S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 141–160 (2020) УДК 539.311,517.958
DOI 10.33048/semi.2020.17.010 MSC 35Q74,35Q93

О РАВНОВЕСИИ ДВУСЛОЙНОЙ КОНСТРУКЦИИ С ВЕРХНИМ СЛОЕМ, НАКРЫВАЮЩИМ ВЕРШИНУ ДЕФЕКТА

И.В. ФАНКИНА

Abstract. The equilibrium problem of a two-layer elastic structure is investigated. In the lower layer there is a rectilinear defect. The upper layer covers one of the defect tips and is glued to the lower layer along its edge. Nonlinear boundary conditions are used to model the defect. Using the variational approach, the existence of a solution of the problem is established. Passages to the limit in the problem with respect to a parameter characterizing the elasticity of the upper layer, as well as to the defect damage parameter are carried out. The optimal control problem is considered, in which the cost functional is the derivative of the energy functional with respect to the defect length, and two parameters mentioned above act as control functions. The solvability of the optimal control problem is proved.

Keywords: two-layer structure, nonpenetration condition, defect, damage parameter, variational inequality, optimal control problem.

1. Введение

Рассматривается конструкция, которая состоит из двух упругих слоев. Верхний слой приклеен по своему краю к нижнему слою и накрывает одну из вершин прямолинейного дефекта, расположенного в нижнем слое. Для конструкции с дефектом формулируется задача равновесия, при этом поведение конструкции моделируется в рамках двумерной теории упругости. Для описания дефекта используются нелинейные краевые условия, предложенные в работах [1, 2, 3]. Указанные условия позволяют избежать явления взаимного

Fankina, I.V., On the equilibrium problem for a two-layer structure with the upper layer covering a defect tip.

Работа поддержана РФФИ (грант 18-29-10007).

Поступила 27 сентября 2020 г., опубликована 19 февраля 2020 г.

проникания противоположных берегов дефекта. Кроме того, в краевых условиях содержится параметр повреждаемости, который характеризует дефект: чем больше его значение, тем слабее сцепление берегов дефекта. Условия непроникания, используемые для моделирования дефектов, обобщают нелинейные краевые условия, описывающие трещины без трения на берегах.

Последние десятилетия характеризуются активным изучением задач равновесия в рамках моделей с нелинейными краевыми условиями, которые описывают поведение упругих тел и пластин с трещинами [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Задачи равновесия с краевыми условиями непроникания на берегах трещины для двуслойных конструкций впервые были рассмотрены в работах [13, 14]. В статьях [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23] изучались задачи о равновесии различных двуслойных конструкций с трещинами, для описания которых использовались линейные и нелинейные краевые условия. Накоплено обширное количество результатов исследования задач равновесия с краевыми условиями непроникания, относящихся, в частности, к вопросу о влиянии различных физических и геометрических параметров изучаемого объекта на дальнейшее развитие трещины. Для предсказания разрушения часто применяется энергетический критерий Гриффитса, в соответствии с которым трещина начнет распространяться, когда скорость освобождения энергии упругой деформации превзойдет прирост поверхностной энергии трещины [24, 25]. Другими словами, трещина в упругой среде станет развиваться, когда производная функционала энергии по длине трещины достигнет критического значения (заданный параметр, характеризующийся свойствами материала). В рамках данного подхода получены формулы производных функционала энергии по длине трещины для различных моделей упругих тел и пластин и изучен ряд соответствующих задач оптимального управления, см. например [11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 26, 27, 28, 29]. В работе [1] получена производная функционала энергии упругого тела по длине прямолинейного дефекта.

В рассматриваемой задаче равновесия установлено существование решения. Осуществлены предельные переходы в задаче по параметру, характеризующему упругость верхнего слоя, а также по параметру повреждаемости дефекта. Рассмотрена задача оптимального управления, в которой целевым функционалом является производная функционала энергии конструкции по длине дефекта, а в качестве функций управления выступают два параметра, указанные выше. Доказана разрешимость задачи оптимального управления.

2. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^2$ и $\omega \subset R^2$ – области, ограниченные липшицевыми границами $\partial\Omega$ и $\partial\omega$ (рис. 1). Области Ω и ω соответствуют упругим слоям на плоскости, в которой они контактируют. Через $\nu^b = (\nu_1^b, \nu_2^b)$ обозначается внешняя нормаль единичной длины к границе $\partial\omega$; $\tau^b = (\tau_1^b, \tau_2^b) = (-\nu_2^b, \nu_1^b)$ – касательный вектор. Множество $\gamma = (0, l) \times \{0\}$ соответствует дефекту в нижнем слое, $\bar{\gamma} \subset \Omega$; $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$. Дефект характеризуется параметром повреждаемости δ, $\delta \in (0, \infty)$. Нормаль единичной длины к γ обозначается через $\nu^d = (\nu_1^d, \nu_2^d)$, а $\tau^d = (\tau_1^d, \tau_2^d) = (-\nu_2^d, \nu_1^d)$ – касательный вектор. С помощью направления ν^d определяется знак берега $\gamma^\pm$. Аналогичным образом направление нормали ν^b

определяет знак $\partial\omega^{\pm}$. Будет использовано обозначение $[h] = h^{+} - h^{-}$ для скачка функции h на γ или $\partial\omega$, где $h^{\pm}$ – следы функции h на берегах $\gamma^{\pm}$ или $\partial\omega^{\pm}$.

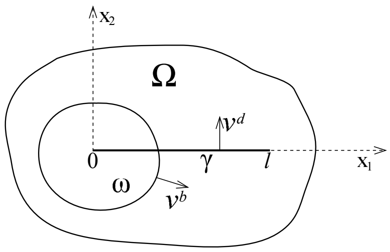

Рис. 1

Пусть $A = \{a_{ijkl}\}$ – тензор модулей упругости, обладающий свойствами симметрии и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}\ ,\ \ i,j,k,l = 1,2\ ,$$

$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq C|\xi|^2 \quad \text{для всех} \quad \xi_{ij}\ ,\ \ \xi_{ij} = \xi_{ji}\ ;\ \ C = \mathrm{const} > 0\ .$$

Предполагается, что все величины с двумя нижними индексами симметричны по этим индексам, а также по повторяющимся индексам проводится суммирование. Пусть $B = \{b_{ijkl}\}$, $i,j,k,l = 1,2$, – тензор, обладающий теми же свойствами. Считаем, что компоненты a_{ijkl} ,b_{ijkl} – постоянные.

Пусть $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ – горизонтальные смещения точек нижнего и верхнего слоя соответственно. Через $\varepsilon(w) = \{\varepsilon_{ij}(w)\}$ будет обозначаться тензор деформаций, $\varepsilon_{ij}(w) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), i,j = 1,2$. Нижний индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате. Также вводится обозначение $\sigma = \sigma(w) = \{\sigma_{ij}(w)\}$ и $p = p(w) = \{p_{ij}(w)\}$ для тензоров напряжений. Кроме того, для $P \in \{\sigma, p\}$ верно: $P\nu = (P_{1j}\nu_j, P_{2j}\nu_j)$, $P_\nu = P_{ij}\nu_j\nu_i$, $P_\tau = P_{ij}\nu_j\tau_i, i,j = 1,2$.

