S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. A.59–A.67 (2020) УДК 517.956.32
DOI 10.33048/semi.2020.17.029 MSC 35L20

О РАБОТАХ СЕМИНАРА ПО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ ПОД РУКОВОДСТВОМ С.К. ГОДУНОВА

В.М. ГОРДИЕНКО

Abstract. In the middle of 1970s at Novosibirsk State University the S. K. Godunov seminar on hyperbolic equations started its work. The article describes the works of the participants on hyperbolic equations. The main interest was concentrated around two problems. The first is the reduction of a high-order Petrovskiĭ hyperbolic equation to a first-order Friedrichs hyperbolic symmetric system. The second probem is that if a boundary value problem is posed for a hyperbolic equation then it is required to reduce it to a symmetric system so that the posed boundary condition be dissipative.

Keywords: wave equation, mixed problem, symmetric hyperbolic system, dissipative boundary condition.

Посвящается 90-летию акдемика Сергея Константиновича Годунова

1. Общее гиперболическое уравнение

Гиперболические уравнения и системы описывают волновые процессы и поэтому играют важную роль в математической физике. Определение гиперболических уравнений и систем дал в 1937 г. И. Г. Петровский. Его определение основано на свойствах корней характеристического полинома. Он же доказал корректность задачи Коши, используя метод Фурье. В 1953 г. Ж. Лере предложил более простые доказательства результатов Петровского, обратив больше внимания на вопросы топологического характера. В 1954 г. К. Фридрихс дал

Gordienko, V.M., The works of the S.K. Godunov seminar on hyperbolic equations.

© 2020 Гордиенко В.М.

Поступила 18 декабря 2019 г., опубликована 25 марта 2020 г.

другое определение гиперболических систем, основанное на симметрии матриц и не требующее вычисление корней полиномов. Доказательство корректности задачи Коши для своих систем К. Фридрихс основывает на тождестве интеграла энергии, которое легко следует из симметрии матриц и получающихся из этого тождества априорных оценках. Перенос на младшие члены и переменные коэффициенты в системах Фридрихса значительно проще чем в системах гиперболических по Петровскому.

В середине 70-х в НГУ начал работать семинар по гиперболическим уравнениям под руководством С. К. Годунова. Был поставлен вопрос: всегда ли уравнение высокого порядка гиперболическое по Петровскому может быть сведено к симметрической системе первого порядка гиперболической по Фридрихсу [1]. К тому времени такое сведение было известно для любого гиперболического уравнения с одной пространственной переменной и для гиперболического уравнения второго порядка с любым числом переменных. Доказательство того что гиперболическое уравнений с двумя пространственными переменными сводится к симметрической системе оказалось не тривиальным. Оно было сделано С. К. Годуновым и В. И. Костиным [2] и основывалось на нетривиальной теореме Розенблата о разложении полиномов, представляющей из себя обобщение известной теоремы Фейера – Рисса. Далее В. И. Костиным [3] и Т. Ю. Михайловой [4] было показано, что к симметрической системе сводятся также гиперболические уравнения инвариантные относительно вращений и все достаточно близкие к ним. Но в общем виде ответ на вопрос об эквивалентности двух определений гиперболичности оказался отрицательным. В. В. Иванов [5] построил гиперболическое уравнение четвёртого порядка с четырьмя пространственными переменными, которое не сводилось к симметрической гиперболической по Фридрихсу системе первого порядка. Пример В. В. Иванова связан с утверждением Гильберта о существовании однородных положительных полиномов не разложимых в сумму квадратов. Однако, до сих пор не известно: может в случае трёх пространственных переменных определения всё-таки эквивалентны? Если всё-таки в трёхмерном случае определения не эквивалентны - интересно выделить класс гиперболических уравнений, сводящихся к системам Фридрихса. Может быть не сводящиеся гиперболические уравнения не встречаются в приложениях?

