S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 998–1004 (2019) УДК 519.21

DOI 10.33048/semi.2019.16.068 MSC 60G50

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМУМА ТРАЕКТОРИИ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

В.И. ЛОТОВ

Abstract. We continue studying of the random walk introduced in [1]. The distribution of the random walk jumps changes under successive achievement regulatory boundaries. The regulation is intended to keep under control the range of trajectories. At the same time the structure of the process allows the trajectories stay some time outside the band adjustments. The paper establishes limit theorems for the distribution of the maximum possible excess of the upper regulatory barrier.

Keywords: oscillating random walk, trajectory maximum, limit theorems.

Рассматривается случайное блуждание $\{Y_n,\, n \geq 0\}$ с двумя уровнями регулировки, введенное в [1]. Напомним его определение.

Пусть имеются две независимые последовательности $\{X_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty},\ j = 1,2$, случайных величин, являющихся независимыми и одинаково распределенными при фиксированном j, и пусть $S_0^{(1)} = S_0^{(2)} = 0$,

$$S_n^{(j)} = X_1^{(j)} + \ldots + X_n^{(j)}, \quad \mathbf{E}X_i^{(1)} > 0, \quad \mathbf{E}X_i^{(2)} < 0.$$

Для произвольного числа $b > 0$ введем

$$N_1 = \min\{n \geq 1 :\, S_n^{(1)} \geq b\}, \qquad N_2 = \min\{n \geq 1 :\, S_n^{(2)} \leq -b\}.$$

Lotov, V.I., On the distribution of the trajectory maximum of a random walk with switchings.

Работа поддержана РНФ (грант 18-11-00129).

Поступила 24 апреля 2019 г., опубликована 5 августа 2019 г.

На промежутке времени $0 \le n \le T_1 := N_1 + N_2$ случайное блуждание $\{Y_n\}$ определяется следующим образом:

$$Y_n = \begin{cases} \min\{S_n^{(1)}, b\} & 0 \le n \le N_1, \\ \max\{b + S_{n-N_1}^{(2)}, 0\} & N_1 < n \le N_1 + N_2. \end{cases}$$

При $n > T_1$ трактория эволюционирует по той же схеме. Сначала в качестве ее скачков берутся независимые копии элементов последовательности $\{X_i^{(1)}\}$ до тех пор, пока не будет достигнут уровень b в некоторый момент времени $T_1 + N_3$. Полагаем $Y_{T_1+N_3} = b$, и далее в качестве скачков траектории выбираются независимые копии элементов последовательности $\{X_i^{(2)}\}$ до первого прохождения нуля в некоторый момент времени $T_1 + N_3 + N_4 = T_1 + T_2$. Полагаем опять $Y_{T_1+T_2} = 0$, и по той же схеме задаем эволюцию траектории на последующих промежутках времени длиной $T_3, T_4, \ldots$.

Из определения ясно, что $\{Y_n,\, n \ge 0\}$ является регенерирующим процессом с дискретным временем. Точки $T_1,\ T_1 + T_2,\ \ldots$ (последовательные моменты достижения нулевого уровня последовательностью Y_n) являются моментами регенерации, случайные величины T_i, $i \ge 1$, независимы и одинаково распределены, $\mathbf{E}T_1 = \mathbf{E}N_1 + \mathbf{E}N_2 < \infty$. Вероятностные характеристики траектории случайного блуждания $\{Y_n\}$ между моментами регенерации являются одинаковыми.

Работа [1] была полностью посвящена нахождению стационарного распределения случайного процесса $\{Y_n\}$.

Случайные блуждания, у которых вероятностные характеристики скачков меняются по мере достижения траекторией определенных уровней, часто называют осциллирующими, они находят применение в стохастических моделях управления запасами, в моделях систем обслуживания, актуарной математики. Случайные блуждания с переключениями при поочередном достижении границ полосы изучались также в [2], однако механизм переключений там отличен от рассматриваемого в настоящей работе. В [2] можно также найти ссылки на предшествующие работы по близкой тематике.