Задача равновесия для двуслойной упругой конструкции, в которой верхний слой накрывает одну из вершин дефекта, под действием заданных внешних сил $f \in L^2(\Omega)^2$, $g \in L^2(\omega)^2$ в дифференциальном виде формулируется следующим образом:

Найти такие функции $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $p = \{p_{ij}\}$, $i,j = 1,2$, что

(1) $$-\mathrm{div}\,\sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma \setminus \partial\omega\ ,\ \ \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma\ ,$$

(2) $$-\mathrm{div}\,p = g \quad \text{в} \quad \omega\ ,\ \ p - B\varepsilon(v) = 0 \quad \text{в} \quad \omega\ ,$$

(3) $$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\ ,\ \ u = v\ ,\ \ [\sigma\nu^b] = p\nu^b \quad \text{на} \quad \partial\omega\ ,$$

(4) $$[u_{\nu^d}] \geq 0\ ,\ \ [\sigma_{\tau^d}] = 0\ ,\ \ \sigma_{\tau^d} = \frac{1}{\delta}[u_{\tau^d}] \quad \text{на} \quad \gamma\ ,$$

(5) $$[\sigma_{\nu^d}] = 0\ ,\ \ \sigma_{\nu^d} \leq \frac{1}{\delta}[u_{\nu^d}]\ ,\ \ \left(\sigma_{\nu^d} - \frac{1}{\delta}[u_{\nu^d}]\right)[u_{\nu^d}] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma\ .$$

Соотношения (1), (2) – это уравнения равновесия и уравнения состояния для нижнего и верхнего слоя соответственно. Последние два условия в (3) соответствуют склейке слоев на $\partial\omega$. Первое условие в (4) обеспечивает непроникание противоположных берегов дефекта друг в друга. Остальные ограничения в (4) и (5) задают связь между нормальными и касательными составляющими вектора напряжений, перемещениями нижнего слоя и параметром повреждаемости дефекта на положительном берегу γ.

Наряду с дифференциальной постановкой задачи можно привести ее формулировку в вариационном виде. Для этого рассмотрим множество допустимых перемещений

$$K = \{(\bar{u},\bar{v}) \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \times H^1(\omega)^2 \ | \ [\bar{u}_{\nu^d}] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma\ , \ \bar{u} = \bar{v} \quad \text{на} \quad \partial\omega\}\ ,$$

где $H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)$ – пространство Соболева,

$$H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma) = \{\bar{u} \in H^1(\Omega_\gamma) \ | \ \bar{u} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\}\ .$$

Задача равновесия имеет следующий вариационный вид:

$$\text{Найти такую} \quad (u,v) \in K\ , \quad \text{что} \tag{6}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u}-u) + \int\limits_{\omega} p(v)\varepsilon(\bar{v}-v) - \int\limits_{\omega} g(\bar{v}-v) + \\ + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u][\bar{u}-u] \geq 0 \quad \text{для всех} \quad (\bar{u},\bar{v}) \in K\ . \tag{7}$$

Покажем, что если решение задачи (6), (7) существует, то оно является слабым решением задачи (1)-(5), а решение задачи (1)-(5) есть решение задачи (6), (7).

Теорема 1. *Формулировки* (1)-(5) *и* (6)-(7) *задачи равновесия эквивалентны на классе достаточно гладких решений.*

Доказательство. Получим формулировку (1)-(5) из (6), (7). Выбирая тестовые функции в (7) вида $(\bar{u},\bar{v}) = (u,v) \pm (\phi,\psi)$, $(\phi,\psi) \in C_0^\infty(\Omega_\gamma \setminus \partial\omega)^2 \times C_0^\infty(\omega)^2$, установим, что уравнения

$$-\mathrm{div}\,\sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma \setminus \partial\omega\ , \ -\mathrm{div}\,p = g \quad \text{в} \quad \omega$$

выполнены в смысле распределений.

Далее, пусть $(\bar{u},\bar{v}) = (u,v) + (\xi,0), (\xi,0) \in K, supp\,\xi \subset \overline{U^+}$, где U^+ – окрестность некоторой точки кривой γ (рис. 2). Проинтегрировав по частям в (7) при

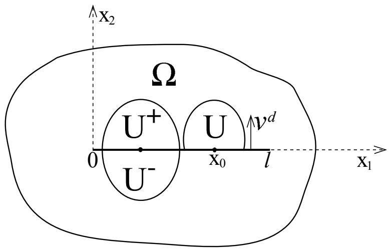

Рис. 2

тестовой функции $(\bar{u}, \bar{v})$, выбранной таким образом, получим неравенство

$$-\int\limits_{\gamma} \sigma\nu^{d+} \cdot \xi + \frac{1}{\delta} \int\limits_{\gamma} [u]\xi \geq 0 \ ,$$

которое можно представить в виде

$$-\int\limits_{\gamma} \sigma^{+}_{\nu^d} \xi_{\nu^d} - \int\limits_{\gamma} \sigma^{+}_{\tau^d} \xi_{\tau^d} + \frac{1}{\delta} \int\limits_{\gamma} [u_{\nu^d}] \xi_{\nu^d} + \frac{1}{\delta} \int\limits_{\gamma} [u_{\tau^d}] \xi_{\tau^d} \geq 0 \ . \tag{8}$$

В силу произвольности ξ_τ и неотрицательности ξ_ν из (8) следует, что

$$-\sigma^{+}_{\tau^d} + \frac{1}{\delta}[u_{\tau^d}] = 0 \ , \ \ -\sigma^{+}_{\nu^d} + \frac{1}{\delta}[u_{\nu^d}] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma \ . \tag{9}$$

Предполагая, что $supp\, \xi \subset \overline{U^-}$, где U^- – окрестность некоторой точки кривой γ (рис. 2), можно получить условия, аналогичные условиям в (9):

$$-\sigma^{-}_{\tau^d} + \frac{1}{\delta}[u_{\tau^d}] = 0 \ , \ \ -\sigma^{-}_{\nu^d} + \frac{1}{\delta}[u_{\nu^d}] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma \ . \tag{10}$$

Из условий (9) и (10) следует, что $[\sigma_{\tau^d}] = 0$ на γ.

Пусть теперь $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) \pm (\zeta, 0), \zeta \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2, [\zeta_{\nu^d}] = 0, supp\, \zeta \subset \overline{U^- \cup U^+}$, где $U^- \cup U^+$ – окрестность некоторой точки множества γ (рис. 2). Проинтегрировав по частям в (7) при таких пробных функциях $(\bar{u}, \bar{v})$, получим равенство

$$-\int\limits_{\gamma} [\sigma\nu^d \cdot \zeta] + \frac{1}{\delta} \int\limits_{\gamma} [u][\zeta] = 0 \ , \tag{11}$$

которое можно записать в следующем виде:

$$-\int\limits_{\gamma} [\sigma_{\nu^d}] \zeta_{\nu^d} - \int\limits_{\gamma} \sigma_{\tau^d} [\zeta_{\tau^d}] + \frac{1}{\delta} \int\limits_{\gamma} [u_{\tau^d}][\zeta_{\tau^d}] = 0 \ . \tag{12}$$

В силу первого условия в (10) из (12) следует равенство $[\sigma_{\nu^d}] = 0$ на γ.

Пусть для некоторой точки $x_0 \in \gamma$ выполняется условие $[u_{\nu^d}(x_0)] > 0$. Рассмотрим такую функцию $\varpi \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2$, что $supp\, \varpi \subset \overline{U}$, где U – малая окрестность точки $x_0 \in \gamma$ (рис. 2). Пусть $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) \pm (\beta\varpi, 0)$, β – малый положительный параметр, тогда $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$. Подставив поочередно выбранные таким образом функции $(\bar{u}, \bar{v})$ в (7) и далее проинтегрировав по частям, получим

$$-\int\limits_{\gamma} \sigma\nu^{d+} \varpi + \frac{1}{\delta} \int\limits_{\gamma} [u]\varpi = 0 \ ,$$

откуда следует, что $\sigma^{+}_{\nu^d}(x_0) + \frac{1}{\delta}[u_{\nu^d}(x_0)] = 0$. Предполагая, что в точке $x_1 \in \gamma$ выполняется $\sigma^{+}_{\nu^d}(x_1) + \frac{1}{\delta}[u_{\nu^d}(x_1)] < 0$, получим равенство $[u_{\nu^d}(x_1)] = 0$. Таким образом,

$$[u_{\nu^d}] \left(-\sigma^{+}_{\nu^d} + \frac{1}{\delta}[u_{\nu^d}] \right) = 0 \quad \text{на} \quad \gamma \ .$$

Выбрав в качестве тестовой функции в (7) поочередно $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) \pm (\eta, \varphi)$, где $(\eta, \varphi) \in K, [\eta_{\nu^d}] = 0$, после интегрирования по частям получим

$$-\int\limits_{\gamma} [\sigma\nu^d \cdot \eta] + \frac{1}{\delta} \int\limits_{\gamma} [u][\eta] + \int\limits_{\partial\omega} p\nu^b \cdot \varphi - \int\limits_{\partial\omega} [\sigma\nu^b]\varphi = 0 \ . \tag{13}$$

Сумма первых двух слагаемых в (13) равна нулю (см. (11)), поэтому из (13) следует равенство $p\nu^b = [\sigma\nu^b]$ на $\partial\omega$. Таким образом, все условия формулировки (1)-(5) получены из вариационной задачи (6), (7).

