S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 959–974 (2019) УДК 539.311,517.958
DOI 10.33048/semi.2019.16.065 MSC 35Q74,74G65

О РАВНОВЕСИИ ДВУСЛОЙНОЙ КОНСТРУКЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ДЕФЕКТА

И.В. ФАНКИНА

Abstract. The equilibrium problem of the structure, which consists of two elastic plates, is considered. It is assumed that the plates are flatly deformed, and the layers are modeled as elastic bodies. Plates are glued along a given line. In addition there is a defect along the gluing line in one of the layers. On the defect faces, nonlinear boundary conditions containing the damage parameter are established. Using the variational approach, the solvability of this problem is proved. In the problem, the passage to the limit is carried out when the damage parameter tends to zero and to infinity. Differential formulations for the corresponding limit problems are obtained. The case of the rigidity of one of the layers tends to infinity is considered; the obtained limit problem is analyzed.

Keywords: two-layer structure, nonpenetration condition, damage parameter, defect, variational inequality.

1. Введение

Многие применяемые на практике конструкции состоят из упругих тел, пластин и балок, скрепленных между собой. При создании или эксплуатации в конструкциях могут образовываться дефекты: трещины, отслоения и разрывы в области скрепления элементов. Наличие дефектов в конструкции влияет на ее прочность и эффективность в использовании. Поэтому исследование математических моделей, описывающих деформирование конструкций с дефектами является актуальной проблемой.

Fankina, I.V., On equilibrium problem for a two-layer structure in the presence of a defect.

Работа поддержана РФФИ (грант 18-29-10007).

Поступила 9 апреля 2019 г., опубликована 31 июля 2019 г.

Для классического подхода к моделированию дефектов, таких как трещины, характерно задание линейных краевых условий на их берегах, что часто приводит к физически противоречивому явлению взаимного проникания противоположных берегов дефекта [1, 2, 3]. С такой точки зрения наиболее подходящими для описания поведения конструкций с дефектами являются модели с нелинейными условиями непроникания, допускающими только касание или расхождение берегов. Последние десятилетия ведется активная работа, относящаяся к исследованию нелинейных задач с краевыми условиями непроникания (см., например, [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]). Первыми работами, в которых в рамках моделей с условиями непроникания изучались задачи равновесия для двуслойных конструкций, являются статьи [12, 13]. В [14] исследована задача, в которой неизвестными являются прогибы слоев конструкции; в [15] произведено ее численное моделирование. В [16] рассмотрена задача равновесия для двуслойной конструкции, слои которой склеены на одном из берегов трещины, находящейся в нижнем слое, а вне линии склейки область контакта слоев заранее неизвестна; искомыми функциями в задаче являются как горизонтальные смещения, так и прогибы слоев. Задачи равновесия для различных двуслойных конструкций, формулируемые в плоской постановке, изучались в [17, 18, 19, 20, 21, 22].

В работе рассматривается краевая задача, описывающая равновесие двуслойной конструкции, слоями которой являются упругие пластины. Предполагается, что пластины деформируются в плоскости. Пластины контактируют по заданной линии, на которой задается условие равенства перемещений пластин. При этом в одном из слоев имеется дефект вдоль линии склейки. На берегах дефекта задаются нелинейные краевые условия, аналогичные условиям в [23, 24, 25], которые содержат параметр повреждаемости. Этот параметр характеризует дефект: чем больше его значение, тем слабее сцепление берегов дефекта, и наоборот. С помощью вариационного подхода установлена разрешимость данной задачи. В задаче осуществлен предельный переход при стремлении параметра повреждаемости к нулю и к бесконечности. Получены дифференциальные формулировки для соответствующих предельных задач. Кроме того, рассмотрен случай стремления жесткости одного из слоев к бесконечности; проведен анализ полученной предельной задачи.

2. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^2$ и $\omega \subset R^2$ – области, ограниченные гладкими границами $\partial\Omega$ и $\partial\omega$ (рис. 1). Области Ω и ω соответствуют упругим слоям на плоскости, в которой они контактируют. Гладкая кривая γ не имеет самопересечений и соответствует линии соединения пластин, $\bar{\gamma} \subset \Omega$, $\bar{\gamma} \subset \partial\omega$; $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$. Через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ обозначается нормаль единичной длины к границе $\partial\omega$, $(\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1)$ – касательный вектор. С помощью направления ν определяется знак берега $\gamma^\pm$. Считается, что вдоль γ^+ в нижней пластине имеется дефект, который характеризуется параметром повреждаемости δ, $\delta \in (0, \infty)$. Будет использовано обозначение $[h] = h^+ - h^-$ для скачка функции h на γ, где $h^\pm$ – следы функции h на берегах $\gamma^\pm$.

Пусть $A = \{a_{ijkl}\}$ – симметричный и положительно определенный тензор модулей упругости:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}\ ,\ \ i,j,k,l = 1,2\ ,$$

$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq C|\xi|^2 \quad \text{для всех} \quad \xi_{ij} \ , \ \ \xi_{ij} = \xi_{ji} \ ; \ \ C = \text{const} > 0 \ .$$

Предполагается, что все величины с двумя нижними индексами симметричны по этим индексам, а также по повторяющимся индексам проводится суммирование. Пусть $B = \{b_{ijkl}\}$, $i,j,k,l = 1,2$ – тензор, обладающий теми же свойствами. Кроме того, $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$, $b_{ijkl} \in L^\infty(\omega)$.

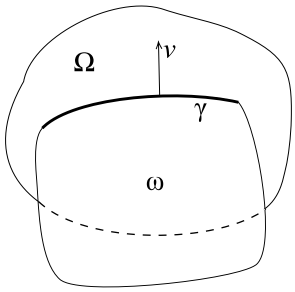

Рис. 1

Пусть $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ – горизонтальные смещения точек нижней и верхней пластин, соответственно. Через $\varepsilon(w) = \{\varepsilon_{ij}(w)\}$ будет обозначаться тензор деформаций, $\varepsilon_{ij}(w) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), i,j = 1,2$. Нижний индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате. Также вводится обозначение $\sigma = \sigma(w) = \{\sigma_{ij}(w)\}$ и $p = p(w) = \{p_{ij}(w)\}$ для тензоров напряжений. Кроме того, для $P \in \{\sigma, p\}$ верно: $P\nu = (P_{1j}\nu_j, P_{2j}\nu_j)$, $P_\nu = P_{ij}\nu_j\nu_i$, $P_\tau = P_{ij}\nu_j\tau_i$.