Цель введения регулирующих барьеров состоит в том, чтобы воспрепятствовать траектории процесса забираться высоко вверх и опускаться намного ниже нуля. Тем не менее конструкция процесса позволяет превысить уровень b после его достижения, как и, впрочем, уход в отрицательную плоскость после достижения нуля. Тем самым появляется необходимость исследования величины возможного выхода за пределы полосы.

Введем

$$Z_n := \max\{Y_k :\ k \le n\}, \quad n \ge 1,$$

и предположим дополнительно, что $\mathbf{P}(X_1^{(2)} > 0) > 0$. Целью данной работы является исследование предельного поведения распределения Z_n при $n \to \infty$.

Обозначим через V_k $k-$й момент регенерации, $V_k = T_1 + \ldots + T_k$, $k \ge 1$, $V_0 = 0$, и пусть

$$U_k = \max\{Y_i;\ V_{k-1} \le i < V_k\}$$

— максимум траектории на $k-$м цикле регенерации. Ясно, что случайные величины $U_1, U_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены, поэтому

$$\mathbf{P}(Z_{V_n} < x) = \mathbf{P}(U_1 < x,\ U_2 < x, \ldots, U_n < x) = [\mathbf{P}(U_1 < x)]^n.$$

Тем самым задача сводится к нахождению распределения максимума траектории на цикле с последующим использованием известных подходов и результатов Б.В. Гнеденко о предельном поведении распределения максимального члена вариационного ряда (см. [3], а также подробное изложение этого материала в [4], Sec. 8.13).

Рассмотрим поведение траектории процесса Y_n на первом цикле регенерации. По построению ее максимальное значение не может быть меньше b и равно в точности b в том случае, если начиная с момента времени N_1 траектория выше уровня b не поднимется, то есть

$$p := \mathbf{P}(U_1 = b) = \mathbf{P}(-b < S_1^{(2)} \le 0, \ldots, -b < S_{N_2-1}^{(2)} \le 0).$$

Мы не будем уточнять значение величины p. С одной стороны, вычисление в точном виде числа p является весьма непростой задачей; асимптотическое представление для p при $b \to \infty$ в условиях Крамéра можно извлечь из [5]. С другой стороны, предельное поведение распределения максимального члена вариационного ряда определяется, как известно, асимптотическим поведением на бесконечности функции распределения случайной величины U_1, и потому атом в точке b не играет роли.

Пусть $x > 0$. Для анализа вероятности $\mathbf{P}(U_1 \ge b + x)$ рассмотрим момент первого выхода случайного блуждания $\{S_n^{(2)},\ n \ge 1\}$ из интервала $(-b, x)$:

$$N = \min\{n \ge 1 : S_n^{(2)} \notin (-b, x)\},$$

и пусть $\beta(b, x) = \mathbf{P}(S_N^{(2)} \ge x)$ — вероятность того, что первый выход из интервала $(-b, x)$ произойдет через его верхнюю границу.

Лемма 1. *Для $x > 0$ справедливо соотношение* $\mathbf{P}(U_1 \ge b + x) = \beta(b, x)$.

Доказательство. Действительно, событие $\{U_1 \ge b+x\}$ может осуществиться только на участке траектории $\{Y_n,\ N_1 < n < N_2\}$. Этот участок совпадает с отрезком траектории случайного блуждания $\{b + S_n^{(2)},\ n \ge 1\}$ до момента первого достижения нуля. Таким образом, для этого отрезка траектории $\{b+S_n^{(2)}\}$ факт превышения уровня $b + x$ совпадает с событием $\{S_N^{(2)} \ge x\}$. Лемма доказана.

Предельное поведение величины $\beta(b, x)$ при $x \to \infty$ изучалось в [6], ниже будут использоваться результаты этой работы. Поскольку в дальнейшем изложении рассматривается только случайное блуждание, порожденное последовательностью $\{X_n^{(2)}\}$, то для краткости будем опускать верхний индекс у случайных величин $X_n^{(2)}$ и $S_n^{(2)}$.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда скачки случайного блуждания удовлетворяют одностороннему условию Крамéра. Введем следующие условия.

(C_1). $\gamma = \sup\{\lambda :\ \mathbf{E}e^{\lambda X_1} < \infty\} > 0$.