Получим теперь формулировку (6), (7) из (1)-(5). Пусть $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$, а (u, v) – решение задачи (1)-(5). Тогда на основе уравнений равновесия из (1) и (2) получаем равенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma \setminus \partial\omega} (-\mathrm{div}\,\sigma - f)(\bar{u} - u) + \int\limits_{\omega} (-\mathrm{div}\,p - g)(\bar{v} - v) + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u][\bar{u} - u] - \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u][\bar{u} - u] = 0\ ,$$

которое после интегрирования по частям примет вид

$$\int\limits_{\Omega_\gamma \setminus \partial\omega} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) - \int\limits_{\Omega_\gamma \setminus \partial\omega} f(\bar{u} - u) + \int\limits_{\omega} p(v)\varepsilon(\bar{v} - v) - \int\limits_{\omega} g(\bar{v} - v) +$$
$$+ \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u][\bar{u} - u] - \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u][\bar{u} - u] + \int\limits_{\gamma} [\sigma\nu^d(\bar{u} - u)] -$$
$$- \int\limits_{\partial\omega} p\nu^b(\bar{v} - v) + \int\limits_{\partial\omega} [\sigma\nu^b(\bar{u} - u)] = 0\ . \tag{14}$$

Поскольку область интегрирования $\Omega_\gamma \setminus \partial\omega$ в (14) можно заменить на Ω_γ, вариационное неравенство (7) следует из равенства (14), если выполняется неравенство

$$-\frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u][\bar{u} - u] + \int\limits_{\gamma} [\sigma\nu^d(\bar{u} - u)] - \int\limits_{\partial\omega} p\nu^b(\bar{v} - v) + \int\limits_{\partial\omega} [\sigma\nu^b(\bar{u} - u)] \le 0\ .$$

Для слагаемых в левой части последнего неравенства справедлива запись

$$-\frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u_{\nu^d}][\bar{u}_{\nu^d} - u_{\nu^d}] - \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u_{\tau^d}][\bar{u}_{\tau^d} - u_{\tau^d}] + \int\limits_{\gamma} [\sigma_{\nu^d}(\bar{u}_{\nu^d} - u_{\nu^d})] +$$
$$+ \int\limits_{\gamma} [\sigma_{\tau^d}(\bar{u}_{\tau^d} - u_{\tau^d})] - \int\limits_{\partial\omega} p\nu^b(\bar{v} - v) + \int\limits_{\partial\omega} [\sigma\nu^b(\bar{u} - u)]\ . \tag{15}$$

В силу условий (3), (4) и (5) сумма в (15) неположительна, из чего следует, что дифференциальная формулировка (1)-(5) влечет вариационную постановку (6), (7). □

Далее, рассмотрим вопрос о разрешимости задачи равновесия.

Теорема 2. *Задача равновесия* (6), (7) *имеет решение.*

Доказательство. Чтобы установить существование решения рассматриваемой задачи равновесия обратимся к ее формулировке в виде задачи минимизации функционала потенциальной энергии на множестве допустимых перемещений:

$$\text{Найти такую} \quad (u, v) \in K, \ \text{что} \quad \Pi(u, v) = \inf_{(\bar{u}, \bar{v}) \in K} \Pi(\bar{u}, \bar{v})\ . \tag{16}$$

При этом функционал энергии $\Pi(\bar{u}, \bar{v})$ имеет следующий вид:

$$\Pi(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(\bar{u})\varepsilon(\bar{u}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\bar{u} + \frac{1}{2}\int\limits_{\omega} p(\bar{v})\varepsilon(\bar{v}) - \int\limits_{\omega} g\bar{v} + \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\gamma} [\bar{u}]^2\ .$$

Задача (16) имеет решение, поскольку K - слабо замкнутое множество рефлексивного пространства $H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \times H^1(\omega)^2$, а функционал $\Pi(\bar{u},\bar{v})$ слабо полунепрерывен снизу. Кроме того функционал $\Pi(\bar{u},\bar{v})$ является коэрцитивным на множестве K. Для того, чтобы проверить коэрцитивность функционала, представим $\Pi(\bar{u},\bar{v})$ в виде

$$\Pi(\bar{u},\bar{v}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(\bar{u})\varepsilon(\bar{u}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\bar{u} + \frac{1}{2}\int\limits_{\omega} p(\bar{v})\varepsilon(\bar{v}) - \int\limits_{\omega} g\bar{v} + \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\gamma} [\bar{u}]^2 + \\ + \alpha \int\limits_{\partial\omega} \bar{v}^2 - \alpha \int\limits_{\partial\omega} \bar{v}^2 \ . \tag{17}$$

где α – положительный малый параметр, который выбирается таким образом, чтобы была справедлива теорема о следе [30, гл. 3, § 5, п. 1] и, как следствие, выполнялось неравенство:

$$\frac{1}{4}\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(\bar{u})\varepsilon(\bar{u}) - \alpha \int\limits_{\partial\omega} \bar{u}^2 \geq 0 \ . \tag{18}$$

По теореме об эквивалентном представлении нормы в пространстве Соболева из [31, гл. 1, § 1, п. 3] для слагаемых в (17) выполняется неравенство

$$\int\limits_{\omega} p(\bar{v})\varepsilon(\bar{v}) + \alpha \int\limits_{\partial\omega} \bar{v}^2 \geq C_1 \|\bar{v}\|^2_{H^1(\omega)^2} \ . \tag{19}$$

Через C_1 и используемые далее $C_2 \ldots C_{13}$ обозначаются постоянные, не зависящие от оцениваемых функций. В силу (18) и (19), с учетом того, что $\frac{1}{2\delta}\int\limits_{\gamma}[\bar{v}]^2 \geq 0$, представление (17) влечет оценку снизу:

$$\Pi(\bar{u},\bar{v}) \geq C_2\|\bar{u}\|^2_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} + C_3\|\bar{v}\|^2_{H^1(\omega)^2} - C_4\|\bar{u}\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} - C_5\|\bar{v}\|_{H^1(\omega)^2} \ ,$$

из которой следует коэрцитивность функционала энергии $\Pi(\bar{u},\bar{v})$ на множестве K. Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (16) является существование решения вариационной задачи (6), (7). Таким образом, теорема доказана. □

Поскольку было доказано, что формулировки (6)-(7) и (1)-(5) эквивалентны на классе гладких решений, решение задачи (6), (7) при достаточной гладкости будет решением задачи, сформулированной в виде (1)-(5).

