S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 1073–1087 (2020) УДК 514.8, 517.983
DOI 10.33048/semi.2020.17.081 MSC 44A30

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ФУНКЦИЙ И НОРМАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ВЕКТОРНЫХ И СИММЕТРИЧНЫХ 2-ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ В $\mathbb{R}^3$

И.Е. СВЕТОВ

Abstract. We propose approach for reconstruction of a three-dimensional function from the known values of Radon transform. The approach is based on the method of approximate inverse. The obtained result is the basis of two approaches for reconstruction of a potential part of vector and symmetric 2-tensor fields, which have form $\mathrm{d}\psi$, $\psi \in H^1_0(B)$ and $\mathrm{d}^2\psi$, $\psi \in H^2_0(B)$, respectively. Here d is the inner derivation operator, which is a composition of the operators of gradient and symmetrization. Initial data for the problems are the known values of normal Radon transform. The first approach allows to recover components of potential part of fields, and the second reconstructs a potential of potential part of fields.

Keywords: tensor tomography, method of approximate inverse, adjoint operator, Radon transform, normal Radon transform, vector field, symmetric 2-tensor field, potential field, potential.

Введение

Под термином “задача трехмерной m-тензорной томографии” в данной работе подразумевается следующая постановка. Пусть некоторая ограниченная область пространства $\mathbb{R}^3$ заполнена средой без рефракции. В среде распределено некоторое симметричное m-тензорное поле ($m = 0, 1, 2$). По известным

Svetov, I.E., The method of approximate inverse for the Radon transform operator acting on functions and for the normal Radon transform operators acting on vector and symmetric 2-tensor fields in $\mathbb{R}^3$.

© 2020 Светов И.Е.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2019-0011) и при частичной поддержке РФФИ (грант 19-51-12008-ННИО_а).

Поступила 18 февраля 2019 г., опубликована 14 августа 2020 г.

значениям преобразования Радона (для $m = 0$) или нормального преобразования Радона (для $m = 1, 2$) требуется восстановить это поле. Операторы нормального преобразования Радона, действующие на векторные и симметричные 2-тензорные поля, обладают не нулевыми ядрами. Поэтому в данной работе рассматривается задача по восстановлению лишь потенциальных частей векторных и симметричных 2-тензорных полей вида $\mathrm{d}\psi$, $\psi \in H_0^1(B)$ и $\mathrm{d}^2\psi$, $\psi \in H_0^2(B)$, соответственно.

Перечислим основные математические средства, на которых базируются методы и алгоритмы решения задач трехмерной тензорной томографии. В случае отсутствия явления рефракции очень привлекательны, с математической точки зрения, формулы обращения как для восстановления функций [1], [2], так и тензорных полей [3]–[7]. В работах [8], [9] получены точные формулы обращения для нормального преобразования Радона векторных полей. Упомянем отчет [10], в котором исследован вопрос обращения преобразования Радона симметричного 2-тензорного поля и, в частности нормального преобразования Радона. Сингулярные разложения операторов преобразования Радона [11] и продольного лучевого преобразования [12], действующих на скалярные поля в $\mathbb{R}^3$, хорошо известны. В то время как разложения операторов нормального преобразования Радона векторных [13]–[15] и симметричных 2-тензорных полей [16] появились сравнительно недавно.

В данной работе предлагаются подходы решения задачи трехмерной m-тензорной томографии ($m = 0, 1, 2$), основанные на так называемом методе приближенного обращения, который развивается уже почти 30 лет А. К. Луисом и его учениками [17]–[19]. Метод применялся в том числе и для решения задач скалярной [20]–[22], векторной [23]–[27] и тензорной томографии [28], [29]. Теоретические основы метода лежат в функциональном анализе. Это теорема Рисса о представлении линейного функционала, понятие фундаментального решения и его свойства, приближение δ-функции. Идея метода приближенного обращения состоит в следующем. Пусть требуется найти решение (функцию f) операторного уравнения $Af = g$ для линейного ограниченного оператора $A : H \to K$, где H и K — Гильбертовы пространства. Для этого используются усредняющие функции e_γ^y, обладающие свойствами

$$\int_{\mathbb{R}^n} e_\gamma^y(x)\,dx = 1, \qquad \lim_{\gamma\to 0}\langle f, e_\gamma^y\rangle_H = f(y).$$

Пусть A^* — сопряженный оператор для A и функции e_γ^y лежат в пространстве образов A^*, тогда существуют функции ψ_γ^y такие, что $A^*\psi_\gamma^y = e_\gamma^y$. Следовательно, при малых γ имеем

$$f(y) \approx \langle f, e_\gamma^y\rangle_H = \langle f, A^*\psi_\gamma^y\rangle_H = \langle Af, \psi_\gamma^y\rangle_K = \langle g, \psi_\gamma^y\rangle_K.$$

Таким образом, приближенное решение строится как скалярное произведение исходных данных g и функций ψ_γ^y, нахождение которых является отдельной важной задачей (см., например, [21], [22]).

1. Определения и постановка задачи

Введем обозначения $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < 1\}$ для единичного шара, $Z = \{(s, \xi) \mid s \in [-1, 1], \xi \in \mathbb{R}^3, |\xi| = 1\}$ — для цилиндра.

Функции будем обозначать через $f(x), g(x), \dots$ Для потенциалов будут использоваться обозначения $\phi(x), \psi(x), \dots$ Множество симметричных m-тензорных полей $\mathbf{w}(x) = (w_{i_1\dots i_m}(x))$, $\mathbf{u}(x) = (u_{i_1\dots i_m}(x))$, $\mathbf{v}(x) = (v_{i_1\dots i_m}(x))$, $i_1, \dots, i_m = 1, 2, 3$, определенных в B, обозначается $S^m(B)$. Скалярное произведение в $S^m(B)$ вводится формулой

$$\langle \mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x) \rangle = \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{3} u_{i_1\dots i_m}(x) v_{i_1\dots i_m}(x).$$

Функциональное пространство $L_2(S^m(B))$ состоит из симметричных m-тензорных полей, определенных в B и обладающих интегрируемыми в квадрате компонентами. Скалярное произведение двух тензорных полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из пространства $L_2(S^m(B))$ задается формулой:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L_2(S^m(B))} = \int_B \langle \mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x) \rangle dx.$$

Пространства Соболева для симметричных m-тензорных полей обозначим через $H^k(S^m(B))$, $H^k_0(S^m(B))$. Кроме того, мы будем использовать пространство $L_2(Z)$. Скалярное произведение функций f и g из $L_2(Z)$ задается формулой:

$$\langle f, g \rangle_{L_2(Z)} = \int_Z f(s,\xi) g(s,\xi) ds\, d\xi.$$

Дифференциальные операторы. Мы будем использовать следующие операторы:

1) *Оператор внутреннего дифференцирования*

$$\mathrm{d} : H^k(S^m(B)) \to H^{k-1}(S^{m+1}(B)),$$

который действует на потенциал ψ и векторное поле $\mathbf{v}$ следующим образом:

$$(\mathrm{d}\psi)_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \qquad (\mathrm{d}\mathbf{v})_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