Задача равновесия двуслойной упругой конструкции с дефектом под действием заданных внешних сил $f \in L^2(\Omega)^2$, $g \in L^2(\omega)^2$ в дифференциальном виде формулируется следующим образом:
Найти такие функции $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $p = \{p_{ij}\}$, $i,j = 1,2$, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \ , \ \ \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma \ , \tag{1}$$

$$-\operatorname{div} p = g \ , \ \ p - B\varepsilon(v) = 0 \quad \text{в} \quad \omega \ , \tag{2}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \ , \ \ p\nu = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega \setminus \gamma \ , \tag{3}$$

$$u^- = v, \ \ [u_\nu] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma \ , \tag{4}$$

$$\sigma_\tau^+ = \frac{1}{\delta}[u_\tau] \ , \ \ \sigma_\nu^+ \leq \frac{1}{\delta}[u_\nu] \ , \ \ \left(\sigma_\nu^+ - \frac{1}{\delta}[u_\nu]\right)[u_\nu] = 0 \ ,$$

$$\sigma_\nu^- + p_\nu = \sigma_\nu^+ \ , \ \ \sigma_\tau^- + p_\tau = \frac{1}{\delta}[u_\tau] \quad \text{на} \quad \gamma \ . \tag{5}$$

Соотношения в (1), (2) – это уравнения равновесия и уравнения состояния для пластин. Первое условие в (4) обеспечивает склейку слоев на γ^-, а второе – непроникание противоположных берегов дефекта друг в друга. Первые три ограничения в (5) задают связь между нормальными и касательными составляющими вектора напряжений, перемещениями нижнего слоя и параметром повреждаемости дефекта на положительном берегу γ; последние два условия в (5) соответствуют равенству нормальных и касательных составляющих векторов напряжений, действующих на линии соединения слоев.

Задачу равновесия двуслойной конструкции можно сформулировать в виде задачи минимизации функционала энергии на множестве допустимых перемещений. Для этого рассмотрим функционал потенциальной энергии конструкции:

$$\Pi(\bar{u},\bar{v}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(\bar{u})\varepsilon(\bar{u}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\bar{u} + \frac{1}{2}\int\limits_{\omega} p(\bar{v})\varepsilon(\bar{v}) - \int\limits_{\omega} g\bar{v} + \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\gamma} [\bar{u}]^2 \ .$$

Слагаемое $\frac{1}{2\delta}\int\limits_{\gamma}[\bar{u}]^2$ отвечает за работу сил сцепления берегов дефекта. Рассмотрим также множество функций

$$K^e = \{(\bar{u},\bar{v}) \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \times H^1(\omega)^2 |\ \bar{u}^- = \bar{v}\ ,\ [\bar{u}_\nu] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma\}\ .$$

Через $H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)$ обозначается пространство Соболева

$$H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma) = \{v \in H^1(\Omega_\gamma) \mid v = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\}\ .$$

Задача минимизации имеет вид:

Найти такое $(u,v) \in K^e$, что

$$\Pi(u,v) = \inf_{(\bar{u},\bar{v})\in K^e} \Pi(\bar{u},\bar{v})\ . \tag{6}$$

Задача (6) имеет решение, поскольку множество K^e слабо замкнуто, а функционал $\Pi(\bar{u},\bar{v})$ слабо полунепрерывен снизу. Также функционал $\Pi(\bar{u},\bar{v})$ является коэрцитивным на множестве K^e. Действительно, представим $\Pi(\bar{u},\bar{v})$ в виде

$$\Pi(\bar{u},\bar{v}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(\bar{u})\varepsilon(\bar{u}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\bar{u} + \frac{1}{2}\int\limits_{\omega} p(\bar{v})\varepsilon(\bar{v}) - \int\limits_{\omega} g\bar{v} + \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\gamma} [\bar{u}]^2 \pm \alpha\int\limits_{\gamma}\bar{v}^2\ . \tag{7}$$

Здесь и далее знак $\pm$ означает добавление и вычитание одного и того же слагаемого. Параметр α – положительный малый параметр, который выбирается таким образом, чтобы была справедлива теорема о следе функции из пространства Соболева на границе [26, гл. 3, § 5, п. 1]:

$$C_1\|\bar{u}\|^2_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} - \alpha\int\limits_{\gamma}\bar{v}^2 \geq 0\ . \tag{8}$$

Через C_1 и используемые далее $C_2,\ldots,C_{20}$ обозначаются постоянные, не зависящие от оцениваемых функций. По теореме об эквивалентном представлении нормы в пространстве Соболева из [27, гл. 1, § 1, п. 3] для слагаемых в (7) верно неравенство

$$\int\limits_{\omega} p(\bar{v})\varepsilon(\bar{v}) + \alpha\int\limits_{\gamma}\bar{v}^2 \geq C_2\|\bar{v}\|^2_{H^1(\omega)^2}\ . \tag{9}$$

В силу (8) и (9), с учетом того, что $\frac{1}{2\delta}\int\limits_{\gamma}[\bar{v}]^2 \geq 0$, представление (7) влечет оценку снизу:

$$\Pi(\bar{u},\bar{v}) \geq C_3\|\bar{u}\|^2_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} + C_4\|\bar{v}\|^2_{H^1(\omega)^2} - C_5\|\bar{u}\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} - C_6\|\bar{v}\|_{H^1(\omega)^2}\ ,$$

из которой следует коэрцитивность функционала энергии $\Pi(\bar{u},\bar{v})$. Решение (u,v) задачи (6) удовлетворяет вариационному неравенству:

$$(u,v) \in K^e\ , \tag{10}$$

$$(11)\quad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u}-u) + \int\limits_{\omega} p(v)\varepsilon(\bar{v}-v) - \int\limits_{\omega} g(\bar{v}-v) +$$

$$+ \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u][\bar{u}-u] \geq 0 \quad \text{для всех} \quad (\bar{u},\bar{v}) \in K^e \ .$$

Теорема 1. *Формулировки* (1)-(5) *и* (10)-(11) *задачи равновесия двуслойной упругой конструкции с дефектом эквивалентны на классе гладких решений.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $(\theta,\eta) \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2 \times C_0^\infty(\omega)^2$ и подставим поочередно в (11) тестовые функции вида $(\bar{u},\bar{v}) = (u,v) + (\theta,\eta)$ и $(\bar{u},\bar{v}) = (u,v) - (\theta,\eta)$. Тогда уравнения

$$(12)\qquad -\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma \ , \ -\operatorname{div} p = g \quad \text{в} \quad \omega \ .$$

выполнены в смысле обобщенных функций.