Обозначим $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda X_1}$. Условие (C_1) гарантирует существование этой функции в полосе $0 \le \operatorname{Re}\lambda < \gamma$.

(C_2). Существует число q, $0 < q \le \gamma$, такое, что

$$\varphi(q) = \mathbf{E}e^{qX_1} = 1, \quad \mathbf{E}X_1 e^{qX_1} = \varphi'(q) < \infty.$$

Пусть

$$\nu^+ = \inf\{n \ge 1 : S_n > 0\}$$

— номер первой положительной суммы; мы здесь полагаем, что $\inf \varnothing = \infty$. На множестве $\{\nu^+ < \infty\}$ определим $\chi^+ = S_{\nu^+}$. Обозначим также $S := \sup_{n\ge 0} S_n$,

$$\nu_t = \inf\{n \ge 1 : S_n \le t\}, \qquad \chi_t = S_{\nu_t} - t, \qquad t \le 0,$$

$$c = \frac{\mathbf{P}(S = 0)}{q\mathbf{E}\big(\chi^+ \exp\{q\chi^+\};\ \nu^+ < \infty\big)}, \qquad d = d(b) = \int\limits_{-\infty}^{+0} e^{qy}\mathbf{P}(\chi_{-b} \in dy).$$

Здесь $c < 1$ (см. [7], гл.12, §7) и, очевидно, $d < 1$.

Теорема 1. ([6]) *Пусть $\mathbf{E}X_1 < 0$, распределение X_1 не является арифметическим, и выполнены условия (C_1), (C_2). Тогда для любого $b \ge 0$ при $x \to \infty$ имеет место соотношение*

$$\beta(b, x) = ce^{-qx}(1 - d(b)e^{-qb})(1 + o(1)).$$

Пусть выполнены условия теоремы 1. Обозначим $k(b) := c(1 - d(b)e^{-qb})$. Тогда в соответствии с утверждением леммы 1 имеем для $x > 0$

$$\mathbf{P}(Z_{V_n} < b + x) = [\mathbf{P}(U_1 < b + x)]^n = (1 - \beta(b, x))^n.$$

Действуя аналогично [3], положим $x = (\log n + y)q^{-1}$ и заметим, что величина $o(1)$ при $x \to \infty$ есть одновременно $o(1)$ при $n \to \infty$. Воспользовавшись утверждением теоремы 1, получаем при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(Z_{V_n} < b + (\log n + y)q^{-1}) = \left(1 - \frac{k(b)e^{-y}}{n}(1 + o(1))\right)^n,$$

$$\log \mathbf{P}(Z_{V_n} < b+(\log n+y)q^{-1}) = n \log\left(1-\frac{k(b)e^{-y}}{n}(1+o(1))\right) = -k(b)e^{-y}(1+o(1)).$$

Тем самым приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого y при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}\Big(Z_{V_n} - b - \frac{\log n}{q} < y\Big) \to \exp\{-k(b)e^{-qy}\}.$$

Обозначим $a := \mathbf{E}T_1 = \mathbf{E}N_1 + \mathbf{E}N_2$. Здесь $\mathbf{E}N_1 < \infty$ в силу условия $\mathbf{E}X_i^{(1)} > 0$, и $\mathbf{E}N_2 < \infty$ в силу условия $\mathbf{E}X_i^{(2)} < 0$. Для каждого $t > 0$ будем обозначать через $\{t\}$ ближайшее к t целое число. Очевидно, с вероятностью единица $Z_{\{t\}} \le Z_{\{u\}}$, если $t < u$. Далее, для всякого $n \ge 1$ найдется единственное $m \ge 1$ такое, что $\{ma\} \le n \le \{(m + 1)a\}$, откуда следует

$$Z_{\{ma\}} \le Z_n \le Z_{\{(m+1)a\}}$$

с вероятностью единица.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 для любого y при $n \to \infty$ выполняется*

$$\mathbf{P}\Big(Z_{\{na\}} - b - \frac{\log n}{q} < y\Big) \to \exp\{-k(b)e^{-qy}\}.$$