2) *Оператор ротора*

$$\mathrm{rot} : H^k(S^1(B)) \to H^{k-1}(S^1(B)),$$

который действует на векторное поле $\mathbf{w}$ по формуле

$$\mathrm{rot}\mathbf{w} = \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3},\ \frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right).$$

3) *Оператор дивергенции*

$$\mathrm{div} : H^k(S^{m+1}(B)) \to H^{k-1}(S^m(B)),$$

который действует на тензорное поле $\mathbf{w}$ по правилу:

$$(\mathrm{div}\, \mathbf{w})_{i_1..i_m} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial w_{i_1..i_m j}}{\partial x_j}.$$

Напомним, что m-тензорное поле $\mathbf{u} \in H^k(S^m(B))$ называется *потенциальным*, если существует $(m-1)$-тензорное поле $\mathbf{v} \in H^{k+1}(S^{m-1}(B))$ (потенциал), такое что $\mathbf{u} = \mathrm{d}\mathbf{v}$. Поле $\mathbf{w} \in H^k(S^m(B))$ называется *соленоидальным*, если $\mathrm{div}\, \mathbf{w} = 0 \in H^{k-1}(S^{m-1}(B))$. Очевидно, что векторное поле $\mathbf{w} = \mathrm{rot}\mathbf{u}$ — соленоидально. Аналогично, симметричное 2-тензорное поле $\mathbf{w}$ соленоидально, если $(w_{i1}, w_{i2}, w_{i3}) = \mathrm{rot}\, \mathbf{v}^i$, $i = 1, 2, 3$ для некоторых векторных полей $\mathbf{v}^i$.

Известно [3], что имеет место единственное разложение любого симметричного m-тензорного поля $\mathbf{v} \in L_2(S^m(B))$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathrm{d}\mathbf{u}, \tag{1}$$

где

$$\mathbf{w} \in H^1(S^m(B)), \qquad \mathrm{div}\mathbf{w} = 0, \qquad \mathbf{u} \in H_0^1(S^{m-1}(B)). \tag{2}$$

В частности, любое трехмерное векторное поле $\mathbf{v} \in L_2(S^1(B))$ может быть единственным образом представлено в виде суммы потенциальной и соленоидальной частей

$$\mathbf{v} = \mathrm{rot}\mathbf{u} + \mathrm{d}\phi, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{u} \in H^1(S^1(B)), \qquad \phi \in H_0^1(B). \tag{4}$$

Необходимо отметить, что единственность понимается в смысле слагаемых в сумме (3). В то время как векторное поле $\mathbf{u}$ определяется не единственным образом, так как для любого $g \in H^2(B)$ имеет место равенство $\mathrm{rot}(\mathrm{d}g) = 0$. Отметим работы [30]–[34], посвященные исследованию пространства трехмерных векторных полей и построению разложений для них. В частности, в последней работе предложено следующее разложение на три слагаемых

$$\mathbf{v} = \mathrm{rot}\mathbf{u} + \mathrm{d}h + \mathrm{d}\varphi, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{u} \in H^3(S^1(B)) \cap H_0^1(S^1(B)), \qquad \triangle\mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \qquad \varphi \in H_0^1(B), \tag{6}$$

$\mathbf{u}$ — единственный векторный потенциал, h — гармоническая функция (т.е., $\triangle h = \mathrm{div}(\mathrm{d}h) = 0$).

Используя (1)–(2) и учитывая (3)–(4), нетрудно получить более подробное разложение для симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{v} \in L_2(S^2(B))$

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathrm{d}(\mathrm{rot}\mathbf{u} + \mathrm{d}\phi), \tag{7}$$

где

$$\mathbf{w} \in H^1(S^2(B)), \qquad \mathrm{div}\mathbf{w} = 0, \tag{8}$$

$$\mathbf{u} \in H^2(S^1(B)), \qquad \phi \in H^2(B) \cap H_0^1(B), \qquad (\mathrm{rot}\mathbf{u} + \mathrm{d}\phi) \in H_0^1(S^1(B)). \tag{9}$$

Используя разложение (5)–(6), уточним разложение (7)–(9). Первое слагаемое в (7) поле $\mathbf{w}$ — соленоидальное симметричное 2-тензорное поле. Следовательно, векторные поля (w_{i1}, w_{i2}, w_{i3}), $i = 1, 2, 3$, составленные из компонент поля $\mathbf{w}$, — соленоидальные. Из разложения (5)–(6) следует, что поля $\mathbf{w}^i = (w_{i1}, w_{i2}, w_{i3})$, $i = 1, 2, 3$ могут быть единственным образом разложены в суммы $\mathbf{w}^i = \mathrm{rot}\mathbf{u}^i + \mathrm{d}h^i$, где $\mathbf{u}^i \in H^3(S^1(B)) \cap H_0^1(S^1(B))$, $\triangle\mathrm{div}\mathbf{u}^i = 0$ и h^i — гармонические функции. То есть, соленоидальное симметричное 2-тензорное поле $\mathbf{w}$ единственным образом может быть разложено в сумму

$$\mathbf{w} = \widetilde{\mathbf{w}} + \widetilde{\mathbf{h}}, \tag{10}$$

где для компонент полей $\widetilde{\mathbf{w}}$, $\widetilde{\mathbf{h}}$ выполнено

$$\begin{aligned} &(\widetilde{w}_{i1}, \widetilde{w}_{i2}, \widetilde{w}_{i3}) = \mathrm{rot}\mathbf{u}^i, && \mathbf{u}^i \in H^3(S^1(B)) \cap H_0^1(S^1(B)), && \triangle\mathrm{div}\mathbf{u}^i = 0, \\ &(\widetilde{h}_{i1}, \widetilde{h}_{i2}, \widetilde{h}_{i3}) = \mathrm{d}h^i, && h^i \in H^2(B), && \triangle h^i = 0, \end{aligned}$$

для $i = 1, 2, 3$. В силу симметричности поля $\widetilde{\mathbf{h}}$ имеем

$$\frac{\partial h^i}{\partial x_j} = \frac{\partial h^j}{\partial x_i}, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Поэтому существует гармоническая функция h, такая, что $h^i = \partial h / \partial x_i$. Таким образом получили, что второе слагаемое в (10) имеет вид

$$\widetilde{\mathbf{h}} = \mathrm{d}^2 h, \qquad h \in H^2(B), \qquad \triangle h = 0.$$

Наконец, применив разложение (5)–(6) ко второму слагаемому в (7), получим разложение симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{v} \in L_2(S^2(B))$

$$\mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{w}} + \mathrm{d}^2 h_1 + \mathrm{d}(\mathrm{rot}\mathbf{u} + \mathrm{d}h_2 + \mathrm{d}\phi), \tag{11}$$

где для компонент поля $\widetilde{\mathbf{w}}$ имеет место

$$(\widetilde{w}_{i1}, \widetilde{w}_{i2}, \widetilde{w}_{i3}) = \mathrm{rot}\mathbf{u}^i, \quad \mathbf{u}^i \in H^3(S^1(B)) \cap H^1_0(S^1(B)), \quad \triangle \mathrm{div}\mathbf{u}^i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

и

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u} \in H^3(S^1(B)) \cap H^1_0(S^1(B)), && \triangle \mathrm{div}\mathbf{u} = 0,\\
&h_1, h_2 \in H^2(B), && \triangle h_1 = \triangle h_2 = 0,\\
&\phi \in H^2(B) \cap H^1_0(B), && (\mathrm{rot}\mathbf{u} + \mathrm{d}h_2 + \mathrm{d}\phi) \in H^1_0(S^1(B)).
\end{aligned}$$

Отметим, что в сумме (11) три слагаемых являются потенциальными полями вида $\mathrm{d}^2\varphi$, $\varphi \in H^2(B)$.