2. Волновое уравнение

Параллельно общим вопросам участники семинара С. К. Годунова занимались исследованием корректности граничных задач. Дело в том что, если гиперболическое уравнение сводилось к симметрической системе, то всегда не единственным способом, подробно эту неединственность, используя диаграммы Юнга, описал А. В Тыщенко [6]. Неединственность сведения уравнения к системе предлагалось использовать в теории краевых задач. Гиперболическое уравнение с краевым условием требовалось свести к такой симметрической системе, для которой поставленное граничное условие было бы диссипативным.

Первой работой семинара С. К. Годунова была работа [7], в которой рассматривалась смешанная задача для вещественного волнового уравнения с двумя и тремя пространственными переменными. Сформулируем результаты для двумерного случая — в трёхмерном они аналогичны. Постановка задачи

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0, & t > 0,\ x > 0; \\ u_t + bu_x + cu_y = 0, & x = 0; \\ u = \varphi,\ u_t = \psi, & t = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Если (b, c) принадлежат полукругу $\{b^2 + c^2 < 1,\ b > 0\}$ или лежат на прямой $\{b = 1\}$, то для поставленной задачи строится пример некорректности Адамара. В остальных случаях смешанная задача (1) сводилась к симметрической гиперболической системе с диссипативным граничным условием. При этом было два случая. Если параметры граничного условия (b, c) лежали в полуполосе $\{|c| \le 1,\ b < 0\}$, то симметрическая система, к которой сводилось волновое уравнение содержала все первые производные, а в других случаях пришлось добавить некоторые вторые производные, но не все. Таким образом, происходила потеря гладкости. Это потеря гладкости была связана с обнаружившимися в этом случае плоскими волнами волнами, распространяющимися вдоль границы быстрее скорости звука.

Когда в 1976 г. С. К. Годунов рассказывал эту работу на конференции в г. Алма-Ате, присутствовавшая там О. А. Олейник обратила внимание на работы японских математиков (в частности, Икавы и Миатаки), в которых использовалось более сильное ограничение на краевое условие — равномерное условие Лопатинского. Если условие Лопатинского — это отсутствие примеров некорректности Адамара, то равномерное условие Лопатинского — отсутствие примеров Адамара для данной задачи и для всех с достаточно близкими коэффициентами в граничном условии. Причём, надо рассматривать достаточно близкие и комплексные (b, c). Оказалось, что равномерное условие Лопатинского (в отличии от условия Лопатинского) обеспечивает сохранение гладкости и отсутствие волн бегущих вдоль границы быстрее скорости звука. В дальнейшем, мы всегда требовали выполнение равномерного условия Лопатинского. При этом мы не ограничивались формулировкой корректности в терминах корней полиномов, а стремились сформулировать его в терминах коэффициентов граничного условия, то есть решали соответствующую проблему Рауса-Гурвица.

В работе [8] В. М. Гордиенко рассматривалось обобщение задачи (1) — смешанная задача для векторного комплекснозначного волнового уравнения с двумя пространственными переменными и с комплексным граничным условием.

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{xx} - U_{yy} = 0, & t > 0, \quad x > 0; \\ AU_t + BU_x + CU_y = 0, & x = 0; \\ U = \Phi, \quad U_t = \Psi, & t = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь U — столбец из n комплекснозначных функций $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$; A, B, C - комплексные квадратные матрицы. Выяснить выполняется ли равномерное условие Лопатинского для данной задачи не так просто. Поэтому очень важно, что вопрос о равномерном условии Лопатинского для задачи (2) удалось свести к вопросу об асимптотической устойчивости следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$

$$\frac{dW}{ds} = \Lambda_{2n} W, \tag{3}$$

где $\Lambda_{2n} = \begin{bmatrix} O & I \\ \Gamma & \Delta \end{bmatrix}$, $\Gamma = -(A+C)^{-1}(A-C)$, $\Delta = 2(A+C)^{-1}B$.

Здесь I — единичная, а O— нулевая матрицы размеров $n \times n$. Для исследования асимптотической устойчивости системы (3), как известно, можно использовать матричное уравнение Ляпунова

$$\Lambda_{2n}^* H_{2n} + H_{2n}\Lambda_{2n} = -G_{2n}. \tag{4}$$

А именно, выбираем произвольно эрмитову положительно определенную матрицу G_{2n} порядка $2n$ и пытаемся решить матричное уравнение (4) относительно матрицы H_{2n}. Если это удается и матрица H_{2n} оказывается положительно определенной, то в этом случае (и только в этом случае) система (3) асимптотически устойчива и, следовательно, для задачи (2) выполнено равномерное условие Лопатинского.

