S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 955–958 (2019) УДК 514.76

DOI 10.33048/semi.2019.16.064 MSC 35R30

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ МИНИМАЛЬНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ТОРОВ И БУТЫЛОК КЛЕЙНА В $\mathbb{C}P^3$

М.С. ЕРМЕНТАЙ

Abstract. In this paper, we construct a family of minimal isotropic tori and Klein bottles in $\mathbb{C}P^3$ in terms elementary functions.

Keywords: minimal isotropic tori, Klein bottles, Laplace – Beltrami operator.

1. Введение

В этой работе мы строим семейство минимальных изотропных торов и бутылок Клейна в $\mathbb{C}P^3$. Напомним, что поверхность $\Sigma \subset \mathbb{C}P^3$ называется изотропной, если на ней зануляется форма Фубини–Штуди. Предположим, что на поверхности Σ выбраны изотермические координаты, в которых индуцированная метрика принимает вид $ds^2 = 2e^{v(x,y)}(dx^2 + dy^2)$. Если поверхность Σ содержится в некоторой комплексной проективной плоскости $\Sigma \subset \mathbb{C}P^2 \subset \mathbb{C}P^3$, то $v(x, y)$ удовлетворяет уравнению Цицейки и в этом случае Σ является лагранжевой поверхностью в $\mathbb{C}P^2$. Такие поверхности изучались, например, в работах [1] – [4]. Если поверхность Σ не содержится ни в какой комплексной проективной плоскости, то как показано в [5], функция $v(x, y)$ удовлетворяет уравнению sh-Gordon. Отметим, что уравнение sh-Gordon – это солитонное уравнение, которое часто встречается в геометрии. Например, оно описывает торы постоянной средней кривизны в $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ и $\mathbb{H}^3$. Гладкие периодические решения этого уравнения выражаются через тэта-функции многообразий Якоби спектральных кривых.

Yermentay, M.S., On a family of minimal isotropic tori and Klein bottles in $\mathbb{C}P^3$.

Работа поддержана грантом РНФ (грант 19-11-00044).

Поступила 17 мая 2019 г., опубликована 3 июля 2019 г.

Основной результат этой работы заключается в следующем. Пусть $S^7 \subset \mathbb{C}^4$ – единичная сфера, $\mathcal{H} : S^7 \to \mathbb{C}P^3$ — проекция Хопфа. Будем задавать изотропную поверхность Σ как образ композиции отображений $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S^7$ и $\mathcal{H}$. Пусть m_1 и m_2 — взаимно простые целые числа. Имеет место теорема.

Теорема 1. *Поверхность $\Sigma \subset \mathbb{C}P^3$, заданная как образ композиции отображений $\mathcal{H} \circ \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^3$, где*

$$\varphi(x,y) = (\frac{\sin x}{\sqrt{2}}e^{2\pi i m_1 y}, \frac{\cos x}{\sqrt{2}}e^{2\pi i m_2 y}, \frac{\sin x}{\sqrt{2}}e^{-2\pi i m_1 y}, \frac{\cos x}{\sqrt{2}}e^{-2\pi i m_2 y}), \tag{1}$$

является минимальной изотропной поверхностью в $\mathbb{C}P^3$.

Индуцированная метрика на Σ в координатах x, y имеет диагональный вид

$$ds^2 = dx^2 + 4\pi^2(m_1^2 \sin^2 x + m_2^2 \cos^2 x)dy^2, \tag{2}$$

гауссова кривизна равна

$$K = \frac{(m_1^2 - m_2^2)(-m_2^2 \cos^4 x + m_1^2 \sin^4 x)}{(m_2^2 \cos^2 x + m_1^2 \sin^2 x)^2}.$$

Если m_1 и m_2 — нечетные числа, то

$$\mathcal{H} \circ \varphi(x + \pi, y) = \mathcal{H} \circ \varphi(x, y + \frac{1}{2}) = \mathcal{H} \circ \varphi(x, y)$$