Интегральные операторы. Плоскость $P_{\xi,s}$ в $\mathbb{R}^3$ задается нормальным уравнением $\langle \xi, x \rangle - s = 0$ для точек $x \in \mathbb{R}^3$. Здесь $|s|$ — расстояние от плоскости до начала координат, а ξ — нормальный вектор плоскости, $|\xi| = 1$.

Преобразование Радона $\mathcal{R} : L_2(\mathbb{R}^3) \to L_2(Z)$ функции $f(x)$ задается формулой

$$[\mathcal{R}f](s, \xi) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\, \delta(\langle \xi, x \rangle - s)\, dx = \int_{P_{\xi,s}} f(x)\, dx,$$

где δ — дельта-функция.

Нормальное преобразование Радона $\mathcal{R}^\perp_m : L_2(S^m(B)) \to L_2(Z)$ симметричного m-тензорного поля $\mathbf{u}(x)$ задается формулой

$$[\mathcal{R}^\perp_m \mathbf{u}](s, \xi) = \int_{\mathbb{R}^3} \langle \mathbf{u}(x), \xi^m \rangle\, \delta(\langle \xi, x \rangle - s)\, dx = \int_{P_{\xi,s}} \langle \mathbf{u}(x), \xi^m \rangle\, dx.$$

Очевидно, что преобразование Радона функции является частным случаем нормального преобразования Радона при $m = 0$. В отличие от преобразования Радона, нормальные преобразования Радона векторных ($m = 1$) и симметричных 2-тензорных полей ($m = 2$) обладают ненулевыми ядрами. В работах [14]–[16] получены описания ядер и областей значения нормальных преобразований Радона, а также связей между нормальными преобразованиями Радона векторных и тензорных полей и преобразованиями Радона их потенциалов. Приведем эти результаты в виде двух лемм.

Лемма 1. [14],[15] *Пусть векторное поле* $\mathbf{v}$ *имеет вид*

$$\mathbf{v} = \mathrm{rot}\mathbf{u} + \mathrm{d}\phi, \qquad \mathbf{u} \in H^1_0(S^1(B)), \qquad \phi \in H^1(B).$$

Тогда верны следующие утверждения.

1) *Соленоидальная часть* $\mathrm{rot}\mathbf{u}$ *векторного поля* $\mathbf{v}$ *лежит в ядре нормального преобразования Радона, т.е. имеет место следующее равенство*

$$[\mathcal{R}_1^{\perp}\mathrm{rot}\mathbf{u}](s,\xi)=0.$$

2) *Если* $\phi\in H_0^1(B)$*, тогда нормальное преобразование Радона векторного поля* $\mathbf{v}$ *связано с преобразованием Радона потенциала* ϕ *соотношением*

$$[\mathcal{R}_1^{\perp}\mathbf{v}](s,\xi)=[\mathcal{R}_1^{\perp}\mathrm{d}\phi](s,\xi)=\frac{\partial}{\partial s}[\mathcal{R}\phi](s,\xi).$$

Таким образом, по известному нормальному преобразованию Радона векторного поля можно надеяться восстановить лишь его потенциальную часть $\mathrm{d}\phi$, $\phi\in H^1(B)$.

Лемма 2. [16] *Пусть симметричное 2-тензорное поле* $\mathbf{v}$ *имеет вид*

$$\mathbf{v}=\mathbf{w}+\mathrm{d}(\mathrm{rot}\mathbf{u})+\mathrm{d}^2\phi,$$

где $\mathbf{u}\in H_0^2(S^1(B))$, $\phi\in H^2(B)$ *и для компонент соленоидальной части* $\mathbf{w}$ *симметричного 2-тензорного поля* $\mathbf{v}$ *выполнено*

$$(w_{i1},w_{i2},w_{i3})=\mathrm{rot}\,\mathbf{u}^i,\qquad \mathbf{u}^i\in H_0^1(S^1(B)),\qquad i=1,2,3.$$

Тогда верны следующие утверждения.

1) *Соленоидальная* $\mathbf{w}$ *и потенциальная* $\mathrm{d}(\mathrm{rot}\mathbf{u})$ *части симметричного 2-тензорного поля* $\mathbf{v}$ *лежат в ядре нормального преобразования Радона, т.е. имеют место следующие равенства*

$$[\mathcal{R}_2^{\perp}\mathbf{w}](s,\xi)=0,\qquad [\mathcal{R}_2^{\perp}\mathrm{d}(\mathrm{rot}\mathbf{u})](s,\xi)=0.$$

2) *Если* $\phi\in H_0^2(B)$*, тогда нормальное преобразование Радона симметричного 2-тензорного поля* $\mathbf{v}$ *связано с преобразованием Радона потенциала* ϕ *соотношением*

$$[\mathcal{R}_2^{\perp}\mathbf{v}](s,\xi)=[\mathcal{R}_2^{\perp}\mathrm{d}^2\phi](s,\xi)=\frac{\partial^2}{\partial s^2}[\mathcal{R}\phi](s,\xi).$$

Таким образом, по известному нормальному преобразованию Радона симметричного 2-тензорного поля можно надеяться восстановить лишь его потенциальную часть вида $\mathrm{d}^2\phi$, $\phi\in H^2(B)$.

Докажем два следствия приведенных выше лемм.

Следствие 1. *Преобразование Радона компонент потенциального векторного поля* $\mathrm{d}\phi$, $\phi\in H_0^1(B)$ *и нормальное преобразование Радона* $\mathrm{d}\phi$ *связаны следующими соотношениями*

$$[\mathcal{R}(\mathrm{d}\phi)_i](s,\xi)=\xi_i[\mathcal{R}_1^{\perp}\mathrm{d}\phi](s,\xi),\qquad i=1,2,3.$$

Доказательство. Используя свойство преобразования Радона (см., например, [1])

$$\left[\mathcal{R}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right](s,\xi)=\xi_i\frac{\partial}{\partial s}[\mathcal{R}\phi](s,\xi)$$

и Лемму 1 пункт 2, имеем

$$[\mathcal{R}(\mathrm{d}\phi)_i](s,\xi)=\left[\mathcal{R}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right](s,\xi)=\xi_i\frac{\partial}{\partial s}[\mathcal{R}\phi](s,\xi)=\xi_i[\mathcal{R}_1^{\perp}\mathrm{d}\phi](s,\xi).$$