В случае выполнения равномерного условия Лопатинского смешанная задача (2) сводится к смешанной задаче для симметрической гиперболической системе с диссипативным граничным условием. Причём, основывается это сведение на том же уравнении Ляпунова (4), которое участвует в исследовании корректности. Опишем конструкцию этого сведения.

Легко установить, что если вектор-функция U удовлетворяет задаче (2), то составная вектор-функция размера $3n$ из первых производных

$$\begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_t & U_x & U_y \end{bmatrix}$$

удовлетворяет следующей задаче

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} K & L & M \\ L & K & iN \\ M & -iN & K \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L & K & iN \\ K & L & M \\ -iN & M & -L \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} M & -iN & K \\ iN & -M & L \\ K & L & M \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = 0, & t > 0,\ x > 0; \\ AU_1 + BU_2 + CU_3 = 0, & x = 0; \\ U_1 = \Phi_x\,, \quad U_2 = \Phi_y\,, \quad U_t = \Psi, & t = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь K, L, M, N - произвольные (пока) матрицы размера $n \times n$. Если же матрицы K, L, M, N эрмитовы, то и составные матрицы в системе (5) тоже эрмитовы. Если, кроме того, составная матрица при $\frac{\partial}{\partial t}$ положительно определена

$$\begin{bmatrix} K & L & M \\ L & K & iN \\ M & -iN & K \end{bmatrix} > 0, \tag{6}$$

то система в (5) является симметрической t - гиперболической по Фридрихсу. Граничное условие в (5) является диссипативным, если

$$\left(\begin{bmatrix} L & K & iN \\ K & L & M \\ -iN & M & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \right) > 0 \tag{7}$$

при $AU_1 + BU_2 + CU_3 = 0, \quad ||U_1|| + ||U_2|| + ||U_3|| \neq 0.$

Таким образом, смешанная задача для волнового уравнения (2) будет сведена к смешанной задаче для симметрической гиперболической системе с диссипативным граничным условием (5), если найдутся эрмитовые матрицы K, L, M, N такие, что выполнены условия (6) и (7). Оказывается такой выбор матриц K, L, M, N всегда возможен, если для задачи (2) выполнено р. у. Л. Сформулируем это правило выбора.

Пусть задача (2) удовлетворяет р. у. Л. Как было сказано, это эквивалентно асимптотической устойчивости системы (3), что в свою очередь эквивалентно существованию матрицы $H_{2n} > 0$ – положительно определенного решения уравнения (4) (при любой $G_{2n} > 0$). Матрицы K, L, M, N следует определить так, что

$$\begin{bmatrix} K-M & -L-iN \\ -L+iN & K+M \end{bmatrix} = H_{2n}. \tag{8}$$

Это всегда можно сделать, причём, единственным способом и матрицы K, L, M, N будут эрмитовыми. При этом условие (6) будет вытекать из того, что $H_{2n} > 0$, а условие (7) из того, что $G_{2n} > 0$.

Таким образом, смешанная задача (2) или не удовлетворяет р. у. Л., или сводится к симметрической гиперболической системе с диссипативным граничным условием. Причем исследование вопроса о выполнении р. у. Л. и построение нужной симметрической гиперболической системы сводится к решению одного и того же матричного уравнения Ляпунова (4).

Эта работа была опубликована в Докладах французской Академии наук по представлению Ж. Лерэ [8]. Обнаруженная связь смешанной задачи для волнового уравнения с асимптотической устойчивостью некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений до сих пор не понята. Частный случай работы [8] $n = 1$ изложен в [9].