и образом $\mathcal{H} \circ \varphi$ является погруженный тор. Если одно из чисел m_1 или m_2 нечетное, а второе — четное, то

$$\mathcal{H} \circ \varphi(x + \pi, y) = \mathcal{H} \circ \varphi(\pi - x, y + \frac{1}{2}) = \mathcal{H} \circ \varphi(x, y)$$

и образом $\mathcal{H} \circ \varphi$ является погруженная бутылка Клейна. Таким образом, теорема 1 показывает, что если отказаться от изотермических координат, то минимальные изотропные поверхности могут быть описаны не через тэта-функции спектральных кривых, а через элементарные функции. Образом отображения φ является минимальная горизонтальная поверхность в S^7. Существует небольшой известный запас явных примеров минимальных торов и бутылок Клейна в сферах, которые строятся с помощью элементарных функций. К таким примерам относятся торы Оцуки в S^3 [6], лоусоновы торы и бутылки Клейна $\tau_{m,k}$ в S^3 [7], минимальные торы и бутылки Клейна в S^5 [8] (см. также [9]). Отметим, что метрика на лоусоновых торах и бутылках Клейна в S^3 имеет такой же вид (2) как и для поверхностей построенных в теореме 1. При этом компоненты вектор – функции φ являются линейными комбинациями координатных функций поверхностей Лоусона.

Доказательство. Напомним, что эрмитова структура на $\mathbb{C}P^3$ задается следующим образом. Пусть u_1, u_2 — касательные векторы к $\mathbb{C}P^3$ в точке $p \in \mathbb{C}P^3$, S^1_p — слой расслоения Хопфа, отвечающий точке p. Через v_1, v_2 обозначим горизонтальные поднятия векторов u_1, u_2 на S^7, векторы v_1, v_2 — касательные векторы к S^7 в точке $\tilde{p} \in S^1_p$ и v_1, v_2 — ортогональны слою S^1_p. Тогда эрмитово произведение векторов u_1, u_2 определяется по формуле

$$\langle u_1, u_2 \rangle_{FS} = \langle v_1, v_2 \rangle,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – эрмитово произведение в $\mathbb{C}^4$. Вещественная и мнимая части $\langle\cdot,\cdot\rangle_{FS}$ являются соответственно метрикой Фубини–Штуди и симплектической формой Фубини–Штуди. Из формулы (1) следует, что

$$\varphi_x = (\frac{\cos x}{\sqrt{2}}e^{2\pi i m_1 y}, -\frac{\sin x}{\sqrt{2}}e^{2\pi i m_2 y}, \frac{\cos x}{\sqrt{2}}e^{-2\pi i m_1 y}, -\frac{\sin x}{\sqrt{2}}e^{-2\pi i m_2 y}),$$

$$\varphi_y = (\frac{2\pi i m_1}{\sqrt{2}}\sin x e^{2\pi i m_1 y}, \frac{2\pi i m_2}{\sqrt{2}}\cos x e^{2\pi i m_2 y}, \frac{-2\pi i m_1}{\sqrt{2}}\sin x e^{-2\pi i m_1 y},$$
$$-\frac{2\pi i m_2}{\sqrt{2}}\cos x e^{-2\pi i m_2 y}).$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$< \varphi_x, \varphi >=< \varphi_y, \varphi >= 0.$$

Следовательно, φ задает горизонтальное отображение. Далее, прямыми вычислениями можно показать, что

$$< \varphi_x, \varphi_y >= 0, \; < \varphi_x, \varphi_x >= 1,$$
$$< \varphi_y, \varphi_y >= 4\pi^2(m_1^2 \sin^2 x + m_2^2 \cos^2 x).$$

Следовательно, форма Фубини–Штуди зануляется на образе отображения $\mathcal{H}\circ\varphi$ и Σ является изотропной поверхностью с индуцированной метрикой

$$ds^2 = dx^2 + 4\pi^2(m_1^2 \sin^2 x + m_2^2 \cos^2 x)dy^2.$$

Для доказательства минимальности Σ мы воспользуемся следующей теоремой.(см. [10])

Теорема 2. *Пусть M — риманово многообразие размерности m и $\psi : M \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — изометрическое погружение. Тогда отображение ψ является минимальным погружением в S^n тогда и только тогда, когда*

$$\triangle\psi = -m\psi,$$

где $\triangle$ — оператор Лапласа – Бельтрами.