□

Следствие 2. *Преобразование Радона компонент потенциального симметричного 2-тензорного поля* $\mathrm{d}^2\phi$, $\phi \in H_0^2(B)$ *и нормальное преобразование Радона* $\mathrm{d}^2\phi$ *связаны следующими соотношениями*

$$[\mathcal{R}(\mathrm{d}^2\phi)_{ij}](s,\xi) = \xi_i\xi_j[\mathcal{R}_2^{\perp}\mathrm{d}\phi](s,\xi), \qquad i,j = 1,2,3.$$

Доказательство. Аналогично доказательству Следствия 1 имеем

$$[\mathcal{R}(\mathrm{d}^2\phi)_{ij}](s,\xi) = \left[\mathcal{R}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}\right](s,\xi) = \xi_i\xi_j\frac{\partial^2}{\partial s^2}[\mathcal{R}\phi](s,\xi) = \xi_i\xi_j[\mathcal{R}_2^{\perp}\mathrm{d}^2\phi](s,\xi).$$

□

Используя формулу обращения для восстановления функции по известным значениям преобразования Радона (см., например, [2])

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2}\oint_{\mathbb{S}^2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}[\mathcal{R}f](s,\xi)\Big|_{s=\langle x,\xi\rangle}d\xi$$

и результаты, сформулированные выше в Леммах и Следствиях, нетрудно получить формулы обращения для восстановления потенциалов и компонент потенциальных векторного $\mathrm{d}\phi$, $\phi \in H_0^1(B)$ и симметричного 2-тензорного $\mathrm{d}^2\varphi$, $\varphi \in H_0^2(B)$ полей по известным значениям нормальных преобразований Радона $[\mathcal{R}_1^{\perp}\mathrm{d}\phi]$ и $[\mathcal{R}_2^{\perp}\mathrm{d}^2\varphi]$ соответственно:

$$\phi(x) = -\frac{1}{8\pi^2}\oint_{\mathbb{S}^2}\frac{\partial}{\partial s}[\mathcal{R}_1^{\perp}\mathrm{d}\phi](s,\xi)\Big|_{s=\langle x,\xi\rangle}d\xi,$$

$$(\mathrm{d}\phi)_i(x) = -\frac{1}{8\pi^2}\oint_{\mathbb{S}^2}\xi_i\frac{\partial^2}{\partial s^2}[\mathcal{R}_1^{\perp}\mathrm{d}\phi](s,\xi)\Big|_{s=\langle x,\xi\rangle}d\xi,$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{8\pi^2}\oint_{\mathbb{S}^2}[\mathcal{R}_2^{\perp}\mathrm{d}^2\varphi](s,\xi)\Big|_{s=\langle x,\xi\rangle}d\xi,$$

$$(\mathrm{d}^2\varphi)_{ij}(x) = -\frac{1}{8\pi^2}\oint_{\mathbb{S}^2}\xi_i\xi_j\frac{\partial^2}{\partial s^2}[\mathcal{R}_2^{\perp}\mathrm{d}^2\varphi](s,\xi)\Big|_{s=\langle x,\xi\rangle}d\xi.$$

Постановка задачи. В данной работе рассматриваются следующие три задачи:

1) Пусть в единичном шаре распределена некоторая функция f. Требуется по ее известному преобразованию Радона найти эту функцию.

2) Пусть в единичном шаре распределено некоторое векторное поле $\mathbf{v}$. Требуется по его известному нормальному преобразованию Радона найти потенциальную часть $\mathrm{d}\phi$ этого поля.

3) Пусть в единичном шаре распределено некоторое симметричное 2-тензорное поле $\mathbf{u}$. Требуется по его известному нормальному преобразованию Радона найти потенциальную часть вида $\mathrm{d}^2\phi$.

Для решения поставленных задач предлагаются подходы, основанные на методе приближенного обращения. Подходы по восстановлению векторных и 2-тензорных полей основываются на Леммах 1 и 2 пункты 2, и Следствиях 1 и 2, поэтому рассматриваются поля без гармонических частей. Восстановление гармонических полей является отдельной задачей (см., например, [35]), требующей дополнительного исследования.

2. Метод приближенного обращения для оператора преобразования Радона

В разделе получены результаты для преобразования Радона в $\mathbb{R}^3$. Аналогичные результаты в $\mathbb{R}^2$ получены в [21].

Двойственным оператором для преобразования Радона $\mathcal{R}$ является *оператор обратной проекции* $\mathcal{R}^*$, который определяется для функции $g(s,\xi)$, $g \in L_2(Z)$ равенством

$$\begin{aligned}[\mathcal{R}^* g](x) &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g(\langle x, \xi(\alpha,\beta)\rangle, \xi(\alpha,\beta))d\alpha\, d\beta \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g(x_1\cos\alpha\,\sin\beta + x_2\sin\alpha\,\sin\beta + x_3\cos\beta, \xi(\alpha,\beta))d\alpha\, d\beta.\end{aligned}$$

Преобразование Радона инъективно и одна из формул обращения следующая (см., например, [2])

$$f = \frac{1}{8\pi^2}\mathcal{R}^*\mathcal{I}^{-2}\mathcal{R}f, \tag{12}$$

где через $\mathcal{I}^{-2}$ обозначен *потенциал Рисса*, который определяется формулой $F_1[\mathcal{I}^{-2}g](\widetilde{s},\xi) = \widetilde{s}^{\,2}F_1[g](\widetilde{s},\xi)$. Здесь

$$F_1[g](\widetilde{s},\xi) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} g(s,\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\widetilde{s}s}ds$$

одномерное *преобразование Фурье*, действующее по переменной s.

Пусть $e \in L_2(\mathbb{R}^3)$ — функция со свойством

$$\int_{\mathbb{R}^3} e(x)dx = 1.$$

С помощью оператора сдвига и растяжения $\mathcal{T}^y_{1,\gamma} : L_2(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)$ мы образуем из функции e *моллифайер* (от английского mollifier, mollify — смягчать, сглаживать)

$$e^y_\gamma(x) = \mathcal{T}^y_{1,\gamma}e(x) = \gamma^{-3}e\left(\frac{x-y}{\gamma}\right), \qquad x, y \in \mathbb{R}^3,\ \gamma > 0.$$

Тогда имеет место равенство

$$\lim_{\gamma\to 0}\langle f, e^y_\gamma\rangle_{L_2(\mathbb{R}^3)} = f(y)$$

для функции $e^y_\gamma(x)$ и произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R}^3)$.