3. Предельный переход по параметру, характеризующему жесткость верхнего слоя

Исследуем поведение решения задачи равновесия (6), (7) при стремлении жесткости верхнего слоя к нулю и к бесконечности. Пусть тензор модулей упругости верхнего слоя зависит от положительного параметра λ : $B_\lambda = \{\lambda^{-1}b_{ijkl}\}$. Тогда при каждом фиксированном $\lambda \in (0,\infty)$ задача (6), (7) примет вид:

(20) Найти такую $(u_\lambda, v_\lambda) \in K$, что

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda)\varepsilon(\bar u - u_\lambda) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar u - u_\lambda) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\omega} p(v_\lambda)\varepsilon(\bar v - v_\lambda) - \int\limits_{\omega} g(\bar v - v_\lambda) + {} \\ + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u_\lambda][\bar u - u_\lambda] \ge 0 \quad \text{для всех} \quad (\bar u, \bar v) \in K \ . \tag{21}$$

Рассмотрим случай, когда параметр λ стремится к нулю. Пусть $R(\omega)$ – обозначение пространства жестких инфинитезимальных перемещений:

$$R(\omega) = \{\varrho = (\varrho_1, \varrho_2) \mid \\ \varrho(x) = d(x_2, -x_1) + (c_1, c_2) \ , \ x = (x_1, x_2) \in \omega \ ; \ d, c_1, c_2 = \mathrm{const}\} \ .$$

Введем в рассмотрение множество

$$K_0 = \{(\bar u, \bar\rho) \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \times R(\omega) \mid [\bar u_{\nu^d}] \ge 0 \quad \text{на} \quad \gamma \ , \ \bar u = \bar\rho \quad \text{на} \quad \partial\omega\} \ . \tag{22}$$

Теорема 3. *Для последовательности решений* (u_λ, v_λ) *семейства задач* (20), (21) *имеют место сходимости при* $\lambda \to 0$*:*

$$u_\lambda \to u_0 \quad \textit{слабо в} \quad H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \ , \quad v_\lambda \to \rho_0 \quad \textit{слабо в} \quad H^1(\omega)^2 \ .$$

При этом функция (u_0, ρ_0) *является решением вариационной задачи:*

$$\textit{Найти такую} \quad (u_0, \rho_0) \in K_0 \ , \quad \textit{что} \tag{23}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_0)\varepsilon(\bar u - u_0) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar u - u_0) + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u_0][\bar u - u_0] - \int\limits_{\omega} g(\bar\rho - \rho_0) \ge 0 \\ \textit{для всех} \quad (\bar u, \bar\rho) \in K_0 \ . \tag{24}$$

Доказательство. В результате подстановки в (21) функций $(2u_\lambda, 2v_\lambda)$ и $(0,0)$ в качестве $(\bar u, \bar v)$ получим равенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda)\varepsilon(u_\lambda) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f u_\lambda + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u_\lambda]^2 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\omega} p(v_\lambda)\varepsilon(v_\lambda) - \int\limits_{\omega} g v_\lambda = 0 \ . \tag{25}$$

Добавляя слагаемые $\pm\alpha \int\limits_{\partial\omega} v_\lambda^2$ в (25), установим оценки, равномерные по параметру $\lambda \in (0, \lambda_0)$:

$$\|u_\lambda\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} \le C_7 \ , \ \|v_\lambda\|_{H^1(\omega)^2} \le C_8 \ . \tag{26}$$

Выбирая при необходимости подпоследовательность, можно предполагать в силу (26), что выполняются сходимости при $\lambda \to 0$:

$$u_\lambda \to u_0^* \quad \text{слабо в} \quad H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \ , \quad v_\lambda \to v_0^* \quad \text{слабо в} \quad H^1(\omega)^2 \ . \tag{27}$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\int\limits_{\omega} p(v_\lambda)\varepsilon(v_\lambda) \le C_9\lambda \ ,$$

из которого следует, что предельная функция v_0^* при $\lambda \to 0$ в области ω является функцией пространства $R(\omega)$,

$$v_0^* = \rho_0^* \in R(\omega) \ . \tag{28}$$

Выбирая $(\bar{u}, \bar{\rho}) \in K_0$ тестовой функцией в (21), перейдем к нижнему пределу при $\lambda \to 0$ на основе (27):

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_0^*)\varepsilon(\bar{u}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\bar{u} - \int\limits_{\omega} g\bar{\rho} = \liminf_{\lambda\to 0} \left(\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda)\varepsilon(\bar{u}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\bar{u} - \int\limits_{\omega} g\bar{\rho} \right) \geq$$

$$\geq \liminf_{\lambda\to 0} \left(\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda)\varepsilon(u_\lambda) + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u_\lambda][u_\lambda - \bar{u}] + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\omega} p(v_\lambda)\varepsilon(v_\lambda) - \int\limits_{\Omega_\gamma} fu_\lambda - \int\limits_{\omega} gv_\lambda \right) \geq$$

$$\geq \liminf_{\lambda\to 0} \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda)\varepsilon(u_\lambda) + \liminf_{\lambda\to 0} \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u_\lambda][u_\lambda - \bar{u}] - \liminf_{\lambda\to 0} \int\limits_{\Omega_\gamma} fu_\lambda - \liminf_{\lambda\to 0} \int\limits_{\omega} gv_\lambda \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_0^*)\varepsilon(u_0^*) + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u_0^*][u_0^* - \bar{u}] - \int\limits_{\Omega_\gamma} fu_0^* - \int\limits_{\omega} g\rho_0^* \ .$$

Полученное в пределе неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_0^*)\varepsilon(\bar{u} - u_0^*) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u_0^*) + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u_0^*][\bar{u} - u_0^*] - \int\limits_{\omega} g(\bar{\rho} - \rho_0^*) \geq 0$$

с точностью до обозначения искомой функции совпадает с вариационным неравенством (24). Кроме того, для решения (u_0^*, ρ_0^*) выполняется включение (23), и, таким образом, $(u_0^*, \rho_0^*) = (u_0, \rho_0)$. Теорема доказана. □

В эквивалентном дифференциальном виде задача (23), (24) выглядит следующим образом:
Найти такие функции u_0, $\sigma(u_0) = \{\sigma(u_0)_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, $\rho_0 \in R(\omega)$ что

$$-\operatorname{div}\sigma(u_0) = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma \setminus \partial\omega \ , \ \ \sigma(u_0) - A\varepsilon(u_0) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma \ ,$$

$$u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \ , \ \ u_0 = \rho_0 \quad \text{на} \quad \partial\omega \ ,$$

$$[u_{0\nu^d}] \geq 0 \ , \ \ [\sigma(u_0)_{\tau^d}] = 0 \ , \ \ \sigma(u_0)_{\tau^d} = \frac{1}{\delta}[u_{0\tau^d}] \quad \text{на} \quad \gamma \ ,$$

$$[\sigma(u_0)_{\nu^d}] = 0 \ , \ \ \sigma(u_0)_{\nu^d} \leq \frac{1}{\delta}[u_{0\nu^d}] \ , \ \ \left(\sigma(u_0)_{\nu^d} - \frac{1}{\delta}[u_{\nu^d}]\right)[u_{0\nu^d}] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma \ ,$$

$$\int\limits_{\partial\omega} [\sigma(u_0)\nu^b]\bar{\rho} + \int\limits_{\omega} g\bar{\rho} = 0 \quad \text{для всех} \quad \bar{\rho} \in R(\omega) \ .$$

Предельная задача (23), (24) описывает равновесие двуслойной конструкции, в которой верхний жесткий слой накрывает дефект в нижнем упругом слое.