Доказательство. Пусть, как и ранее, $x > 0$. В силу закона больших чисел для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_{V_n} < b + x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_{V_n} < b + x,\ |V_n/n - a| < \varepsilon)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_{V_n} < b + x,\ n(a-\varepsilon) < V_n < n(a+\varepsilon))$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_{\{n(a-\varepsilon)\}} < b+x,\ n(a-\varepsilon) < V_n < n(a+\varepsilon)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_{\{n(a-\varepsilon)\}} < b+x),$$

и одновременно

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_{V_n} < b + x) \ge \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_{\{n(a+\varepsilon)\}} < b + x,\ n(a-\varepsilon) < V_n < n(a+\varepsilon))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_{\{n(a+\varepsilon)\}} < b + x),$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_{\{n(a+\varepsilon)\}} < b + x) \le \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_{V_n} < b + x) \le \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_{\{n(a-\varepsilon)\}} < b + x).$$

Нетрудно видеть, что $Z_{\{n(a+\varepsilon)\}} - Z_{\{n(a-\varepsilon)\}} \to 0$ почти наверное при $\varepsilon \to 0$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_{V_n} < b + x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_{\{na\}} < b + x),$$

откуда следует утверждение следствия.

Далее будем анализировать ситуацию, когда распределение случайных величин X_i (напомним, что так условились обозначать $X_i^{(2)}$) имеет тяжелый правый хвост, и, следовательно, не выполнено правостороннее условие Крамéра.

Известен следующий результат ([9, стр. 337]), который сформулируем в наших терминах.

Теорема 3. *Пусть $\mathbf{P}(U_1 \ge x) > 0$ при всех x. Для того чтобы при некотором выборе нормирующих постоянных a_n распределения G_n случайных величин $a_n^{-1} \max\{U_1, \dots, U_n\}$ сходились к распределению G, не сосредоточенному в 0, необходимо и достаточно, чтобы функция $\mathbf{P}(U_1 \ge x)$ была правильно меняющейся с показателем $-\alpha < 0$. В этом случае $G(x) = \exp\{-cx^{-\alpha}\}$ при $x > 0$ и $G(x) = 0$ при $x < 0$. Здесь $c > 0$ — некоторая константа.*

Эта теорема наводит на мысль наложить условия, при которых вероятность $\mathbf{P}(U_1 \ge b + x) = \beta(b, x)$ будет иметь правильное изменение на бесконечности и воспользоваться затем приведенной теоремой. Предположим сначала, что для $u > 0$

$$\mathbf{P}(X_1 \ge u) = u^{-\alpha} L(u) > 0, \tag{1}$$

где с необходимостью $\alpha > 1$ в силу существования матожидания, а функция $L(u)$ медленно меняется на бесконечности. К сожалению, даже в этом казалось бы простом случае не удается выделить главный член асимптотики вероятности $\beta(b, x)$ при $x \to \infty$, если число b остается постоянным. В [6] установлено, что если $b = kx$ и k не зависит от x, то при выполнении условия (1)

$$\beta(kx, x) = T(x) \frac{1 - (k+1)^{-\alpha}}{|\mathbf{E} X_1|} (1 + o(1)), \qquad x \to \infty, \tag{2}$$

где

$$T(x) = \int_x^\infty u^{-\alpha} L(u)\, du.$$

Учитывая соотношение $\mathbf{P}(U_1 \geq b+x) = \beta(b,x) = \beta(kx,x)$, этот результат можно отнести к области больших уклонений одновременно для растущих значений величины U_1 и для согласованных с ними растущих значений ширины полосы в двуграничной задаче.

Известно (см., например, [9, Гл. 8, § 9]), что при $x \to \infty$

$$\frac{\int\limits_x^\infty u^{-\alpha} L(u)du}{x^{1-\alpha}L(x)} \to \frac{1}{\alpha-1}.$$

Отсюда немедленно следует, что при любом $y > 0$

$$\frac{\int\limits_{xy}^\infty u^{-\alpha} L(u)du}{\int\limits_x^\infty u^{-\alpha} L(u)du} = \frac{\int\limits_{xy}^\infty u^{-\alpha} L(u)du}{(xy)^{1-\alpha}L(xy)} \cdot \frac{(xy)^{1-\alpha}L(xy)}{x^{1-\alpha}L(x)} \cdot \frac{x^{1-\alpha}L(x)}{\int\limits_x^\infty u^{-\alpha} L(u)du} \to y^{1-\alpha}, \quad x \to \infty,$$

то есть функция $T(x)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $1-\alpha$, $T(x) = x^{1-\alpha}L_1(x)$, и $L_1(x) = L(x)(\alpha-1)^{-1}(1+o(1))$.