Для фиксированного $y \in \mathbb{R}^3$ оператор сдвига и растяжения $\mathcal{T}^y_{2,\gamma} : L_2(Z) \to L_2(Z)$ для функции $g \in L_2(Z)$ определяется формулой

$$\mathcal{T}^y_{2,\gamma}g(s,\xi) = \gamma^{-3}g\left(\frac{s - \langle y, \xi\rangle}{\gamma}, \xi\right).$$

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{T}^y_{2,\gamma}$ связан с оператором $\mathcal{T}^y_{1,\gamma}$ равенством*

$$\mathcal{R}^*\mathcal{T}^y_{2,\gamma} = \mathcal{T}^y_{1,\gamma}\mathcal{R}^*.$$

Доказательство. Имеем

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{R}^*(\mathcal{T}^y_{2,\gamma}g)](x) &= \gamma^{-3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g\left(\frac{\langle x,\xi(\alpha,\beta)\rangle - \langle y,\xi(\alpha,\beta)\rangle}{\gamma},\xi(\alpha,\beta)\right)d\alpha\,d\beta \\
&= \gamma^{-3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g\left(\left\langle\frac{x-y}{\gamma},\xi(\alpha,\beta)\right\rangle,\xi(\alpha,\beta)\right)d\alpha\,d\beta \\
&= \gamma^{-3}(\mathcal{R}^*g)\left(\frac{x-y}{\gamma}\right) = \mathcal{T}^y_{1,\gamma}[\mathcal{R}^*g](x).
\end{aligned}
$$

□

Следствие 3. *Пусть функция e лежит в пространстве образов оператора $\mathcal{R}^*$ и ψ является решением уравнения*

(13) $$\mathcal{R}^*\psi = e,$$

тогда при фиксированных γ и y функция

(14) $$\psi^y_\gamma = \mathcal{T}^y_{2,\gamma}\psi$$

является решением уравнения $\mathcal{R}^*\psi^y_\gamma = e^y_\gamma$, где e^y_γ — моллифайер.

Это утверждение следует непосредственно из Теоремы 1 и инъективности преобразования Радона.

Функция ψ^y_γ называется *ядром восстановления, ассоциированным с моллифайером* e^y_γ. Мы имеем

$$\langle f, e^y_\gamma\rangle_{L_2(\mathbb{R}^3)} = \langle f, \mathcal{R}^*\psi^y_\gamma\rangle_{L_2(\mathbb{R}^3)} = \langle \mathcal{R}f, \psi^y_\gamma\rangle_{L_2(Z)}.$$

Следовательно, мы получили формулу для приближенного обращения преобразования Радона при малых γ

(15) $$f(y) \approx \langle \mathcal{R}f, \psi^y_\gamma\rangle_{L_2(Z)}.$$

Нахождение ядер восстановления ψ^y_γ, ассоциированных с моллифаером e^y_γ, является отдельной важной задачей. Из формулы (14) следует, что для построения ядра восстановления, ассоциированного с моллифайером e^y_γ, необходимо применить оператор $\mathcal{T}^y_{2,\gamma}$ к решению уравнения (13). Решение этого уравнения может быть получено с использованием формулы обращения (12)

(16) $$\psi = \frac{1}{8\pi^2}\mathcal{I}^{-2}\mathcal{R}e.$$

Чтобы вычислить ψ по формуле (16) мы будем использовать проекционную теорему для преобразования Радона (см., например, [2]). Для $f \in L_2(\mathbb{R}^3)$ имеет место равенство

(17) $$F_1[\mathcal{R}f](\widetilde{s},\xi) = 2\pi F_3[f](\widetilde{s}\xi), \qquad \widetilde{s}\in\mathbb{R}.$$

В правой части формулы (17) используется трехмерное преобразование Фурье

$$F_3[g](\widetilde{y}) = (2\pi)^{-3/2}\int_{\mathbb{R}^3} g(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\widetilde{y},y\rangle}dy.$$

Мы не будем рассматривать функции $e(x)$ общего вида, так как для построения моллифаеров можно использовать функции инвариантные относительно вращения, то есть $e(x) = e^0(|x|)$.

Теорема 2. *Пусть функция $e(x) \in L_2(\mathbb{R}^3)$ инвариантна относительно вращения и*

$$\int_{\mathbb{R}^3} e(x)dx = 1.$$

Тогда функция

$$\psi(s) = (2\pi)^{-3/2} \int_0^\infty \widetilde{s}^2 F_3[e](\widetilde{s}\xi_0) \cos(s\widetilde{s}) d\widetilde{s}, \tag{18}$$

где $\xi_0 = (1,0,0)$, является решением уравнения (13). В частности, решение не зависит от ξ.

Доказательство. Используя (16) и проекционную теорему для преобразования Радона (17), получаем

$$F_1[\psi](\widetilde{s},\xi) = (8\pi^2)^{-1} F_1[\mathcal{I}^{-2}\mathcal{R}e](\widetilde{s},\xi) = (8\pi^2)^{-1}\widetilde{s}^2 F_1[\mathcal{R}e](\widetilde{s},\xi) = (4\pi)^{-1}\widetilde{s}^2 F_3[e](\widetilde{s}\xi).$$

Так как функция e инвариантна относительно вращения, то преобразование Фурье $F_3[e]$ также не зависит от направления, то есть $F_3[e](\widetilde{s}\xi) = F_3[e](\widetilde{s}\xi_0)$. Применяя одномерное обратное преобразование Фурье мы, наконец, получаем

$$\psi(s) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{s}^2 F_3[e](\widetilde{s}\xi_0) \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\widetilde{s}} d\widetilde{s} = (2\pi)^{-3/2} \int_0^\infty \widetilde{s}^2 F_3[e](\widetilde{s}\xi_0)\cos(s\widetilde{s})d\widetilde{s}.$$

□

Пример. Функция Гаусса

$$e_G(x) = (2\pi)^{-3/2} \exp(-|x|^2/2)$$

инвариантна относительно вращения и

$$\int_{\mathbb{R}^3} e_G(x)dx = 1.$$

Используя формулу (18) и принимая во внимание равенство

$$F_3[e_G](\widetilde{s}\xi_0) = (2\pi)^{-3/2}\exp(-\widetilde{s}^2/2),$$

вычислим ядро восстановления

$$\begin{aligned}
\psi_G(s) &= (2\pi)^{-3} \int_0^\infty \widetilde{s}^2 \exp(-\widetilde{s}^2/2)\cos(s\widetilde{s})d\widetilde{s} \\
&= -(2\pi)^{-3} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \widetilde{s}} \big(\exp(-\widetilde{s}^2/2)\big)\, \widetilde{s}\cos(s\widetilde{s})d\widetilde{s} \\
&= (2\pi)^{-3} \int_0^\infty \exp(-\widetilde{s}^2/2) \frac{\partial}{\partial \widetilde{s}} \big(\widetilde{s}\cos(s\widetilde{s})\big) d\widetilde{s} \\
&= (2\pi)^{-3} \left(\int_0^\infty \exp(-\widetilde{s}^2/2)\cos(s\widetilde{s})d\widetilde{s} - s\int_0^\infty \exp(-\widetilde{s}^2/2)\widetilde{s}\sin(s\widetilde{s})d\widetilde{s} \right) \\
&= (2\pi)^{-3} \left(\int_0^\infty \exp(-\widetilde{s}^2/2)\cos(s\widetilde{s})d\widetilde{s} + s\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \widetilde{s}} \big(\exp(-\widetilde{s}^2/2)\big) \sin(s\widetilde{s})d\widetilde{s} \right) \\
&= (2\pi)^{-3}(1-s^2) \int_0^\infty \exp(-\widetilde{s}^2/2)\cos(s\widetilde{s})d\widetilde{s} = \frac{1}{2(2\pi)^{5/2}}(1-s^2)\exp(-s^2/2).
\end{aligned}$$

На последнем шаге использовалась формула (7.4.6) из [36].