Сделаем еще несколько замечаний. Как уже было сказано, если $H_{2n} > 0$ и матрицы K, L, M, N определены из равенства (8), то выполнено условие (6), что обеспечивает гиперболичность системы в (5). Оказывается обратное не верно. Из условия (6) не следует положительная определенность матрицы (8). Приведем соответствующий пример: $n = 2$,

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & -l \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & m \\ m & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$\begin{bmatrix} K & L & M \\ L & K & iN \\ M & -iN & K \end{bmatrix} > 0 \quad \text{при} \quad m^2 + l^2 < 1,$$

это единичный круг в плоскости (m, l), а

$$H_{2n} = \begin{bmatrix} K-M & -L-iN \\ -L+iN & K+M \end{bmatrix} > 0 \quad \text{при} \quad |m| + |l| < 1,$$

это внутренность квадрата вписанного в этот единичный круг. Таким образом, условие

$$H_{2n} = \begin{bmatrix} K-M & -L-iN \\ -L+iN & K+M \end{bmatrix} > 0 \quad \text{у́же} \quad \text{условия} \quad \begin{bmatrix} K & L & M \\ L & K & iN \\ M & -iN & K \end{bmatrix} > 0.$$

Условие $H_{2n} > 0$ более сильное, чем условие (6), оно обеспечивает не только гиперболичность системы в (5), но и, как показал Н. Г. Марчук [10], совпадение конусов Гамильтона-Якоби векторного волнового уравнения с двумя пространственными переменными (2) и системы в (5), к которой оно сводится. Иными словами, условие $H_{2n} > 0$ обеспечивает не только гиперболичность системы в (5) (положительную определенность матрицы при $\frac{\partial}{\partial t}$) но и то, что область единственности системы в (5) совпадает с областью единственности исходного волнового уравнения.

Следующее замечание касается доказательства теоремы существования для задачи (2). Возможны два подхода. Первый состоит в том, чтобы используя сведение смешанной задачи (2) к смешанной задаче (5) получить диссипативный интеграл энергии, с его помощью — априорные оценки, и уже затем, стандартным образом (как, например, в учебнике С. К. Годунова [11]) теорему существования. Другой подход предложил Н. Г. Марчук [10, 12]. Он доказал возможность обратного перехода от задачи (5) к задаче (2). При этом существенным оказалось условие $H_{2n} > 0$, а не только то, что система в (5) симметрическая гиперболическая.

3. Граничное условие высокого порядка

Задача для векторного волнового уравнения (2) интересна сама по себе, но также она позволяет рассмотреть смешанную задачу для скалярного волнового уравнения с граничным условием высокого порядка

$$
\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0, & t > 0,\ x > 0; \\ p_n(\partial_t, \partial_x, \partial_y)u = 0, & x = 0; \\ u = \varphi,\ u_t = \psi, & t = 0. \end{cases} \tag{9}
$$

Здесь $p_n(\tau, \xi, \eta)$ — однородный полином степени n, возможно с комплексными коэффициентами. Определим полином от одной переменной $f(z) = p_n(z^2 + 1, -2z, z^2 - 1)$. В [13] показано, что смешанная задача (9) удовлетворяет равномерному условию Лопатинского тогда и только тогда, когда коэффициент при старшей степени полинома $f(z)$ не равен нулю и все его $2n$ корней лежат в левой полуплоскости $\Re z_k < 0$.

Условие того, что все корни полинома $f(z)$ лежат в левой полуплоскости, можно, пользуясь теоремой Эрмита, записать в виде условия положительной определённости вещественной симметрической матрицы порядка $2n$ с элементами, явно выраженными через коэффициенты полинома.

В случае выполнения равномерного условия Лопатинского в [13] строится симметрическая гиперболическая система с диссипативным граничным условием, которой удовлетворяет вектор, составленный из всех производных до порядка n от функции u удовлетворяющей смешанной задаче (9).