Рассмотрим теперь случай, когда параметр λ стремится к бесконечности. Определим множество допустимых перемещений K_∞:

$$K_\infty = \{\bar{u} \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \ | \ [\bar{u}_{\nu^d}] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma\} \ .$$

Теорема 4. *Пусть $g = 0$. Для последовательности решений u_λ семейства задач* (20), (21) *имеет место сходимость при $\lambda \to \infty$:*

$$u_\lambda \to u_\infty \quad \text{слабо в} \quad H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \ .$$

При этом функция u_∞ является решением вариационной задачи:

(29) *Найти такую* $u_\infty \in K_\infty$, *что*

$$(30)\qquad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\infty)\varepsilon(\bar u - u_\infty) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar u - u_\infty) + \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u_\infty][\bar u - u_\infty] \geq 0$$

$$\text{для всех} \quad \bar u \in K_\infty \ .$$

Доказательство. При $g = 0$ равенство (25) примет вид:

$$(31)\qquad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda)\varepsilon(u_\lambda) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f u_\lambda + \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u_\lambda]^2 + \frac{1}{\lambda}\int\limits_\omega p(v_\lambda)\varepsilon(v_\lambda) = 0 \ .$$

Из равенства (31) получим оценки, равномерные по $\lambda \in (\lambda_0, \infty)$:

$$\|u_\lambda\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} \leq C_{10} \ , \ \frac{1}{\lambda}\|v_\lambda\|^2_{H^1(\omega)^2} \leq C_{11} \ ,$$

которые влекут сходимости при $\lambda \to \infty$

$$(32)\qquad u_\lambda \to u^*_\infty \quad \text{слабо в} \quad H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \ , \ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} v_\lambda \to v^*_\infty \quad \text{слабо в} \quad H^1(\omega)^2 \ .$$

Выберем функцию $\bar u \in K_\infty$ и продолжим ее в область ω следующим образом: $\bar u = \bar v$ на $\partial\omega$, $\bar v \in H^1(\omega)^2$. Тогда $(\bar u, \bar v) \in K$. Подставив полученную функцию $(\bar u, \bar v)$ в качестве тестовой в (21), перейдем к нижнему пределу при $\lambda \to \infty$ на основе (32):

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^*_\infty)\varepsilon(\bar u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\bar u = \liminf_{\lambda\to\infty}\left(\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda)\varepsilon(\bar u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\bar u\right) \geq$$

$$\geq \liminf_{\lambda\to\infty}\left(\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda)\varepsilon(u_\lambda) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f u_\lambda + \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u_\lambda][u_\lambda - \bar u] + \frac{1}{\lambda}\int\limits_\omega p(v_\lambda)\varepsilon(v_\lambda - \bar v)\right) \geq$$

$$\geq \liminf_{\lambda\to\infty}\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_\lambda)\varepsilon(u_\lambda) - \liminf_{\lambda\to\infty}\int\limits_{\Omega_\gamma} f u_\lambda + \liminf_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u_\lambda][u_\lambda - \bar u] - \liminf_{\lambda\to\infty}\int\limits_\omega p(v_\lambda)\varepsilon(\bar v) \geq$$

$$\geq \sigma(u^*_\infty)\varepsilon(u^*_\infty) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f u^*_\infty + \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u^*_\infty][u^*_\infty - \bar u] \ .$$

Таким образом, в пределе получено неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^*_\infty)\varepsilon(\bar u - u^*_\infty) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar u - u^*_\infty) + \frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma [u^*_\infty][\bar u - u^*_\infty] \geq 0 \ ,$$

которое совпадает с неравенством (30). При этом предельная функция u^*_∞ является элементом множества K_∞, поэтому $u^*_\infty = u_\infty$. Теорема доказана. □

Предельная вариационная задача (29), (30) представляет собой задачу равновесия упругого тела с дефектом. Исследование аналогичной задачи можно найти в работе [1].

4. Предельный переход по параметру повреждаемости дефекта

Исследуем вопрос о поведении решения задачи равновесия двуслойной упругой конструкции с дефектом при стремлении параметра повреждаемости дефекта δ к нулю и к бесконечности. При каждом фиксированном $\delta \in (0, \infty)$ задача равновесия (6), (7) имеет вид:

$$\text{Найти такую} \quad (u^\delta, v^\delta) \in K \ , \quad \text{что} \tag{33}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta)\varepsilon(\bar{u} - u^\delta) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\delta) + \int\limits_{\omega} p(v^\delta)\varepsilon(\bar{v} - v^\delta) - \int\limits_{\omega} g(\bar{v} - v^\delta) + \\ + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u^\delta][\bar{u} - u^\delta] \geq 0 \quad \text{для всех} \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in K \ . \tag{34}$$

В результате поочередной подстановки функций $(\bar{u}, \bar{v}) = (0, 0)$ и $(\bar{u}, \bar{v}) = 2(u, v)$ в неравенство (34) получим равенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta)\varepsilon(u^\delta) + \int\limits_{\omega} p(v^\delta)\varepsilon(v^\delta) + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u^\delta]^2 = \int\limits_{\Omega_\gamma} f u^\delta + \int\limits_{\omega} g v^\delta \ ,$$

из которого следуют равномерные по $\delta \in (0, \infty)$ оценки

$$\|u^\delta\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} \leq C_7 \ , \ \|v^\delta\|_{H^1(\omega)^2} \leq C_8 \ , \tag{35}$$

а также

$$\|[u^\delta]\|_{L^2(\gamma)} \leq C_{12}\delta \ . \tag{36}$$

Постоянные C_7 и C_8 в оценках (35) те же, что и в (26), поскольку они зависят только от функций f, g и областей Ω_γ, ω: $C_7 = C_7(\Omega_\gamma, f)$ и $C_8 = C_8(\omega, g)$. Рассмотрим случай, когда параметр δ стремится к нулю. Для этого введем множество

$$K^0 = \{(\tilde{u}, \tilde{v}) \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega)^2 \times H^1(\omega)^2 \ | \ \tilde{u} = \tilde{v} \quad \text{на} \quad \partial\omega\} \ .$$

Теорема 5. *Для последовательности решений (u^δ, v^δ) семейства задач (33), (34) имеют место сходимости при $\delta \to 0$:*

$$u^\delta \to u^0 \quad \textit{слабо в} \quad H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \ , \quad v^\delta \to v^0 \quad \textit{слабо в} \quad H^1(\omega)^2 \ ,$$
$$[u^\delta] \to 0 \quad \textit{сильно в} \quad L^2(\gamma) \quad \big([u^0] = 0 \quad \textit{п.в. на} \quad \gamma\big) \ .$$

При этом функция (u^0, v^0) является решением вариационной задачи

$$\textit{Найти такую} \quad (u^0, v^0) \in K^0 \ , \quad \textit{что} \tag{37}$$

$$\int\limits_{\Omega} \sigma(u^0)\varepsilon(\bar{u}) - \int\limits_{\Omega} f\tilde{u} - \int\limits_{\omega} p(v^0)\varepsilon(\tilde{v}) - \int\limits_{\omega} g\tilde{v} = 0 \quad \textit{для всех} \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) \in K^0 \ , \tag{38}$$

Доказательство. С учетом оценок (35) и (36) можно предполагать, что при $\delta \to 0$ выполняются сходимости

$$u^\delta \to u^0_* \quad \text{слабо в} \quad H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \ , \quad v^\delta \to v^0_* \quad \text{слабо в} \quad H^1(\omega)^2 \ , \tag{39}$$

$$[u^\delta] \to 0 \quad \text{сильно в} \quad L^2(\gamma) \quad \big([u^0_*] = 0 \quad \text{п.в. на} \quad \gamma\big) \ . \tag{40}$$

В силу сходимостей (39) и (40) предельная функция (u_*^0, v_*^0) является элементом множества K^0. Пусть $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in K^0$. Подставив в (34) в качестве тестовой функции поочередно $(\bar{u}, \bar{v}) = (u^\delta, v^\delta) \pm (\tilde{u}, \tilde{v})$, получим равенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta)\varepsilon(\tilde{u}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\tilde{u} + \int\limits_{\omega} p(v^\delta)\varepsilon(\tilde{v}) - \int\limits_{\omega} g\tilde{v} = 0 \ . \tag{41}$$

Учитывая сходимости (39) и (40), перейдем к нижнему пределу в (33) и (41) при $\delta \to 0$. В пределе получим вариационную задачу вида

$$\text{Найти такую} \quad (u_*^0, v_*^0) \in K^0 \ , \quad \text{что}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_*^0)\varepsilon(\bar{u}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\tilde{u} - \int\limits_{\omega} p(v_*^0)\varepsilon(\tilde{v}) - \int\limits_{\omega} g\tilde{v} = 0 \quad \text{для всех} \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) \in K^0 \ .$$

Предельная задача совпадает с задачей (37), (38), поскольку $[u_*^0] = 0$ на γ. Таким образом, $(u_*^0, v_*^0) = (u^0, v^0)$. Теорема доказана. □

При условии достаточной гладкости решения задачи (37), (38) оно будет решением дифференциальной задачи:
Найти такие функции u^0, v^0, $\sigma(u^0) = \{\sigma(u^0)_{ij}\}$, $p(v^0) = \{p(v^0)_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, что

$$-\operatorname{div}\sigma(u^0) = f \quad \text{в} \quad \Omega \setminus \partial\omega \ , \ \ \sigma(u^0) - A\varepsilon(u^0) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \ ,$$
$$-\operatorname{div} p(v^0) = g \quad \text{в} \quad \omega \ , \ \ p(v^0) - B\varepsilon(v^0) = 0 \quad \text{в} \quad \omega \ ,$$
$$u^0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \ , \ \ u^0 = v^0 \ , \ \ [\sigma(u^0)\nu^b] = p(v^0)\nu^b \quad \text{на} \quad \partial\omega \ .$$

Задача (37), (38) описывает равновесие двуслойной упругой конструкции без дефекта.