Отметим, что в случае, когда невозможно аналитически вычислить значения ядра восстановления, ассоциированного с моллифаером, для вычисления значений ядра восстановления можно воспользоваться сингулярными разложениями операторов преобразования Радона [11] и нормального преобразования Радона [13]–[16].

3. Метод приближенного обращения для оператора нормального преобразования Радона, действующего на векторные и симметричные 2-тензорные поля

В данном разделе обосновываются два подхода, основанные на методе приближенного обращения, для восстановления векторных и симметричных 2-тензорных полей. Первый подход позволяет восстановить потенциальную часть поля покомпонентно, в то время как при использовании второго подхода восстанавливается потенциал потенциальной части.

Теорема 3. *Пусть векторное поле* $\mathbf{v}$ *имеет вид* $\mathbf{v} = \mathrm{rot}\mathbf{u} + \mathrm{d}\phi$, *где* $\mathbf{u} \in H_0^1(S^1(B))$, $\phi \in H_0^1(B)$. *Тогда для приближенного восстановления компонент потенциальной части* $\mathrm{d}\phi$ *векторного поля* $\mathbf{v}$ *по известным значениям нормального преобразования Радона* $[\mathcal{R}_1^\perp \mathbf{v}](s,\xi)$ *при малых* γ *имеет место формула*

$$(\mathrm{d}\phi)_i(y) \approx \langle \mathcal{R}_1^\perp \mathbf{v}, \xi_i \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)},$$

где ψ_γ^y *— ядро восстановления для преобразования Радона.*

Доказательство. Используя формулу (15), Следствие 1 и Лемму 1 пункт 2, при малых γ имеем

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\phi)_i(y) &\approx \langle \mathcal{R}(\mathrm{d}\phi)_i, \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)} = \langle \xi_i [\mathcal{R}_1^\perp \mathrm{d}\phi], \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)} \\ &= \langle \mathcal{R}_1^\perp \mathrm{d}\phi, \xi_i \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)} = \langle \mathcal{R}_1^\perp \mathbf{v}, \xi_i \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)}.\end{aligned}$$

□

Теорема 4. *Пусть симметричное 2-тензорное поле* $\mathbf{v}$ *имеет вид* $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathrm{d}(\mathrm{rot}\mathbf{u}) + \mathrm{d}^2\phi$, *где* $\mathbf{u} \in H_0^2(S^1(B))$, $\phi \in H_0^2(B)$ *и для компонент соленоидальной части* $\mathbf{w}$ *симметричного 2-тензорного поля* $\mathbf{v}$ *выполнено* $(w_{i1}, w_{i2}, w_{i3}) = \mathrm{rot}\,\mathbf{u}^i$, $\mathbf{u}^i \in H_0^1(S^1(B))$, $i = 1,2,3$. *Тогда для приближенного восстановления компонент потенциальной части* $\mathrm{d}^2\phi$ *симметричного 2-тензорного поля* $\mathbf{v}$ *по известным значениям нормального преобразования Радона* $[\mathcal{R}_2^\perp \mathbf{v}](s,\xi)$ *при малых* γ *имеет место формула*

$$(\mathrm{d}^2\phi)_{ij}(y) \approx \langle \mathcal{R}_2^\perp \mathbf{v}, \xi_i \xi_j \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)},$$

где ψ_γ^y *— ядро восстановления для преобразования Радона.*

Доказательство. Используя формулу (15), Следствие 2 и Лемму 2 пункт 2, при малых γ имеем

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}^2\phi)_{ij}(y) &\approx \langle \mathcal{R}(\mathrm{d}\phi)_{ij}, \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)} = \langle \xi_i \xi_j [\mathcal{R}_2^\perp \mathrm{d}^2\phi], \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)} \\ &= \langle \mathcal{R}_2^\perp \mathrm{d}^2\phi, \xi_i \xi_j \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)} = \langle \mathcal{R}_2^\perp \mathbf{v}, \xi_i \xi_j \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)}.\end{aligned}$$

□

Отметим, что ядро восстановления ψ_γ^y для преобразования Радона в явном виде входит в формулы для восстановления компонент потенциальных частей векторного и симметричного 2-тензорного поля.

Для получения формул приближенного обращения операторов нормального преобразования Радона, для восстановления потенциалов потенциальных частей векторных и симметричных 2-тензорных полей, будем использовать преобразование Фурье. Имеет место равенство Парсеваля (см., например, [37])

$$\langle g,h\rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle F_1[g], F_1[h]\rangle_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{19}$$

Через $Z_0 = \{(s,\xi) : s\in\mathbb{R}, \xi\in\mathbb{R}^3, |\xi|=1\}$ обозначим бесконечный цилиндр. Пусть $g,h\in L_2(Z_0)$ и носитель как минимум одной из этих функций содержится в $Z\subset Z_0$, тогда из равенства (19) следует равенство

$$\langle g,h\rangle_{L_2(Z)} = \langle g,h\rangle_{L_2(Z_0)} = \langle F_1[g], F_1[h]\rangle_{L_2(Z_0)}. \tag{20}$$

Здесь и далее преобразование Фурье применяется по переменной s. Потребуются хорошо известные свойства преобразования Фурье для производной

$$F_1\left[\frac{\partial^k f}{\partial z^k}\right](\widetilde{z}) = (\mathrm{i}\widetilde{z})^k F_1[f](\widetilde{z}) \tag{21}$$

и свертки

$$F_1[f*g](\widetilde{z}) = \sqrt{2\pi}\,F_1[f](\widetilde{z})\cdot F_1[g](\widetilde{z}). \tag{22}$$

Теорема 5. *Пусть векторное поле* $\mathbf{v}$ *имеет вид* $\mathbf{v} = \mathrm{rot}\mathbf{u} + \mathrm{d}\phi$, *где* $\mathbf{u}\in H_0^1(S^1(B))$, $\phi\in H_0^1(B)$. *Тогда для приближенного восстановления потенциала* ϕ *потенциальной части векторного поля* $\mathbf{v}$ *по известным значениям нормального преобразования Радона* $[\mathcal{R}_1^\perp\mathbf{v}](s,\xi)$ *при малых* γ *имеет место формула*

$$\phi(y) \approx \langle \mathcal{R}_1^\perp\mathbf{v}, \Psi^y_{\gamma,1}\rangle_{L_2(Z)}.$$

Здесь

$$\Psi^y_{\gamma,1}(s,\xi) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(s) *_s \psi^y_\gamma(s,\xi), \tag{23}$$

где ψ^y_γ *— ядро восстановления для преобразования Радона,* $*_s$ *— свертка по аргументу* s.