4. Гиперболическое уравнение второго порядка

В [13] также рассматривается обобщение задачи (2) — смешанная задача для системы n уравнений, у которой в главной части каждого уравнения стоит один и тот же однородный гиперболический оператор L_0, а граничное условие задано в виде системы n линейных соотношений между производными первого порядка и функциями.

$$
(10) \quad \begin{cases} L_0\left(t,x,y;\partial_t,\partial_x,\partial_y\right)U+\tilde{\Phi}U_t+\tilde{\chi}U_x+\tilde{\Psi}U_y+\tilde{\Omega}U=0\,; & t>0,\ \ x>0\,, \\ AU_t+BU_x+CU_y=0\,; & x=0\,, \\ U=\Phi\,,\quad U_t=\Psi\,; & t=0\,. \end{cases}
$$

Здесь U — вектор-функция размерности n; $\tilde{\Phi}$, $\tilde{X}$, $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Omega}$, $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$, $\tilde{S}$ — гладкие комплексные матрицы размера $n\times n$.

Для этой смешанной задачи показано, что равномерное условие Лопатинского эквивалентно асимптотической устойчивости некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$ и по квадратической функции Ляпунова этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений построена симметризация смешанной задачи (10) для составной вектор-функции (U_t,U_x,U_y,U), то есть построена симметрическая гиперболическая система с диссипативным граничным условием, которой удовлетворяет составная вектор-функция (U_t,U_x,U_y,U), если U — решение смешанной задачи (10).

В [14] аналогично [10] осуществлён обратный переход.

Случай гиперболических операторов второго порядка, требующих два граничных условия или не требующих ни одного существенно проще и рассмотрен в [15].

В [13] рассматривается также смешанная задача для гиперболического уравнения второго порядка в области $t>0$, $x>0$, $-\infty<y<\infty$:

$$
(11) \quad \begin{cases} L\left(t,x,y;\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0,\ t>0,\quad x>0, \\ B_n\left(t,y;\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0,\quad x=0. \\ \text{При } t=0 \text{ заданы начальные данные Коши.} \end{cases}
$$

$L\left(t,x,y;\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ — строго гиперболический оператор второго порядка с гладкими коэффициентами. Предполагается, что граница $x=0$ не является характеристической для оператора $L\left(t,x,y;\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ и оператор L требует одно граничное условие на границе $x=0$. $B_n\left(t,y;\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ — дифференциальный оператор степени n с комплексными гладкими коэффициентами. Начальные данные — заданные комплексно-значные гладкие функции.

Равномерное условие Лопатинского сформулировано в виде условия положительной определенности симметрической матрицы порядка $2n$ с элементами, явно выраженными через коэффициенты полиномов L и B_n.

В случае выполнения равномерного условия Лопатинского построена симметрическая гиперболическая система с диссипативным граничным условием, которой удовлетворяет вектор-функция, составленная из всех производных до порядка n от функции u, удовлетворяющей смешанной задаче (11).

В работе [16] А. Н. Малышев рассмотрел смешанную задачу для гиперболического уравнения второго порядка с многими пространственными переменными (граничное условие первого порядка). Используя преобразование Лоренца, он свел эту задачу к задаче с двумя пространственными переменными.

5. Снова о волновом уравнении

В [17] для класса систем гиперболических по Фридрихсу, к которым может быть сведено волновое уравнение построено соотношение вдоль дополнительной характеристики. Используя которое, доказано утверждение о сохранении вихря. Сформулированы условия, при которых решения систем гиперболических по Фридрихсу указанного типа являются решениями волнового уравнения.

В [18] для волнового уравнения с тремя пространственными переменными (вещественного или комплекснозначного) описаны все симметрические гиперболические по Фридрихсу системы, к которым может быть сведено волновое уравнение. Оказалось что множество таких систем образует 8-ми параметрическое семейство, а само сведение волнового уравнения к системам Фридрихса связано с кватернионами. Установлены основные свойства таких систем и правила их преобразования при преобразованиях Лоренца координат. Выделены системы у которых скорости распространения возмущений совпадают со скоростями распространения у исходного волнового уравнения.

В [19] рассматривалась смешанная задача для трёхмерного волнового уравнения, удовлетворяющей равномерному условию Лопатинского, описаны все сведения к симметрической гиперболической системе с диссипативным граничным условием. Оказалось, что множество всех способов сведения представляет собой четырёх-параметрическое множество - телесный конус второго порядка. Удалось в явном виде через коэффициенты граничного условия выразить геометрические размеры и расположение этого конуса. В [20] эти результаты обобщены на многомерный случай.