Таким образом, установлено следующее утверждение.

Лемма 2. *При выполнении условия* (1) *функция* $\beta(kx,x)$ *имеет вид*

$$\beta(kx,x) = x^{1-\alpha}L_0(x),$$

где L_0 *— медленно меняющаяся на бесконечности функция, равная*

$$L_0(x) = \frac{1-(k+1)^{-\alpha}}{(\alpha-1)|\mathbf{E}X_1|} L(x)(1+o(1)), \quad x \to \infty. \tag{3}$$

Итак, при выполнении условия (1) и $b = kx$ имеем

$$\mathbf{P}(Z_{V_n} - kx < x) = (1-\beta(kx,x))^n = (1-x^{1-\alpha}L_0(x))^n.$$

Пусть

$$a_n = \inf\{x : \, x^{1-\alpha}L_0(x) \leq 1/n\}. \tag{4}$$

Здесь $a_n = n^{1/(\alpha-1)}$ в частном случае, если $L_0(x) \equiv 1$. Имеем теперь $(a_n)^{1-\alpha}L_0(a_n) \sim 1/n$ при $n \to \infty$, и

$$\log \mathbf{P}(Z_{V_n} < (k+1)a_n x) = n \log(1-(a_n x)^{1-\alpha}L_0(a_n x))$$
$$\sim -n(a_n x)^{1-\alpha}L_0(a_n x) \sim -\frac{(a_n x)^{1-\alpha}L_0(a_n x)}{(a_n)^{1-\alpha}L_0(a_n)} \to -x^{1-\alpha}.$$

Итак, установлено следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (1), $b = kx$ *и* k *не зависит от* x. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(Z_{V_n} < (k+1)a_n x) \to \exp\{-x^{1-\alpha}\},$$

где a_n *определяется формулами* (3) *и* (4).

Как и в доказательстве следствия 1 получаем

Следствие 2. *В условиях теоремы* 4 *при* $n \to \infty$ *выполняется*

$$\mathbf{P}(Z_{\{na\}} < (k+1)a_n x) \to \exp\{-x^{1-\alpha}\}, \quad x > 0.$$

Аналогичные предельные теоремы для распределения $\min\{Y_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ могут быть получены симметричными рассуждениями.

References

[1] V.I. Lotov, *On a random walk with switchings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 1320–1331. Zbl 07052512

[2] V.I. Lotov, *On oscillating random walks*, Siberian Math. J., **37**:4 (1996), 764–774. Zbl 0880.60072

[3] B.V. Gnedenko, *Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire*, Ann. Math., **44** (1943), 423—453. Zbl 0063.01643

[4] N.H. Bingham, C.M. Goldie, and J.L. Teugels, *Regular Variation*, Cambridge: Cambridge University Press, 1987. Zbl 0617.26001

[5] V.I. Lotov, *On the random walks in a strip*, Theory Probab. Appl., **36**:1 (1991), 165–170. Zbl 0729.60067

[6] V.I. Lotov, *On the asymptotics of the ruin probability*, Theory Probab. Appl., **59**:1 (2015), 154–163. Zbl 1319.60093

[7] A.A. Borovkov, *Probability Theory*, London: Springer-Verlag, 2013. Zbl 1297.60002

[8] V.I. Lotov, *Bounds for the probability to leave the interval*, Statistics and Probability Letters, **145** (2019), 141–146. Zbl 1407.60029

[9] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol.2*, New York etc.: John Wiley & Sons, 1971. Zbl 0219.60003

Vladimir Ivanovich Lotov
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia,
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: lotov@math.nsc.ru