c_3^2) + \tfrac{c_3^2}{3}g(11a_0-\tfrac32 a_2) = 0,$$
$$-c_1 + 4c_2 + x - 2\tfrac{c_3^2}{3}(2a_0(2-a_0) - 3a_2(1-\tfrac14 a_2) + a_1^2 - \tfrac38 g^2) = 0,$$
$$c_3^2(a_1(2-a_2) + g(2a_0-a_2)) = 0,$$
$$2c_2(2a_0-a_2) + \tfrac{c_3^2}{3}(4a_0(a_0+a_2) - a_1(a_1+\tfrac32 g) - 3a_2^2) - 2t(-2a_0+a_2) = 0,$$
$$\tfrac{c_3^2}{3}(8(-3+2a_0) + 2a_2(4(2-a_0)-a_2) - g(a_1+\tfrac32 g)) = 0,$$
$$\tfrac{c_3^2}{3}(2a_1(2-a_2) - g(a_0+\tfrac92 a_2)) - g(t+c_2-2c_3^2) = 0,$$
$$-c_1 + 4c_2 + x - \tfrac{c_3^2}{3}(4a_0(2-a_0) - a_1^2 + \tfrac{15}{4}g^2 - \tfrac32(a_2(4-a_2)+a_1 g)) = 0,$$
$$-3(-c_2-2\tfrac{c_3^2}{3})a_1 + c_3^2 a_1(a_0+\tfrac12 a_2) - 3g(c_2 - \tfrac{c_3^2}{3}(a_0-\tfrac52 a_2)) - 3t(-a_1+g) = 0,$$
$$2\tfrac{c_3^2}{3}g(3-2a_0-\tfrac12 a_2) = 0,$$
$$\tfrac{c_3^2}{3}g(-a_1-\tfrac32 g) = 0,$$
$$g(-c_2 - t - \tfrac{c_3^2}{3}(a_0+\tfrac32 a_2)) = 0,$$
$$-c_1 + x - \tfrac{c_3^2}{3}(4a_0(3-a_0) - a_1^2 + \tfrac{15}{4}g^2 - \tfrac32(\tfrac43 a_0a_2 + a_2^2 + a_1 g)) - 2t(2-a_2) + 2c_2a_2 = 0.$$

Решением этой системы являются функции, найденные в теореме 4.

References

[1] M. Bialy, A.E. Mironov, *Rich quasi-linear system for integrable geodesic flows on 2-torus*, Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series A, **29**:1 (2011), 81–90. Zbl 1232.37035

[2] M. Bialy, A.E. Mironov, *Cubic and quartic integrals for geodesic flow on 2-torus via system of hydrodynamic type*, Nonlinearity, **24** (2011), 3541–3554. Zbl 1232.35092

[3] M.V. Pavlov, S.P. Tsarev, *On Local Description of Two-Dimensional Geodesic Flows with a Polynomial First Integral*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **49**:17 (2016), ID 175302. Zbl 1346.53071

[4] S.P. Tsarev, *The geometry of Hamiltonian systems of hydrodynamic type. The generalized hodograph method*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **54**:5 (1990), 1048–1068. Zbl 0796.76014

[5] Dubrovin, B. A.; Novikov, S. P., *Hydrodynamics of weakly deformed soliton lattices. Differential geometry and Hamiltonian theory*, Usp. Mat. Nauk, **44**:6(270) (1989), 29–98. Zbl 0712.58032

[6] D. Serre, *Systems of conservation laws. Vol. 2. Geometric structures, oscillations, and initial-boundary value problems.* Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. Zbl 0936.35001

Gulshat Abdikalikova
Laboratory of Topology and Dynamics,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: abdikalikova_g@mail.ru

Andrey Evgenevich Mironov
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: mironov@math.nsc.ru