References

[1] S.K. Godunov, *The symmetrization problem for hyperpolic operators*, Uspekhi. Mat. Nauk, **38**:5 (1983), 169.

[2] S.K. Godunov, V.I. Kostin, *Reduction of a hyperbolic equation to a symmetric hyperbolic system in the case of two space variables*, Sib. Math. J., **21**:6 (1980), 755–768. Zbl 0461.35057

[3] V.I. Kostin, *On symmetrization of hyperbolic operators*, In: Correct Boundary Value Problems for Non-Classical Equations of Mathematical Physics, Collect. Artic., Novosibirsk, 1980, 112–116. Zbl 0494.35060

[4] T.Yu. Mikhajlova, *Symmetrization of invariant hyperbolic equations*, Sov. Math., Dokl., **27**, 644–648 (1983). Zbl 0555.35076

[5] V.V. Ivanov, *Strictly hyperbolic operators not admitting hyperbolic symmetrization*, In: Partial Differential Equations, Proc. Int. Conf., Novosibirsk, 1983, 84–93, Nauka, Novosibirsk, 1986.

[6] A.V. Tyshchenko, *A basis of solutions of the homogeneous Hörmander identity*, Sib. Math. J., **26**:1 (1985), 117–124. Zbl 0575.12019

[7] S.K. Godunov, V.M. Gordienko, *A mixed problem for the wave equation*, Tr. Semin. S.L. Soboleva, **2** (1977), 5–31. Zbl 0425.35068

[8] V.M. Gordienko, *Un problème mixte pour l'équation vectorielle des ondes: Cas de dissipation de l'énergie; Cas mal posés*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A, **288** (1979), 547–550. Zbl 0397.35037

[9] V.M. Gordienko, *On well-posedness of a mixed problem for the wave equation*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **7** (2010), 130–138.

[10] N.G. Marchuk, *On the existence of solutions of a mixed problem for the vector wave equation*, Sov. Math., Dokl., **21** (1980), 785–788. Zbl 0488.35050

[11] S.K. Godunov, *Equations of Mathematical Physics*, Nauka, Moscow, 1979. (in Russian)

[12] N.G. Marchuk, *The correctness of the formulation of a mixed problem for the vector wave equation*, Differ. Equations, **20** (1984), 627–631. Zbl 0559.35044

[13] V.M. Gordienko, *Symmetrization of a mixed problem for a hyperbolic equation of second order with two spatial variables*, Sib. Math. J., **22**:2 (1981), 231–248. Zbl 0473.35053

[14] N.G. Marchuk, *Existence of a solution of a mixed problem for a hyperbolic vector equation of second order*, Sib. Math. J., **23**:1 (1982), 53–64. Zbl 0599.35097

[15] O.A. Bondarenko, V.M. Gordienko, *Symmetrization of second-order vector hyperbolic equation with two space variables*, Sib. Math. J., **27**:3 (1986), 302–312. Zbl 0613.35045

[16] A.N. Malyshev,*Mixed problem for second-order hyperbolic equation with first-order complex boundary condition*, Sib. Math. J., **24**:6 (1983), 906–923. Zbl 0549.35074

[17] V.M. Gordienko, *Hyperbolic systems equivalent to the wave equation*, Sib. Mat. Zh., **50**:1 (2009), 19–27. Zbl 1224.35245

[18] V.M. Gordienko, *Friedrichs systems for the three-dimensional wave equation*, Sib. Math. J., **51**:6 (2010), 1013–1027. Zbl 1219.35133

[19] V.M. Gordienko, *Dissipativity of boundary condition in a mixed problem for the three-dimensional wave equation*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **10** (2013), 311–323. Zbl 1330.35235

[20] V.M. Gordienko, *Dissipative energy integrals in a mixed problem for the wave equation*, Mat. Zamet. YAGU, **20**:2 (2013), 23–33. Zbl 1340.35191

Valeriĭ M. Gordienko
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Novosibirsk State University,
2, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: gordienk@math.nsc.ru