Оператор Лапласа – Бельтрами на нашей поверхности Σ в координатах x, y имеет вид

$$\triangle = \frac{1}{2\pi\sqrt{m_2^2\cos^2 x + m_1^2 \sin^2 x}}\partial_x(2\pi\sqrt{m_2^2\cos^2 x + m_1^2\sin^2 x}\;\partial_x) +$$
$$\frac{1}{4\pi^2(m_2^2\cos^2 x + m_1^2\sin^2 x)}\partial_y^2 =$$
$$\partial_x^2 + \frac{(m_1^2 - m_2^2)\cos x \sin x}{m_2^2\cos^2 x + m_1^2 \sin^2 x}\partial_x + \frac{1}{4\pi^2(m_2^2\cos^2 x + m_1^2\sin^2 x)}\partial_y^2.$$

Прямыми вычислениями можно убедиться, что

$$\triangle\varphi = -2\varphi,$$

где φ задано формулой (1). По теореме 2 поверхность $\varphi(\mathbb{R}^2)$ является минимальной в S^7. Так как поверхность $\varphi(\mathbb{R}^2)$ является горизонтальной, то её образ при отображении $\mathcal{H}$ является минимальной в $\mathbb{C}P^3$. Теорема 1 доказана. $\square$

References

[1] R. A. Sharipov, *Minimal tori in the five-dimensional sphere in* $\mathbb{C}^3$, Theoretical and Mathematical Physics, **87**:1 (1991), 363–369. Zbl 0742.53021

[2] A. E. Mironov, *Relationship between symmetries of the Tzitzeica equation and the Novikov–Veselov Hierarchy*, Math. Notes, **82**:4 (2007), 569–572. Zbl 1146.37041

[3] H. Ma, Y. Ma, *Totally real minimal tori in* $\mathbb{C}P^2$, Math. Z., **249**:2 (2005), 241—267. Zbl 1068.53046

[4] H. Ma, A. E. Mironov, D. Zuo, *An energy functional for Lagrangian tori in* $\mathbb{C}P^2$, Annals of Global Analysis and Geometry, **53**:4 (2018), 583–595. Zbl 1394.37104

[5] M. S. Yermentay, *On minimal isotropic tori in* $\mathbb{C}P^3$, Sib. Math. J., **59**:3 (2018), 415–419. Zbl 1397.53077

[6] T. Otsuki, *Minimal Hypersurfaces in a Riemannian Manifold of Constant Curvature*, American Journal of Mathematics, **92**:1 (1970), 145—173. Zbl 0196.25102

[7] H. B. Lawson, *Complete Minimal Surfaces in* S^3, Annals of Mathematics, **92**:3 (1970), 335—374. Zbl 0205.52001

[8] A. E. Mironov, *New examples of Hamilton-minimal and minimal Lagrangian manifolds in* $\mathbb{C}^n$ *and* $\mathbb{C}P^n$, Sb. Math., **195**:1 (2004), 85–96. Zbl 1078.53079

[9] A. V. Penskoi, *Extremal metrics for eigenvalues of the Laplace–Beltrami operator on surfaces*, Russian Math. Surveys, **68**:6 (2013), 1073–1130. Zbl 1328.53078

[10] H. B. Lawson, *Lectures on Minimal Submanifolds. Vol. 1*, Mathematics Lecture Series, 9. Berkeley, California: Publish or Perish, Inc., 1980. Zbl 0434.53006

Meiramgul S. Yermentay
Novosibirsk State University,
Laboratory of Topology and Dynamics,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Specialized educational and scientific center of the Novosibirsk State University,
11/1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: ermentay.m@gmail.com