Выберем в (11) функцию $(\bar{u},\bar{v}) = (u,v) + (\varphi,0)$. При этом функция φ удовлетворяет следующим условиям: $\varphi \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)$, $\varphi_\nu \geq 0$ на γ и $supp\ \varphi \subset \overline{B^+}$, где B^+ – окрестность некоторой точки кривой γ (рис. 2). Проинтегрировав по

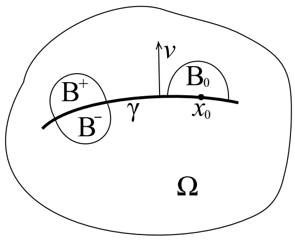

Рис. 2

частям в (11) при условии, что $(\bar{u},\bar{v})$ имеет указанный вид, получим неравенство

$$-\int\limits_{\gamma} \sigma\nu^+\varphi + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma}[u]\varphi \geq 0 \ ,$$

которое можно представить в виде

$$(13)\qquad -\int\limits_{\gamma} \sigma_\nu^+\varphi_\nu + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma}[u_\nu]\varphi_\nu - \int\limits_{\gamma}\sigma_\tau^+\varphi_\tau + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma}[u_\tau]\varphi_\tau \geq 0 \ .$$

В силу произвольности φ_τ и неотрицательности φ_ν заключаем, что

$$(14)\qquad \sigma_\tau^+ = \frac{1}{\delta}[u_\tau] \ , \ -\sigma_\nu^+ + \frac{1}{\delta}[u_\nu] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma \ .$$

Подставим в (11) поочередно тестовые функции в виде $(\bar{u},\bar{v}) = (u,v)+(\psi,\zeta)$ и $(\bar{u},\bar{v}) = (u,v) - (\psi,\zeta)$, причем $(\psi,\zeta) \in K^e$, $[\psi_\nu] = 0$. Предположим, что $supp\,(\psi,\zeta) \subset \overline{B^+ \cup B^-}$, где $B^+ \cup B^-$ – окрестность некоторой точки множества γ (рис. 2). Тогда, проинтегрировав в (11) по частям при таких выбранных функциях в качестве $(\bar{u},\bar{v})$, получим равенство

$$-\int\limits_{\gamma}[\sigma_\nu]\psi_\nu - \int\limits_{\gamma}[\sigma_\tau\psi_\tau] + \int\limits_{\gamma} p_\nu\zeta_\nu + \int\limits_{\gamma} p_\tau\zeta_\tau + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma}[u_\tau][\psi_\tau] = 0 \ ,$$

из которого, в силу свойств функции (ψ,ζ) и первого соотношения в (14), следует, что

$$[\sigma_\nu] = p_\nu \ , \ \ [\sigma_\tau] = p_\tau \quad \text{на} \quad \gamma \ . \tag{15}$$

Теперь опустим предположение о носителе функции (ψ,ζ) и получим из (11) равенство

$$-\int\limits_\gamma [\sigma\nu\cdot\psi] + \int\limits_{\partial\omega} p\nu\cdot\zeta + \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u_\tau][\psi_\tau] = 0 \ ,$$

которое в силу первого соотношения в (14) и условий в (15) влечет равенство

$$p\nu = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega\setminus\gamma \ . \tag{16}$$

Пусть для некоторой точки $x_0\in\gamma$ выполняется условие $[u_\nu(x_0)]>0$. Рассмотрим функцию $\vartheta\in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2$, причем $supp\,\vartheta\subset\overline{B_0}$, где B_0 – малая окрестность точки $x_0\in\gamma$ (рис. 2). Пусть $(\bar u,\bar v)=(u,v)-(\mu\vartheta,0)$, μ – малый положительный параметр, тогда $(\bar u,\bar v)\in K$. Подставив поочередно такую функцию $(\bar u,\bar v)$ и функцию $(\bar u,\bar v)=(u,v)+(\mu\vartheta,0)$ в (11) и далее проинтегрировав по частям, получим

$$-\int\limits_\gamma \sigma\nu^+\vartheta + \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u]\vartheta = 0 \ ,$$

откуда следует, что $\sigma^+_\nu(x_0)+\frac{1}{\delta}[u_\nu(x_0)]=0$. Предполагая, что в точке $x_1\in\gamma$ выполняется $\sigma^+_\nu(x_1)+\frac{1}{\delta}[u_\nu(x_1)]<0$, получим равенство $[u_\nu(x_1)]=0$. Таким образом,

$$[u_\nu]\left(-\sigma^+_\nu+\frac{1}{\delta}[u_\nu]\right)=0 \quad \text{на} \quad \gamma \ . \tag{17}$$

Покажем, что из (1)-(5) следует (10), (11). Пусть $(\bar u,\bar v)\in K^e$, а (u,v) – решение задачи (1)-(5). Тогда на основе уравнений равновесия из (1) и (2) получаем равенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma}(-\mathrm{div}\,\sigma-f)(\bar u-u)+\int\limits_\omega(-\mathrm{div}\,p-g)(\bar v-v)\pm\frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma[u][\bar u-u]=0 \ ,$$

которое после интегрирования по частям примет вид

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u)\varepsilon(\bar u-u)-\int\limits_{\Omega_\gamma}f(\bar u-u)+\int\limits_\omega p(v)\varepsilon(\bar v-v)-\int\limits_\omega g(\bar v-v)+\\ +\int\limits_\gamma[\sigma\nu(\bar u-u)]-\int\limits_\gamma p\nu(\bar v-v)\pm\frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma[u][\bar u-u]=0 \ .\end{gathered} \tag{18}$$

Чтобы показать, что вариационное неравенство (11) является следствием равенства (18), необходимо проверить выполнение неравенства

$$\int\limits_\gamma[\sigma\nu(\bar u-u)]-\int\limits_\gamma p\nu(\bar v-v)-\frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma[u][\bar u-u]\le 0 \ .$$

Левую часть в последнем неравенстве можно записать в виде

$$\int\limits_\gamma [\sigma_\nu(\bar u - u)_\nu] \pm \int\limits_\gamma \sigma_\nu^+(\bar u - u)_\nu^- + \int\limits_\gamma [\sigma_\tau(\bar u - u)_\tau] \pm \int\limits_\gamma \sigma_\tau^+(\bar u - u)_\tau^- +$$
$$+ \int\limits_\gamma p_\nu(\bar v - v)_\nu + \int\limits_\gamma p_\tau(\bar v - v)_\tau - \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u_\nu][(\bar u - u)_\nu] - \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u_\tau][(\bar u - u)_\tau]$$