Доказательство. Принимая во внимание Лемму 1 пункт 2 и свойство преобразования Фурье (21), получим

$$F_1[\mathcal{R}_1^\perp\mathbf{v}](\widetilde{s},\xi) = F_1[\mathcal{R}_1^\perp\mathrm{d}\phi](\widetilde{s},\xi) = F_1\left[\frac{\partial[\mathcal{R}\phi]}{\partial s}\right](\widetilde{s},\xi) = \mathrm{i}\widetilde{s}F_1[\mathcal{R}\phi](\widetilde{s},\xi). \tag{24}$$

Используя (15), для нашей задачи при малых γ получим:

$$\begin{aligned}\phi(y) &\approx \langle\mathcal{R}\phi,\psi^y_\gamma\rangle_{L_2(Z)} \overset{(20)}{=} \langle F_1[\mathcal{R}\phi], F_1[\psi^y_\gamma]\rangle_{L_2(Z_0)} = \langle \mathrm{i}\widetilde{s}\,F_1[\mathcal{R}\phi], (\mathrm{i}\widetilde{s})^{-1}F_1[\psi^y_\gamma]\rangle_{L_2(Z_0)}\\ &\overset{(24)}{=} \langle F_1\left[\mathcal{R}_1^\perp\mathbf{v}\right], (\mathrm{i}\widetilde{s})^{-1}F_1[\psi^y_\gamma]\rangle_{L_2(Z_0)} \overset{(20)}{=} \langle\mathcal{R}_1^\perp\mathbf{v}, F_1^{-1}\left[(\mathrm{i}\widetilde{s})^{-1}F_1[\psi^y_\gamma]\right]\rangle_{L_2(Z)},\end{aligned}$$

где через $F_1^{-1}[\,\cdot\,]$ обозначено одномерное обратное преобразование Фурье.

В силу равенства $(\mathrm{i}\widetilde{s})^{-1} = \sqrt{\pi/2}\,F_1[\mathrm{sgn}](\widetilde{s})$ (см., например, [38]) и свойства преобразования Фурье (22), получаем

$$F_1^{-1}\left[(\mathrm{i}\widetilde{s})^{-1}F[\psi^y_\gamma]\right](s,\xi) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(s) *_s \psi^y_\gamma(s,\xi).$$

Обозначив правую часть последнего равенства через $\Psi^y_{\gamma,1}(s,\xi)$, получим утверждение теоремы. □

Теорема 6. *Пусть симметричное 2-тензорное поле* $\mathbf{v}$ *имеет вид* $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathrm{d}(\mathrm{rot}\mathbf{u}) + \mathrm{d}^2\phi$, *где* $\mathbf{u} \in H_0^2(S^1(B))$, $\phi \in H_0^2(B)$ *и для компонент соленоидальной части* $\mathbf{w}$ *симметричного 2-тензорного поля* $\mathbf{v}$ *выполнено* $(w_{i1}, w_{i2}, w_{i3}) = \mathrm{rot}\,\mathbf{u}^i$, $\mathbf{u}^i \in H_0^1(S^1(B))$, $i = 1, 2, 3$. *Тогда для приближенного восстановления потенциала* ϕ *потенциальной части симметричного 2-тензорного поля* $\mathbf{v}$ *по известным значениям нормального преобразования Радона* $[\mathcal{R}_2^\perp \mathbf{v}](s,\xi)$ *при малых* γ *имеет место формула*

$$\phi(y) \approx \langle \mathcal{R}_2^\perp \mathbf{v}, \Psi_{\gamma,2}^y \rangle_{L_2(Z)}.$$

Здесь

$$\Psi_{\gamma,2}^y(s,\xi) = \frac{1}{2}|s| *_s \psi_\gamma^y(s,\xi), \tag{25}$$

где ψ_γ^y *— ядро восстановления для преобразования Радона.*

Доказательство Теоремы 6 аналогично доказательству Теоремы 5.

Фиксируя $y = y_0 = (0,0,0)$ и $\gamma = 1$, введем функцию

$$\Psi_m(s,\xi) = \Psi_{1,m}^{y_0}(s,\xi) = \frac{1}{2}\left(s^{m-1}\,\mathrm{sgn}(s)\right) *_s \psi(s,\xi), \qquad m = 1, 2. \tag{26}$$

Следующая теорема устанавливает связь между функциями $\Psi_{\gamma,m}^y(s,\xi)$ и $\Psi_m(s,\xi)$, $m = 1, 2$.

Теорема 7. *Для функций* $\Psi_{\gamma,m}^y(s,\xi)$ *и* $\Psi_m(s,\xi)$, $m = 1, 2$, *определенных формулами (23), (25) и (26) имеет место формула*

$$\Psi_{\gamma,m}^y(s,\xi) = \gamma^{m-3}\Psi_m\left(\frac{s - \langle y,\xi\rangle}{\gamma}, \xi\right).$$

Доказательство. Используя связь функций $\psi_\gamma^y(s,\xi)$ и $\psi(s,\xi)$, имеем равенство

$$\begin{aligned}\Psi_{\gamma,m}^y(s,\xi) &= \frac{1}{2}\left(s^{m-1}\,\mathrm{sgn}(s)\right) *_s \psi_\gamma^y(s,\xi) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(s-t)^{m-1}\,\mathrm{sgn}(s-t)\psi_\gamma^y(t,\xi)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(s-t)^{m-1}\,\mathrm{sgn}(s-t)\,\gamma^{-3}\psi\left(\frac{t-\langle y,\xi\rangle}{\gamma},\xi\right)dt.\end{aligned}$$

Сделав замену $p = (t - \langle y,\xi\rangle)/\gamma$, получим

$$\begin{aligned}\Psi_{\gamma,m}^y(s,\xi) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(s - p\gamma - \langle y,\xi\rangle)^{m-1}\,\mathrm{sgn}(s - p\gamma - \langle y,\xi\rangle)\,\gamma^{-2}\psi(p,\xi)\,dp \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma^{m-3}\left(\frac{s-\langle y,\xi\rangle}{\gamma} - p\right)^{m-1}\,\mathrm{sgn}\left(\frac{s-\langle y,\xi\rangle}{\gamma} - p\right)\psi(p,\xi)\,dp \\ &= \gamma^{m-3}\Psi_m\left(\frac{s-\langle y,\xi\rangle}{\gamma},\xi\right).\end{aligned}$$

□

Теорема 7 дает алгоритм построения функций $\Psi_{\gamma,m}^y(s,\xi)$, $m = 1, 2$.

Заключение

В работе предложен подход по восстановлению трехмерной функции по известным значениям преобразования Радона. Подход основан на методе приближенного обращения. Полученный результат был применен для получения двух подходов по восстановлению потенциальных частей трехмерных векторных и симметричных 2-тензорных полей по известным значениям нормального преобразования Радона. При использовании первого из подходов потенциальная часть поля восстанавливается покомпонентно, в то время как при использовании второго подхода восстанавливается его потенциал. Теоремы, доказанные в работе, представляют фундаментальный интерес и носят методологический характер.