Обратимся к случаю, когда параметр δ стремится к бесконечности, и покажем, что верно следующее утверждение.

Теорема 6. *Для последовательности решений (u^δ, v^δ) семейства задач (33), (34) имеют место сходимости при $\delta \to \infty$:*

$$u^\delta \to u^\infty \quad \textit{слабо в} \quad H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \ , \quad [u^\delta] \to [u^\infty] \quad \textit{слабо в} \quad L^2(\gamma) \ ,$$
$$v^\delta \to v^\infty \quad \textit{слабо в} \quad H^1(\omega)^2 \ .$$

При этом функция (u^∞, v^∞) является решением вариационной задачи

$$\textit{Найти такую} \quad (u^\infty, v^\infty) \in K \ , \quad \textit{что} \tag{42}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\infty)\varepsilon(\bar{u} - u^\infty) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\infty) + \int\limits_{\omega} p(v^\infty)\varepsilon(\bar{v} - v^\infty) - \int\limits_{\omega} g(\bar{v} - v^\infty) \geq 0 \quad \textit{для всех} \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in K \ . \tag{43}$$

Доказательство. Поскольку для нормы функции u^δ верна оценка (35), по теореме вложения имеем

$$\|[u^\delta]\|_{L^2(\gamma)} \leq C_{13} \ . \tag{44}$$

Оценки в (35) и (44) влекут сходимости при $\delta \to \infty$:

$$u^\delta \to u_*^\infty \quad \text{слабо в} \quad H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \ , \quad [u^\delta] \to [u_*^\infty] \quad \text{слабо в} \quad L^2(\gamma) \ , \tag{45}$$

а также

$$v^\delta \to v_*^\infty \quad \text{слабо в} \quad H^1(\omega)^2 \ . \tag{46}$$

В силу сходимостей (45) и (46) предельная функция (u_*^∞, v_*^∞) принадлежит множеству K. Осуществляя переход к нижнему пределу в задаче (33), (34) на основе (45) и (46), получим вариационную задачу в виде (42), (43) с точностью до обозначения, $(u_*^\infty, v_*^\infty) = (u^\infty, v^\infty)$. □

Предельная задача (42), (43) описывает равновесие двуслойной упругой конструкции, в которой верхний слой накрывает одну из вершин трещины в нижнем слое. Исследование подобных задач проводилось в работах [13, 21, 22].

5. Задача оптимального управления

В рамках критерия Гриффитса рассмотрим задачу оптимального управления для двуслойной конструкции с дефектом. В соответствии с критерием дефект в нижнем слое начнет распространяться, когда производная функционала энергии по длине дефекта достигнет критического значения κ (заданного параметра, который определяется свойствами материала). Функциями управления выберем параметры δ и λ, характеризующие повреждаемость дефекта и упругость верхнего слоя конструкции соответственно. При этом параметры (δ, λ) принадлежат множеству $[\delta_0, \delta_1] \times [0, \lambda_0]$; $0 < \delta_0 < \delta_1 < \infty$, $0 < \lambda_0 < \infty$. Задача заключается в том, чтобы найти такую пару значений параметров (δ, λ), при которой производная функционала энергии по длине дефекта будет принимать значение, наиболее удаленное от критического.

Выпишем формулу для функционала качества. Чтобы формула для производной функционала энергии имела смысл, далее предполагается, что $f \in C^1(\overline{\Omega})^2$. При каждой фиксированной паре параметров $(\delta, \lambda) \in [\delta_0, \delta_1] \times (0, \lambda_0]$ задача равновесия двуслойной упругой конструкции с дефектом в виде задачи минимизации функционала энергии выглядит следующим образом:

$$\text{Найти такую} \quad (u_\lambda^\delta, v_\lambda^\delta) \in K \ , \ \text{что} \quad \bar\Pi(u_\lambda^\delta, v_\lambda^\delta) = \inf_{(\bar u, \bar v) \in K} \bar\Pi(\bar u, \bar v) \ . \tag{47}$$

При этом функционал энергии $\bar\Pi(\bar u, \bar v)$ имеет вид:

$$\bar\Pi(\bar u, \bar v) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(\bar u)\varepsilon(\bar u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\bar u + \frac{1}{2\lambda} \int\limits_{\omega} p(\bar v)\varepsilon(\bar v) - \int\limits_{\omega} g\bar v + \frac{1}{2\delta} \int\limits_{\gamma} [\bar u]^2 \ .$$

Рассмотрим задачу, возмущенную по отношению к задаче (47). Пусть $\gamma_t = (0, l+t) \times \{0\}$ - обозначение для дефекта, возмущенного вдоль оси Ox_1 с помощью малого параметра $t \geq 0$, $\Omega_{\gamma_t} = \Omega \setminus \overline{\gamma_t}$. Задача минимизации функционала энергии, формулируемая в возмущенной области, имеет вид:

$$\text{Найти такую} \quad (u_\lambda^{\delta t}, v_\lambda^{\delta t}) \in K_t \ , \ \text{что} \quad \bar\Pi_t(u_\lambda^{\delta t}, v_\lambda^{\delta t}) = \inf_{(\bar u, \bar v) \in K_t} \bar\Pi_t(\bar u, \bar v) \ .$$

При этом функционал энергии $\bar\Pi_t(\bar u, \bar v)$ определяется следующим образом:

$$\bar\Pi_t(\bar u, \bar v) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{\gamma_t}} \sigma(\bar u)\varepsilon(\bar u) - \int\limits_{\Omega_{\gamma_t}} f\bar u + \frac{1}{2\lambda} \int\limits_{\omega} p(\bar v)\varepsilon(\bar v) - \int\limits_{\omega} g\bar v + \frac{1}{2\delta} \int\limits_{\gamma_t} [\bar u]^2 \ ,$$

а множество допустимых перемещений K_t такое:

$$K_t = \{(\bar u, \bar v) \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_{\gamma_t})^2 \times H^1(\omega)^2 \ | \ [\bar u_{\nu^d}] \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma_t \ , \ \bar u = \bar v \quad \text{на} \quad \partial\omega\} \ .$$

При введенных обозначениях производная функционала энергии по параметру возмущения длины дефекта t при $t=0$

$$G(\delta,\lambda)=\lim_{t\to 0}\frac{\bar\Pi_t(u_\lambda^{\delta t},v_\lambda^{\delta t})-\bar\Pi(u_\lambda^\delta,v_\lambda^\delta)}{t}$$

существует, и формула для нее имеет вид:

$$(48)\quad G(\delta,\lambda)= \\ =\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma_{ij}(u_\lambda^\delta)\varepsilon_{ij}(u_\lambda^\delta)\theta_{,1}-\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma_{ij}(u_\lambda^\delta)u_{\lambda i,1}^\delta\theta_{,j}-\int\limits_{\Omega_\gamma}(\theta f_i)_{,1}u_{\lambda i}^\delta+\frac{1}{2\delta}\int\limits_\gamma[u_\lambda^\delta]^2\theta_{,1}\ .$$

При этом θ – гладкая функция, $\theta=1$ в некоторой малой окрестности точки $(l,0)$, а вне этой окрестности $\theta=0$. Значение $G(\delta,\lambda)$ не зависит от выбора функции θ. Формула (48) совпадает с формулой производной функционала энергии по длине дефекта, полученной в работе [1] для упругого тела с дефектом. Формула для производной $G(\delta,0),\delta\in[\delta_0,\delta_1]$, выглядит аналогичным образом, поэтому формула (48) справедлива при $(\delta,\lambda)\in[\delta_0,\delta_1]\times[0,\lambda_0]$.