или

$$\int\limits_\gamma [\sigma_\nu](\bar u - u)_\nu^- + \int\limits_\gamma \sigma_\nu^+[(\bar u - u)_\nu] + \int\limits_\gamma [\sigma_\tau](\bar u - u)_\tau^- + \int\limits_\gamma \sigma_\tau^+[(\bar u - u)_\tau] + \tag{19}$$
$$+ \int\limits_\gamma p_\nu(\bar v - v)_\nu + \int\limits_\gamma p_\tau(\bar v - v)_\tau - \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u_\nu][(\bar u - u)_\nu] - \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u_\tau][(\bar u - u)_\tau]\ .$$

В силу условий (5) сумма в (19) неположительна, поэтому уравнение (18) влечет неравенство (11). Из уравнений (1), (2) с учетом всех условий в (3)-(5) следует постановка (10), (11). Таким образом, установлена эквивалентность формулировок задачи равновесия (1)-(5) и (10), (11) на классе гладких решений. □

3. Предельный переход по параметру δ в задаче (10), (11)

В этом пункте исследуется поведение решения задачи равновесия двуслойной упругой конструкции с дефектом в случаях, когда параметр повреждаемости дефекта δ стремится к предельным значениям, $\delta = 0$ и $\delta = \infty$. При каждом фиксированном $\delta \in (0,\infty)$ задача равновесия (10), (11) имеет вид:

$$(u^\delta, v^\delta) \in K^e\ , \tag{20}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta)\varepsilon(\bar u - u^\delta) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar u - u^\delta) + \int\limits_\omega p(v^\delta)\varepsilon(\bar v - v^\delta) - \int\limits_\omega g(\bar v - v^\delta) + \tag{21}$$
$$+ \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u^\delta][\bar u - u^\delta] \ge 0 \quad \text{для всех} \quad (\bar u, \bar v) \in K^e\ .$$

В результате поочередной подстановки функций $(\bar u, \bar v) = (0,0)$ и $(\bar u, \bar v) = 2(u^\delta, v^\delta)$ в неравенство (21) получим соотношение

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta)\varepsilon(u^\delta) + \int\limits_\omega p(v^\delta)\varepsilon(v^\delta) + \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u^\delta]^2 = \int\limits_{\Omega_\gamma} f u^\delta + \int\limits_\omega g v^\delta\ ,$$

из которого следуют равномерные по $\delta \in (0,\infty)$ оценки

$$\|u^\delta\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} \le C_7\ ,\ \|v^\delta\|_{H^1(\omega)^2} \le C_8\ , \tag{22}$$

а также

$$\|[u^\delta]\|_{L^2(\gamma)} \le C_9\delta\ . \tag{23}$$

Теорема 2. *Для последовательности решений* (u^δ, v^δ) *семейства задач типа* (20), (21) *имеют место сходимости при* $\delta \to 0$*:*

$$(24) \qquad u^\delta \to u^0 \quad \text{слабо в} \quad H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2\ , \quad v^\delta \to v^0 \quad \text{слабо в} \quad H^1(\omega)^2\ ,$$

$$(25) \qquad [u^\delta] \to 0 \quad \text{сильно в} \quad L^2(\gamma) \quad \big([u^0] = 0 \quad \text{п.в. на} \quad \gamma\big)\ .$$

При этом функция (u^0, v^0) *является решением вариационной задачи*

$$(26) \qquad (u^0, v^0) \in K_0^e\ ,$$

$$(27) \qquad \int\limits_\Omega \sigma(u^0)\varepsilon(\bar u) - \int\limits_\Omega f\bar u + \int\limits_\omega p(v^0)\varepsilon(\bar v) - \int\limits_\omega g\bar v = 0 \quad \text{для всех} \quad (\bar u, \bar v) \in K_0^e\ ,$$

где

$$K_0^e = \{(\bar u, \bar v) \in H_0^1(\Omega)^2 \times H^1(\omega)^2) / \ \bar u = \bar v \quad \text{на} \quad \gamma\}\ ,$$

Доказательство. Сходимости (24) и (25) при $\delta \to 0$ являются следствием оценок (22) и (23). В силу сходимостей (24) и (25) предельная функция (u^0, v^0) является элементом множества K_0^e.

Пусть $(\tilde u, \tilde v) \in K_0^e$. Подставив в (21) в качестве тестовой функции поочередно $(\bar u, \bar v) = (u^\delta, v^\delta) + (\tilde u, \tilde v)$ и $(\bar u, \bar v) = (u^\delta, v^\delta) - (\tilde u, \tilde v)$, получим равенство

$$(28) \qquad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta)\varepsilon(\tilde u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\tilde u + \int\limits_\omega p(v^\delta)\varepsilon(\tilde v) - \int\limits_\omega g\tilde v = 0\ .$$

Учитывая сходимости (24) и (25), перейдем к пределу в (20) и (28) при $\delta \to 0$. Предельная задача будет иметь вид

$$(u^0, v^0) \in K_0^e\ ,$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^0)\varepsilon(\tilde u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\tilde u + \int\limits_\omega p(v^0)\varepsilon(\tilde v) - \int\limits_\omega g\tilde v = 0 \quad \text{для всех} \quad (\tilde u, \tilde v) \in K_0^e\ .$$

Поскольку $[u^0] = 0$ на γ, в последнем уравнении можно заменить область интегрирования Ω_γ на Ω, тогда оно примет вид (27). Теорема доказана.

□

Предельная вариационная задача (26), (27) может быть представлена в следующем дифференциальном виде:
Найти такие функции u^0, v^0, $\sigma(u^0) = \{\sigma_{ij}(u^0)\}$, $p(v^0) = \{p_{ij}(v^0)\}, i, j = 1, 2$, что

$$-\operatorname{div}\sigma(u^0) = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma\ , \ \ \sigma(u^0) - A\varepsilon(u^0) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\ ,$$

$$-\operatorname{div} p(v^0) = g \quad \text{в} \quad \omega\ , \ \ p(v^0) - B\varepsilon(v^0) = 0 \quad \text{в} \quad \omega\ ,$$

$$u^0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\ , \ \ p(v^0)\nu = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega \setminus \gamma\ ,$$

$$u^0 = v^0\ , \ \ [\sigma(u^0)\nu] = p(v^0)\nu \quad \text{на} \quad \gamma\ .$$

Задача (26), (27) описывает равновесие двуслойной упругой конструкции без дефекта в нижней пластине.