References

[1] S. Deans, *The Radon transform and some of its applications*, Wiley, New York, 1983. Zbl 0561.44001

[2] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*, John Wi1ey & Sons Ltd, Stuttgart, 1986. Zbl 0617.92001

[3] V.A. Sharafutdinov, *Integral Geometry of Tensor Fields*, VSP, Utrecht, 1994. Zbl 0883.53004

[4] A. Denisjuk, *Inversion of the X-ray transform for 3D symmetric tensor fields with sources on a curve*, Inverse Probl., **22**:2 (2006), 399–411. Zbl 1089.65131

[5] V. Sharafutdinov, *Slice-by-slice reconstruction algorithm for vector tomography with incomplete data*, Inverse Probl., **23**:6 (2007), 2603–2627. Zbl 1135.65411

[6] I.E. Svetov, *Reconstruction of the solenoidal part of a three-dimensional vector field by its ray transforms along straight lines parallel to coordinate planes*, Numer. Analysis Appl., **5**:3 (2012), 271–283. Zbl 1299.65296

[7] I. Svetov, *Slice-by-slice numerical solution of 3D-vector tomography problem*, Journal of Physics: Conference Series, **410** (2013), article 012042.

[8] J.L. Prince, *Tomographic reconstruction of 3D vector fields using inner product probes*, IEEE Transactions on Image Processing, **3**:2, 216–219.

[9] N.F. Osman, J.L. Prince, *3D vector tomography on bounded domains*, Inverse Probl., **14**:1 (1998), 185–196. Zbl 0897.44002

[10] M. Defrise, G.T. Gullberg, *3D reconstruction of tensors and vectors*, Berkeley, LBNL, 2005. (Technical Report No. LBNL-54936)

[11] A.K. Louis, *Orthogonal function series expansions and the null space of the Radon transform*, SIAM J. Math. Anal., **15**:3 (1984), 621–633. Zbl 0533.42018

[12] P. Maass, *The X-ray transform: Singular value decomposition and resolution*, Inverse Probl., **3**:4 (1987), 729–741. Zbl 0636.44003

[13] A. Polyakova, *Reconstruction of potential part of 3D vector field by using singular value decomposition*, Journal of Physics: Conference Series, **410** (2013), article 012015.

[14] A.P. Polyakova, *Reconstruction of a vector field in a ball from its normal Radon transform*, J. Math. Sci., **205**:3 (2015), 418–439. Zbl 1349.65731

[15] A.P. Polyakova, I.E. Svetov, *Numerical Solution of the Problem of Reconstructing a Potential Vector Field in the Unit Ball from Its Normal Radon Transform*, J. Appl. Ind. Math., **9**:4 (2015), 547–558. Zbl 1349.65702

[16] A.P. Polyakova, I.E. Svetov, *Numerical solution of reconstruction problem of a potential symmetric 2-tensor field in a ball from its normal Radon transform*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **13** (2016), 154–174. Zbl 1342.44003

[17] A.K. Louis, P. Maass, *A mollifier method for linear operator equations of the first kind*, Inverse Probl.,**6**:3 (1990), 427–440. Zbl 0713.65040

[18] A.K. Louis, *Approximate inverse for linear and some nonlinear problems*, Inverse Probl., **12**:2 (1996), 175–190. Zbl 0851.65036

[19] T. Schuster, *The Method of Approximate Inverse: Theory and Applications*, Lecture Notes in Mathematics. **1906**, Springer, Berlin, 2007. Zbl 1171.65001

[20] A.K. Louis, T. Schuster, *A novel filter design technique in 2D computerized tomography*, Inverse Probl., **12**:5 (1996), 685–696. Zbl 0863.65085

[21] A. Rieder, T. Schuster, *The Approximate Inverse in Action with an Application to Computerized Tomography*, SIAM J. Numer. Anal., **37**:6 (2000), 1909–1929. Zbl 0961.65112

[22] E.Yu. Derevtsov, R. Dietz, A.K. Louis, T. Schuster, *Influence of refraction to the accuracy of a solution for the 2D-emission tomography problem*, J. Inverse Ill-Posed Probl., **8**:2, (2000), 161–191. Zbl 0961.65113

[23] A. Rieder, T. Schuser, *The Approximate Inverse in Action III: 3D-Doppler tomography*, Numer. Math., **97**:2 (2004), 353–378. Zbl 1071.65178

[24] T. Schuser, *Defect correction in vector field tomography: detecting the potential part of a field using BEM and implementation of the method*, Inverse Probl., **21**:1 (2005), 75–91. Zbl 1078.65123

[25] I.E. Svetov, S.V. Maltseva, A.P. Polyakova, *Approximate inversion of operators of two-dimensional vector tomography*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **13** (2016), 607–623. Zbl 1422.65465

[26] I.E. Svetov, S.V. Maltseva, A.P. Polyakova, *Numerical solution of 2D-vector tomography problem using the method of approximate inverse*, AIP Conference Proceedings, **1759** (2016), article 020132.

[27] I.E. Svetov, S.V. Maltseva, A.K. Louis, *The method of approximate inverse in slice-by-slice vector tomography problems*, Lecture Notes in Computer Science, **11974** (2020), 487–494.

[28] E.Yu. Derevtsov, A.K. Louis, S.V. Maltseva, A.P. Polyakova, I.E. Svetov, *Numerical solvers based on the method of approximate inverse for 2D vector and 2-tensor tomography problems*, Inverse Probl., **33**:12 (2017), article ID 124001. Zbl 1381.65100

[29] I.E. Svetov, A.P. Polyakova, S.V. Maltseva, *Method of Approximate Inverse for the Ray Transform Operators Acting on Two-Dimensional Symmetric m-Tensor Fields*, J. Appl. Ind. Math., **13**:1 (2019), 157–167. Zbl 07139106

[30] H. Weyl, *The method of ortogonal projection in potential theory*, Duke Math. J., **7** (1940), 411–444. Zbl 0026.02001

[31] N.E. Kochin, *Vector calculus and the beginnings of tensor calculus*, Izdatelstvo AS USSR, Moskow, 1951. Zbl 0044.17001

[32] E.B. Bykhovskii, N.V. Smirnov, *On the orthogonal decomposition of the space of vector-functions quadratically summable over a given domain and on the vector analysis operators*, Tr. Mat. Inst. Steklova, **59** (1960), 5–36. Zbl 0104.15504

[33] V. Girault, P.A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, 1986. Zbl 0585.65077

[34] W. Borchers, H. Sohr, *On the equations* $\mathrm{rot} v = g$ *and* $\mathrm{div} u = f$ *with zero boundary conditions*, Hokkaido Math. J., **19**:1 (1990), 67–87. Zbl 0719.35014

[35] I.E. Svetov, *Inversion formulas for recovering the harmonic 2D-vector field by known ray transforms*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **12** (2015), 436–446. Zbl 1344.44003

[36] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. 10th printing, with corrections*, Dover, New York, 1972. Zbl 0543.33001

[37] I. Sneddon, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, New York, 1950. Zbl 0038.26801

[38] H. Bateman, A. Erdelyi, *Tables of Integral Transforms*, **1**, McGraw-Hill, New York, 1954. Zbl 0055.36401

Ivan Evgenyevich Svetov
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: svetovie@math.nsc.ru