Известно, что для любой пары $(\delta,\lambda)\in[\delta_0,\delta_1]\times[0,\lambda_0]$ производная $G(\delta,\lambda)$ принимает неположительные значения, а критическое значение κ всегда отрицательно. Поэтому в рамках выбранного подхода задача оптимального управления формулируется следующим образом:

$$(49)\quad \text{Найти}\quad (\delta^\star,\lambda^\star)\in[\delta_0,\delta_1]\times[0,\lambda_0]\quad\text{так, что}\\ G(\delta^\star,\lambda^\star)=\sup_{(\delta,\lambda)\in[\delta_0,\delta_1]\times[0,\lambda_0]}G(\delta,\lambda)\ .$$

Теорема 7. *Задача оптимального управления* (49) *имеет решение.*

Доказательство. Пусть $\{(\delta^n,\lambda^n)\}_{n\in\mathbb{N}}\subset[\delta_0,\delta_1]\times[0,\lambda_0]$ – максимизирующая последовательность. В силу компактности множества $[\delta_0,\delta_1]\times[0,\lambda_0]\subset R^2$ из последовательности $\{(\delta^n,\lambda^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, элементы которой обозначим так же: $\{(\delta^n,\lambda^n)\}_{n\in\mathbb{N}}\to(\delta^*,\lambda^*)$, $n\to\infty,(\delta^*,\lambda^*)\in[\delta_0,\delta_1]\times[0,\lambda_0]$. Для простоты записи далее будет использовано обозначение $(\delta,\lambda)\to(\delta^*,\lambda^*)$ вместо $\{(\delta^n,\lambda^n)\}_{n\in\mathbb{N}}\to(\delta^*,\lambda^*),\ n\to\infty$. Рассмотрев следующие случаи:

1. $(\delta,\lambda)\to(\delta',\lambda'),\ \delta'\in[\delta_0,\delta_1],\lambda'\in(0,\lambda_0]$,
2. $(\delta,\lambda)\to(\delta',0),\ \delta'\in[\delta_0,\delta_1]$,

докажем утверждение теоремы.

При каждой фиксированной паре (δ,λ) задача минимизации (47) имеет эквивалентный вариационный вид:

$$(50)\qquad \text{Найти такую}\quad (u_\lambda^\delta,v_\lambda^\delta)\in K\ ,\quad\text{что}$$

$$(51)\quad \int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u_\lambda^\delta)\varepsilon(\bar u-u_\lambda^\delta)-\int\limits_{\Omega_\gamma}f(\bar u-u_\lambda^\delta)+\frac{1}{\lambda}\int\limits_\omega p(v_\lambda^\delta)\varepsilon(\bar v-v_\lambda^\delta)-\int\limits_\omega g(\bar v-v_\lambda^\delta)\\ +\frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma[u_\lambda^\delta][\bar u-u_\lambda^\delta]\ge 0\quad\text{для всех}\quad(\bar u,\bar v)\in K\ .$$

Из вариационного неравенства (51) после подстановки тестовых функций $(\bar{u},\bar{v}) = 2(u^\delta_\lambda, v^\delta_\lambda), (\bar{u},\bar{v}) = (0,0)$ получим равенство

$$(52)\qquad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta_\lambda)\varepsilon(u^\delta_\lambda) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f u^\delta_\lambda + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\omega} p(v^\delta_\lambda)\varepsilon(v^\delta_\lambda) - \int\limits_{\omega} g v^\delta_\lambda + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u^\delta_\lambda]^2 = 0\ .$$

Из равенства (52) следуют оценки, равномерные по $\delta \in [\delta_0,\delta_1]$ и $\lambda \in (0,\lambda_0]$:

$$(53)\qquad \|u^\delta_\lambda\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} \le C_7\ ,\ \ \|v^\delta_\lambda\|_{H^1(\omega)^2} \le C_8\ .$$

Случай 1. Рассмотрим случай, когда $(\delta,\lambda)\to(\delta',\lambda'),\ \delta' \in [\delta_0,\delta_1], \lambda' \in (0,\lambda_0]$. В силу оценок (53) при $(\delta,\lambda)\to(\delta',\lambda')$ справедливы сходимости:

$$(54)\qquad u^\delta_\lambda \to u^{\delta^*}_{\lambda^*} \quad \text{слабо в} \quad H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2\ ,\ [u^\delta_\lambda] \to [u^{\delta^*}_{\lambda^*}] \quad \text{слабо в} \quad L^2(\gamma)\ ,$$
$$v^\delta_\lambda \to v^{\delta^*}_{\lambda^*} \quad \text{слабо в} \quad H^1(\omega)^2\ .$$

Переходя к нижнему пределу в задаче (50), (51) на основе (54), получим вариационную задачу вида

$$(55)\qquad \text{Найти такую} \quad (u^{\delta^*}_{\lambda^*}, v^{\delta^*}_{\lambda^*}) \in K\ , \quad \text{что}$$

$$(56)\qquad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^{\delta^*}_{\lambda^*})\varepsilon(\bar{u} - u^{\delta^*}_{\lambda^*}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^{\delta^*}_{\lambda^*}) + \frac{1}{\delta'}\int\limits_{\gamma} [u^{\delta^*}_{\lambda^*}][\bar{u} - u^{\delta^*}_{\lambda^*}]$$
$$+ \frac{1}{\lambda'}\int\limits_{\omega} p(v^{\delta^*}_{\lambda^*})\varepsilon(\bar{v} - v^{\delta^*}_{\lambda^*}) - \int\limits_{\omega} g(\bar{v} - v^{\delta^*}_{\lambda^*}) \ge 0 \quad \text{для всех} \quad (\bar{u},\bar{v}) \in K\ .$$

Предельная задача (55), (56) совпадает с вариационной задачей (50), (51) при $(\delta,\lambda) = (\delta',\lambda')$, т.е. $(u^{\delta^*}_{\lambda^*}, v^{\delta^*}_{\lambda^*})$=$(u^{\delta'}_{\lambda'}, v^{\delta'}_{\lambda'})$.

Для того, чтобы осуществить предельный переход в формуле производной функционала энергии (48), требуется установить сходимость

$$(57)\qquad u^\delta_\lambda \to u^{\delta'}_{\lambda'} \quad \text{сильно в} \quad H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2\ .$$

Стоит отметить, что при $\delta \in [\delta_0,\delta_1]$ одной из эквивалентных норм для функции u^δ_λ в пространстве $H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2$ является норма

$$\|u^\delta_\lambda\|^2_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2} = \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\delta_\lambda)\varepsilon(u^\delta_\lambda) + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma} [u^\delta_\lambda]^2\ .$$

В (52) перенесем все слагаемые кроме первых двух вправо от знака равенства и перейдем к верхнему пределу при $(\delta,\lambda)\to(\delta',\lambda')$. Учитывая равенство

$$(58)\qquad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^{\delta'}_{\lambda'})\varepsilon(u^{\delta'}_{\lambda'}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f u^{\delta'}_{\lambda'} + \frac{1}{\delta'}\int\limits_{\gamma} [u^{\delta'}_{\lambda'}]^2 + \frac{1}{\lambda'}\int\limits_{\omega} p(v^{\delta'}_{\lambda'})\varepsilon(v^{\delta'}_{\lambda'}) - \int\limits_{\omega} g v^{\delta'}_{\lambda'} = 0\ ,$$