Рассмотрим теперь второй предельный случай.

Теорема 3. *Для последовательности решений* (u^δ, v^δ) *семейства задач типа* (20), (21) *имеют место сходимости при* $\delta \to \infty$:

$$u^\delta \to u^\infty \quad \text{слабо в} \quad H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 , \quad [u^\delta] \to [u^\infty] \quad \text{слабо в} \quad L^2(\gamma) , \tag{29}$$

$$v^\delta \to v^\infty \quad \text{слабо в} \quad H^1(\omega)^2 . \tag{30}$$

При этом функция (u^∞, v^∞) *является решением вариационной задачи*

$$(u^\infty, v^\infty) \in K^e , \tag{31}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\infty)\varepsilon(\bar{u} - u^\infty) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\infty) + \int\limits_{\omega} p(v^\infty)\varepsilon(\bar{v} - v^\infty) - \int\limits_{\omega} g(\bar{v} - v^\infty) \geq 0 \quad \text{для всех} \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in K^e . \tag{32}$$

Доказательство. По теореме вложения имеем

$$\|u^{\delta\pm}\|_{L^2(\gamma)} \leq C_{10}\|u^\delta\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} ,$$

поэтому

$$\|[u^\delta]\|_{L^2(\gamma)} \leq C_{11} . \tag{33}$$

Оценки в (22) и (33) влекут сходимости (29) и (30) при $\delta \to \infty$. В силу сходимостей (29) и (30) предельная функция (u^∞, v^∞) принадлежит множеству K^e. Осуществляя предельный переход в задаче (20), (21) на основе (29) и (30), получим вариационную задачу в виде (31), (32). Таким образом, утверждения теоремы справедливы. □

Предельная задача (31), (32) описывает равновесие двуслойной упругой конструкции при наличии трещины с нулевым трением на положительном берегу γ. Дифференциальную формулировку задачи (31), (32) можно найти в [20]. В работе [21] исследована аналогичная задача равновесия с условием $v = 0$ на $\partial\omega \setminus \gamma$.

4. Предельный переход по параметру жесткости верхнего слоя

Пусть коэффициенты упругости верхнего слоя зависят от параметра $\lambda \in (0, \lambda_0) : B^\lambda = \{\lambda^{-1} b_{ijkl}\}$. Тогда задача равновесия (10), (11) при каждом фиксированном λ примет следующий вариационный вид:

$$(u^\lambda, v^\lambda) \in K^e , \tag{34}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\lambda)\varepsilon(\bar{u} - u^\lambda) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\lambda) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\omega} p(v^\lambda)\varepsilon(\bar{v} - v^\lambda) - \int\limits_{\omega} g(\bar{v} - v^\lambda) + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u^\lambda][\bar{u} - u^\lambda] \geq 0 \quad \text{для всех} \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in K^e . \tag{35}$$

Пусть через $R(\omega)$ обозначается пространство инфинитезимальных жестких перемещений:

$$R(\omega) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x_1, x_2) = b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2)\ ,\ (x_1, x_2) \in \omega\ ,\ b, c_1, c_2 = \text{const}\}\ .$$

Покажем, что верно следующее утверждение.

Теорема 4. *Для последовательности решений* (u^λ, v^λ) *семейства задач типа* (34), (35) *имеют место сходимости при* $\lambda \to 0$*:*

$$u^\lambda \to u_0 \quad \textit{слабо в} \quad H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2\ , [u^\lambda] \to [u_0] \quad \textit{сильно в} \quad L^2(\gamma)\ , \tag{36}$$

$$v^\lambda \to \rho_0 \quad \textit{слабо в} \quad H^1(\omega)^2\ . \tag{37}$$

При этом функция (u_0, ρ_0) *является решением вариационной задачи*

$$(u_0, \rho_0) \in K^r\ , \tag{38}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_0)\varepsilon(\bar u - u_0) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar u - u_0) + \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u_0][\bar u - u_0] - \int\limits_\omega g(\bar\rho - \rho_0) \geq 0 \quad \textit{для всех} \quad (\bar u, \bar\rho) \in K^r\ , \tag{39}$$

где

$$K^r = \{(\bar u, \bar\rho) \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \times R(\omega)\ /\ [\bar u_\nu] \geq 0,\ \bar u^- = \bar\rho \quad \textit{на} \quad \gamma\}\ .$$

Доказательство. Из вариационного неравенства (35) можно получить равенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\lambda)\varepsilon(u^\lambda) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_\omega p(v^\lambda)\varepsilon(v^\lambda) + \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u^\lambda]^2 = \int\limits_{\Omega_\gamma} f u^\lambda + \int\limits_\omega g v^\lambda\ ,$$

из которого следуют равномерные по $\lambda \in (0, \lambda_0)$ оценки

$$\|u^\lambda\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} \leq C_{12}\ ,\ \|v^\lambda\|_{H^1(\omega)^2} \leq C_{13}\ . \tag{40}$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\int\limits_\omega p(v^\lambda)\varepsilon(v^\lambda) \leq C_{14}\lambda\ , \tag{41}$$

из которого следует, что предельная функция для v^λ при $\lambda \to 0$ является функцией пространства $R(\omega)$. Итак, в силу (40) и (41) выполняются сходимости (36) и (37) при $\lambda \to 0$. Выбирая $(\bar u, \bar\rho) \in K^r$ в качестве тестовой функции в (35) и переходя к пределу в задаче (34), (35) на основе сходимостей (36) и (37), получим вариационную задачу (38), (39). Теорема верна.

□

Предельная задача (38), (39) описывает равновесие конструкции, состоящей из упругого и жесткого слоев, с дефектом в упругой пластине.

5. Эквивалентная формулировка задачи (38), (39)

Получим теперь дифференциальную формулировку задачи равновесия конструкции, состоящей из упругого и жесткого слоев. Обозначим решение (u_0, ρ_0) задачи (38), (39) через (u, ρ). Пусть пробная функция в (39) поочередно принимает вид $(\bar{u}, \bar{\rho}) = (u, \rho) + (\phi, 0)$ и $(\bar{u}, \bar{\rho}) = (u, \rho) - (\phi, 0)$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2$. Тогда из (39) следует, что в смысле распределений выполняется уравнение равновесия

$$-\mathrm{div}\ \sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma \ .$$

Из неравенства (39) можно получить условия

$$\sigma_\tau^+ = \frac{1}{\delta}[u_\tau] \ , \ -\sigma_\nu^+ + \frac{1}{\delta}[u_\nu] \geq 0 \ , \ [u_\nu]\left(-\sigma_\nu^+ + \frac{1}{\delta}[u_\nu]\right) = 0 \quad \text{на} \quad \gamma$$

тем же способом, которым ранее условия (14) и (17) были получены из неравенства (11). Опустим соответствующие рассуждения.

Далее, рассмотрим функции $(\bar{u}, \bar{\rho}) = (u, \rho) + (\eta, \zeta)$ и $(\bar{u}, \bar{\rho}) = (u, \rho) - (\eta, \zeta)$, $(\eta, \zeta) \in K^\tau$ и $[\eta_\nu] = 0$. Используя поочередно такие функции $(\bar{u}, \bar{\rho})$ в качестве тестовой и далее интегрируя по частям в (39), получим

$$-\int\limits_\gamma [\sigma\nu \cdot \eta] + \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u][\eta] - \int\limits_\omega g\zeta = 0 \ .$$

Это соотношение можно записать в другом виде, добавив слагаемые $\pm \int\limits_\gamma \sigma_\tau^+ \eta_\tau^-$:

$$-\int\limits_\gamma [\sigma_\nu]\eta_\nu - \int\limits_\gamma [\sigma_\tau]\eta_\tau^- - \int\limits_\gamma \sigma_\tau^+[\eta_\tau] + \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u_\tau][\eta_\tau] - \int\limits_\omega g\zeta = 0 \ .$$

Откуда, учитывая структуру функции (η, ζ), получим

$$-\int\limits_\gamma [\sigma\nu]\zeta - \int\limits_\omega g\zeta = 0 \quad \text{для всех} \quad \zeta \in R(\omega) \ .$$

Таким образом, из вариационной формулировки задачи равновесия двуслойной конструкции (38), (39) следуют условия, совокупность которых представляет собой дифференциальную формулировку задачи. А именно, требуется найти такие функции $u = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, $\rho \in R(\omega)$, что

$$-\mathrm{div}\, \sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma \ , \ \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma \ , \tag{42}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \ , \ u^- = \rho \ , \ [u_\nu] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma \ , \tag{43}$$

$$\sigma_\tau^+ = \frac{1}{\delta}[u_\tau] \ , \ \sigma_\nu^+ - \frac{1}{\delta}[u_\nu] \leq 0 \ , \ \left(\sigma_\nu^+ - \frac{1}{\delta}[u_\nu]\right)[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma \ , \tag{44}$$

$$\int\limits_\gamma [\sigma\nu]\bar{\rho} + \int\limits_\omega g\bar{\rho} = 0 \quad \text{для всех} \quad \bar{\rho} \in R(\omega) \ . \tag{45}$$

Уравнения в (42) – это уравнение равновесия и обобщенный закон Гука для упругой пластины. Условия в (43) соответствуют закреплению упругой пластины на внешней границе, а также склейке перемещений пластин на линии их соединения. В (44) содержатся краевые условия, которые исключают взаимное проникание берегов дефекта, а также условия на напряжения в зоне дефекта. Уравнение (45) описывает равновесие жесткой пластины.

Теорема 5. *Формулировки задачи равновесия* (38)-(39) *и* (42)-(45) *эквивалентны на классе достаточно гладких решений.*

Доказательство. Дифференциальная формулировка (42)-(45) выведена из вариационной постановки (38), (39). Нужно проверить, что из (42)-(45) можно получить (38), (39). Для этого рассмотрим функцию $(\bar{u}, \bar{\rho}) \in K^r$. Из (42) и (45) следует, что верно равенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} (-\mathrm{div}\sigma - f)(\bar{u} - u) - \int\limits_{\gamma} [\sigma\nu](\bar{\rho} - \rho) - \int\limits_{\omega} g(\bar{\rho} - \rho) \pm \frac{1}{\delta} \int\limits_{\gamma} [u][\bar{u} - u] = 0 \ .$$

Отсюда после интегрирования по частям получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) + \int\limits_{\gamma} [\sigma\nu(\bar{u} - u)] - \int\limits_{\gamma} [\sigma\nu](\bar{\rho} - \rho) - \int\limits_{\omega} g(\bar{\rho} - \rho) \pm \frac{1}{\delta} \int\limits_{\gamma} [u][\bar{u} - u] = 0 \ . \tag{46}$$

Рассмотрим сумму слагаемых из (46):

$$\int\limits_{\gamma} [\sigma\nu(\bar{u} - u)] - \int\limits_{\gamma} [\sigma\nu](\bar{\rho} - \rho) - \frac{1}{\delta} \int\limits_{\gamma} [u][\bar{u} - u] \ ,$$

которая представима в виде

$$\int\limits_{\gamma} \sigma\nu^+[\bar{u} - u] + \int\limits_{\gamma} [\sigma\nu](\bar{u} - u)^- - \int\limits_{\gamma} [\sigma\nu](\bar{\rho} - \rho) - \frac{1}{\delta} \int\limits_{\gamma} [u][\bar{u} - u] \ . \tag{47}$$

В силу второго условия из (43) и условий (44), (45), сумма в (47) неположительна. Поэтому из равенства (46) следует выполнение неравенства

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) + \frac{1}{\delta} \int\limits_{\gamma} [u][\bar{u} - u] - \int\limits_{\omega} g(\bar{\rho} - \rho) \geq 0 \ ,$$

которое совпадает с вариационным неравенством (39). Таким образом, из дифференциальной постановки задачи (42)-(45) следует ее вариационная постановка (38), (39), и, следовательно, формулировки эквивалентны при условии достаточной гладкости решения задачи (38), (39). □

6. Предельный переход по параметру δ в задаче (38), (39)

В этом пункте будут получены предельные задачи в случае стремления параметра повреждаемости δ к нулю и к бесконечности в задаче (38), (39). При каждом фиксированном $\delta \in (0, \infty)$ задача равновесия в вариационной форме имеет вид:

$$(u^\delta, \rho^\delta) \in K^r \ , \tag{48}$$

$$(49) \quad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta)\varepsilon(v-u^\delta) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u}-u^\delta) + \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u^\delta][\bar{u}-u^\delta] - \int\limits_\omega g(\bar{\rho}-\rho^\delta) \geq 0$$

$$\text{для всех} \quad (\bar{u},\bar{\rho}) \in K^r \ .$$

Из неравенства (49) можно получить соотношение

$$(50) \qquad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta)\varepsilon(u^\delta) + \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u^\delta]^2 = \int\limits_{\Omega_\gamma} fu^\delta + \int\limits_\omega g\rho^\delta \ .$$

Поскольку норма для $\rho^\delta \in R(\omega)$ имеет вид

$$\|\rho^\delta\|^2_{H^1(\omega)^2} = \int\limits_\gamma (\rho^\delta)^2 = \|\rho^\delta\|^2_{L^2(\gamma)} \ ,$$

в силу теоремы вложения

$$\|\rho^\delta\|_{L^2(\gamma)} = \|u^{\delta-}\|_{L^2(\gamma)} \leq C_{15}\|u^\delta\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} \ ,$$

для слагаемых в правой части (50) верна оценка

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} fu^\delta + \int\limits_\omega g\rho^\delta \leq C_{16}\|u^\delta\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} \ .$$

Кроме того, для слагаемых в левой части (50) выполняется неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta)\varepsilon(u^\delta) + \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u^\delta]^2 \geq C_{17}\|u^\delta\|^2_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} \ .$$

Таким образом, из (50) следуют равномерные оценки по $\delta \in (0,\infty)$:

$$(51) \qquad \|u^\delta\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} \leq C_{18} \ , \ \|\rho^\delta\|_{H^1(\omega)^2} \leq C_{19} \ ,$$

$$(52) \qquad \|[u^\delta]\|_{L^2(\gamma)} \leq C_{20}\delta \ .$$

Теорема 6. *Для последовательности решений (u^δ,ρ^δ) семейства задач типа (48), (49) имеют место сходимости при $\delta \to 0$:*

$$(53) \qquad u^\delta \to u^0 \quad \textit{слабо в} \quad H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \ , \quad \rho^\delta \to \rho^0 \quad \textit{слабо в} \quad H^1(\omega)^2 \ ,$$

$$(54) \qquad [u^\delta] \to 0 \quad \textit{сильно в} \quad L^2(\gamma) \quad \big([u^0] = 0 \quad \textit{п.в. на} \quad \gamma\big) \ .$$

При этом функция u^0 является решением вариационной задачи

$$(55) \qquad u^0 \in K^r_0 \ ,$$

$$(56) \qquad \int\limits_\Omega \sigma(u^0)\varepsilon(\bar{u}) - \int\limits_\Omega f\bar{u} - \int\limits_\omega g\bar{\rho} = 0 \quad \textit{для всех} \quad \bar{u} \in K^r_0 \ ,$$

где

$$K^r_0 = \{\bar{u} \in H^1_0(\Omega)^2 \ / \ \bar{u} = \bar{\rho} \quad \textit{на} \quad \gamma \ , \ \bar{\rho} \in R(\omega)\} \ .$$

Доказательство. На основе (51) и (52) получаем, что при $\delta \to 0$ выполняются сходимости (53), (54). В силу сходимостей (53) и (54) предельная функция u_0 является элементом пространства $H_0^1(\Omega)^2$. Пусть $\tilde{u} \in K_0^r$, тогда $\tilde{u}^- = \tilde{\rho}$ на γ, и $(\tilde{u}, \tilde{\rho}) \in K^r$. Подставив в (49) в качестве тестовой функции поочередно $(\bar{u}, \bar{\rho}) = (u^\delta, \rho^\delta) + (\tilde{u}, \tilde{\rho})$ и $(\bar{u}, \bar{\rho}) = (u^\delta, \rho^\delta) - (\tilde{u}, \tilde{\rho})$, получим равенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta)\varepsilon(\tilde{u}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\tilde{u} - \int\limits_{\omega} g\tilde{\rho} = 0 \ . \tag{57}$$

Переходя к пределу в (48), (57) при $\delta \to 0$ на основе (53), (54), получим задачу в виде

$$u^0 \in K_0^r \ ,$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^0)\varepsilon(\tilde{u}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\tilde{u} - \int\limits_{\omega} g\tilde{\rho} = 0 \quad \text{для всех} \quad \tilde{u} \in K_0^r \ .$$

Предельная задача равносильна задаче (55), (56), поскольку $[u^0] = 0$ на γ. Таким образом, теорема верна.

□

При условии достаточной гладкости решения задачу (55), (56) можно сформулировать в эквивалентном дифференциальном виде:
Найти функции u^0, $\sigma(u^0) = \{\sigma_{ij}(u^0)\}, i,j = 1,2$, $\rho^0 \in R(\omega)$ такие, что

$$-\mathrm{div}\,\sigma(u^0) = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma \ , \ \ \sigma(u^0) - A\varepsilon(u^0) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \ ,$$

$$u^0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \ , \ \ u^0 = \rho^0 \quad \text{на} \quad \gamma \ ,$$

$$\int\limits_{\gamma} [\sigma(u^0)\nu]\bar{\rho} + \int\limits_{\omega} g\bar{\rho} = 0 \quad \text{для всех} \quad \bar{\rho} \in R(\omega) \ .$$

Задача (55), (56) описывает равновесие конструкции, состоящей из упругой и жесткой пластин, соединяющихся по линии, но без дефекта в упругом слое.

Рассмотрим случай, когда параметр повреждаемости δ стремится к бесконечности.

Теорема 7. *Для последовательности решений (u^δ, ρ^δ) семейства задач типа* (48), (49) *имеют место сходимости при $\delta \to \infty$:*

$$u^\delta \to u^\infty \quad \textit{слабо в} \quad H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \ , \quad [u^\delta] \to [u^\infty] \quad \textit{слабо в} \quad L^2(\gamma) \ , \tag{58}$$

$$\rho^\delta \to \rho^\infty \quad \textit{слабо в} \quad H^1(\omega)^2 \ . \tag{59}$$

При этом функция (u^∞, ρ^∞) является решением вариационной задачи

$$(u^\infty, \rho^\infty) \in K^r \ , \tag{60}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\infty)\varepsilon(\bar{u} - u^\infty) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\infty) - \int\limits_{\omega} g(\bar{\rho} - \rho^\infty) \geq 0 \quad \textit{для всех} \quad (\bar{u}, \bar{\rho}) \in K^r \ . \tag{61}$$

Доказательство. Оценки в (51) влекут сходимости (58), (59) при $\delta \to \infty$. В силу (58) и (59) для функции (u^∞, ρ^∞) верна принадлежность $(u^\infty, \rho^\infty) \in K^r$. Переходя к пределу в вариационной задаче (48) и (49) при $\delta \to \infty$, получим задачу в виде (60), (61). Теорема доказана. □

Предельная вариационная задача (60), (61) является задачей равновесия двуслойной конструкции, состоящей из упругой и жесткой пластин, при наличии трещины, при этом на берегах трещины полностью отсутствует сцепление. Исследование данной задачи проведено в работе [20].

7. Заключение

В работе исследована задача о равновесии двуслойной упругой конструкции с дефектом. Для описания дефекта применялись нелинейные краевые условия, зависящие от параметра повреждаемости. Установлено, что сформулированная задача разрешима. Получена предельная задача при стремлении элементов тензора модулей упругости верхнего слоя к бесконечности, описывающая равновесие конструкции с дефектом, в которой один из слоев жесткий. В задаче равновесия упругой конструкции и в предельной задаче для конструкции с жестким и упругим слоями изучено поведение решения при стремлении параметра повреждаемости дефекта к нулю и к бесконечности. Установлено, что предельные задачи при стремлении параметра повреждаемости к бесконечности соответствуют задачам равновесия, ранее исследованным в рамках моделей с нелинейными краевыми условиями на берегах трещины. Предельные задачи при стремлении параметра повреждаемости дефекта к нулю в обоих случаях описывают равновесие конструкций без дефектов.

References

[1] G.P. Cherepanov, *Mechanics of Brittle Fracture*, Moscow: Nauka, 1974.

[2] N.F. Morozov, *Mathematical Problems of Crack Theory*, Moscow: Nauka, 1984. Zbl 0566.73079

[3] S.A. Nazarov, B.A. Plamenevsky, *Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundary*, Moscow: Nauka, 1991.

[4] A.M. Khludnev, *Elasticity Problems in Nonsmooth Domains*, Moscow: Fizmatlit, 2010.

[5] M. Prechtel, G. Leugering, P. Steinmann, M. Stingl, *Towards optimization of crack resistance of composite materials by adjustment of fiber shapes*, Eng. Fract. Mech., **78**:6 (2011), 944–960.

[6] A. Chambolle, S. Conti, G. Francfort, *Approximation of a brittle fracture energy with a constraint of non-interpenetration*, Arch. Ration. Mech. Anal., **228**:3 (2018), 867–889. Zbl 1391.35366

[7] D. Knees, A. Schroder, *Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints*, Math. Methods Appl. Sci., **35**:15 (2012), 1859–1884. Zbl 1255.35068

[8] L. Freddi, T. Roubicek, C. Zanini, *Quasistatic delamination of sandwich-like Kirchhoff-Love plates*, J. Elast., **113** (2013), 219–250. Zbl 1275.49019

[9] T.S. Popova, *Contact problem for two viscoelastic plates*, Mat. Notes YaGU, **12**:2 (2005), 60–92.

[10] N.V. Neustroeva, *Rigid inclusion in the contact problem for elastic plates*, J. Appl. Industr. Math., **4**:4 (2010), 526–538.

[11] T.A. Rotanova, *On the statements and solvability of the problems on the contact of two plates containing rigid inclusions*, Sib. Zh. Ind. Mat., **15**:2 (2012), 107–118. Zbl 1324.74045

[12] A.M. Khludnev, A. Tani, *Overlapping domain problems in the crack theory with possible contact between crack faces*, Quarterly Appl. Math., **66**:3 (2008), 423–435. Zbl 1148.49008

[13] A.M. Khludnev, *On crack problem with overlapping domain*, Z. Angew. Math. Mech., **88**:8 (2008), 650–660. Zbl 1146.49002

[14] A.M. Khludnev, *On an equilibrium problem for a two-layer elastic body with a crack*, J. Appl. Industr. Math., **7**:3 (2013), 370–379. Zbl 1340.74005

[15] E.M. Rudoy, N.A. Kazarinov, V.Yu. Slesarenko, *Numerical simulation of the equilibrium of an elastic two-layer structure with a crack*, Num. Anal. Appl., **10**:1 (2017), 63–73.

[16] E.V. Pyatkina, *A contact problem for two plates of the same shape glued along one edge of a crack*, J. Appl. Industr. Math., **12**:2 (2018), 334–346. Zbl 06982539

[17] M.P. Savruk, V.S. Kravets, *Influence of reinforcement pads on distribution stress in cracked plates*, Prikl. Mech., **29**:3 (1993), 48–55.

[18] A.Yu. Zemlyanova, V.V. Sil'vestrov, *The problem of the reinforcement of a plate with a cutout by a two-dimensional patch*, J. Appl. Math. Mech., **71**:1 (2007), 40–51. Zbl 1150.74070

[19] Yu.O. Vasil'eva, V.V. Sil'vestrov, *The problem of an interface crack with a rigid patch plate on part of its edge*, J Appl. Math. Mech., **75**:6 (2011), 716–730. Zbl 1272.74576

[20] A.M. Khludnev, G.R. Leugering, *Optimal control of cracks in elastic bodies with thin rigid inclusions*, Z. Angew. Math. Mech., **91**:2 (2011), 125–137. Zbl 1370.74136

[21] A. Gaudiello, A.M. Khludnev, *Crack on the boundary of two overlapping domains*, Z. Angew. Math. Phys., **61**:2 (2010), 341–356. Zbl 1273.74441

[22] E.V. Pyatkina, *Optimal control of the shape of a layer shape in the equilibrium problem of elastic bodies with overlapping domains*, J. Appl. Industr. Math., **10**:3 (2016), 435–443. Zbl 1374.49007

[23] A.M. Khludnev, *On modeling elastic bodies with defects*, Sib. Electron. Math. Reports, **15**:3 (2018), 153–166. Zbl 1390.35354

[24] A.M. Khludnev, *On thin inclusions in elastic bodies with defects*, Z. Angew. Math. Phys., **70**:45 (2019), Paper No.45. Zbl 07067215

[25] A.M. Khludnev, *On thin Timoshenko inclusions in elastic bodies with defects*, Arch. Appl. Mech., (2019), DOI: 10.1007/s00419-019-01537-w.

[26] V.P. Mikhailov, *Partial Differential Equations*, Moscow: Nauka, 1976.

[27] R. Temam, *Mathematical Problems of Plasticity Theory*, Moscow: Nauka, 1991.

Irina Vladimirovna Fankina
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
15, Lavrentyeva ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: fankina.iv@gmail.com