получим ряд предельных соотношений:

$$(59)\quad \limsup_{(\delta,\lambda)\to(\delta',\lambda')}\left(\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u^\delta_\lambda)\varepsilon(u^\delta_\lambda)+\frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma[u^\delta_\lambda]^2\right)=$$

$$=\limsup_{(\delta,\lambda)\to(\delta',\lambda')}\left(-\frac{1}{\lambda}\int\limits_\omega p(v^\delta_\lambda)\varepsilon(v^\delta_\lambda)+\int\limits_{\Omega_\gamma}fu^\delta_\lambda+\int\limits_\omega gv^\delta_\lambda\right)\le$$

$$\le-\frac{1}{\lambda'}\int\limits_\omega p(v^{\delta'}_{\lambda'})\varepsilon(v^{\delta'}_{\lambda'})+\int\limits_{\Omega_\gamma}fu^{\delta'}_{\lambda'}+\int\limits_\omega gv^{\delta'}_{\lambda'}=\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u^{\delta'}_{\lambda'})\varepsilon(u^{\delta'}_{\lambda'})+\frac{1}{\delta'}\int\limits_\gamma[u^{\delta'}_{\lambda'}]^2\ .$$

В то же время, в силу (52) и (58) при $(\delta,\lambda)\to(\delta',\lambda')$ справедлива следующая цепочка соотношений:

$$(60)\quad \limsup_{(\delta,\lambda)\to(\delta',\lambda')}\left(\frac{1}{\lambda}\int\limits_\omega p(v^\delta_\lambda)\varepsilon(v^\delta_\lambda)+\alpha\int\limits_{\partial\omega}(v^\delta_\lambda)^2\right)=$$

$$=\limsup_{(\delta,\lambda)\to(\delta',\lambda')}\left(-\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u^\delta_\lambda)\varepsilon(u^\delta_\lambda)-\frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma[u^\delta_\lambda]^2+\int\limits_{\Omega_\gamma}fu^\delta_\lambda+\int\limits_\omega gv^\delta_\lambda+\alpha\int\limits_{\partial\omega}(v^\delta_\lambda)^2\right)\le$$

$$\le-\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u^{\delta'}_{\lambda'})\varepsilon(u^{\delta'}_{\lambda'})-\frac{1}{\delta'}\int\limits_\gamma[u^{\delta'}_{\lambda'}]^2+\int\limits_{\Omega_\gamma}fu^{\delta'}_{\lambda'}+\int\limits_\omega gv^{\delta'}_{\lambda'}+\alpha\int\limits_{\partial\omega}(v^{\delta'}_{\lambda'})^2=$$

$$=\frac{1}{\lambda'}\int\limits_\omega p(v^{\delta'}_{\lambda'})\varepsilon(v^{\delta'}_{\lambda'})+\alpha\int\limits_{\partial\omega}(v^{\delta'}_{\lambda'})^2\ .$$

Далее, учитывая равенство (58), осуществим переход к нижнему пределу в равенстве (52) при $(\delta,\lambda)\to(\delta',\lambda')$:

$$(61)\quad \liminf_{(\delta,\lambda)\to(\delta',\lambda')}\left(\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u^\delta_\lambda)\varepsilon(u^\delta_\lambda)+\frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma[u^\delta_\lambda]^2+\frac{1}{\lambda}\int\limits_\omega p(v^\delta_\lambda)\varepsilon(v^\delta_\lambda)+\alpha\int\limits_{\partial\omega}(v^\delta_\lambda)^2\right)=$$

$$=\liminf_{(\delta,\lambda)\to(\delta',\lambda')}\left(\int\limits_{\Omega_\gamma}fu^\delta_\lambda+\int\limits_\omega gv^\delta_\lambda+\alpha\int\limits_{\partial\omega}(v^\delta_\lambda)^2\right)\ge\int\limits_{\Omega_\gamma}fu^{\delta'}_{\lambda'}+\int\limits_\omega gv^{\delta'}_{\lambda'}+\alpha\int\limits_{\partial\omega}(v^{\delta'}_{\lambda'})^2=$$

$$=\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u^{\delta'}_{\lambda'})\varepsilon(u^{\delta'}_{\lambda'})+\frac{1}{\delta'}\int\limits_\gamma[u^{\delta'}_{\lambda'}]^2+\frac{1}{\lambda'}\int\limits_\omega p(v^{\delta'}_{\lambda'})\varepsilon(v^{\delta'}_{\lambda'})+\alpha\int\limits_{\partial\omega}(v^{\delta'}_{\lambda'})^2\ .$$

Таким образом, из (59), (60), (61) следуют сходимости норм:

$$(62)\quad \|u^\delta_\lambda\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2}\to\|u^{\delta'}_{\lambda'}\|_{H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2}\ ,$$

$$\|v^\delta_\lambda\|_{H^1(\omega)^2}\to\|v^{\delta'}_{\lambda'}\|_{H^1(\omega)^2}\quad\text{при}\quad(\delta,\lambda)\to(\delta',\lambda')\ .$$

Из сходимости норм в (62) и слабой сходимости в (54) для u^δ_λ в пространстве $H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2$ следует сильная сходимость (57).

На основе сходимости (57) осуществим предельный переход в формуле производной функционала энергии по длине трещины (48) при $(\delta,\lambda)\to(\delta',\lambda')$:

$$\lim_{(\delta,\lambda)\to(\delta',\lambda')} G(\delta,\lambda) = \tag{63}$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(u_{\lambda'}^{\delta'})\varepsilon_{ij}(u_{\lambda'}^{\delta'})\theta_{,1} - \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(u_{\lambda'}^{\delta'})u_{\lambda' i,1}^{\delta'}\theta_{,j} - \int\limits_{\Omega_\gamma} (\theta f_i)_{,1} u_{\lambda' i}^{\delta'} +$$
$$+ \frac{1}{2\delta'}\int\limits_{\gamma} [u_{\lambda'}^{\delta'}]^2\theta_{,1} = G(\delta',\lambda') \ .$$

Поскольку верна цепочка равенств и неравенств

$$\sup_{(\delta,\lambda)\in[\delta_0,\delta_1]\times[0,\lambda_0]} G(\delta,\lambda) = \lim_{(\delta,\lambda)\to(\delta',\lambda')} G(\delta,\lambda) =$$
$$= G(\delta',\lambda') \le \sup_{(\delta,\lambda)\in[\delta_0,\delta_1]\times[0,\lambda_0]} G(\delta,\lambda) \ ,$$

пара $(\delta,\lambda)=(\delta',\lambda'),\delta'\in[\delta_0,\delta_1],\lambda'\in(0,\lambda_0]$, является решением задачи оптимального управления (49) при $(\delta,\lambda)\to(\delta',\lambda')$. Кроме того, функция $u_{\lambda'}^{\delta'}$ в формуле (63) – решение задачи (55), (56).

Случай 2: Обратимся теперь к случаю, когда $(\delta,\lambda)\to(\delta',0)$, $\delta'\in[\delta_0,\delta_1]$. Оценки в (53) влекут сходимости при $(\delta,\lambda)\to(\delta',0)$:

$$u_\lambda^\delta \to u_{\lambda^\star}^{\delta^\star} \quad \text{слабо в} \quad H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2 \ , \ [u_\lambda^\delta]\to[u_{\lambda^\star}^{\delta^\star}] \quad \text{слабо в} \quad L^2(\gamma) \ , \tag{64}$$
$$v_\lambda^\delta \to v_{\lambda^\star}^{\delta^\star} \quad \text{слабо в} \quad H^1(\omega)^2 \ .$$

В силу равенства (52) и оценок (53) при $\delta\in[\delta_0,\delta_1]$ и $\lambda\in(0,\lambda_0]$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_\omega p(v_\lambda^\delta)\varepsilon(v_\lambda^\delta) \le C_9 \ . \tag{65}$$

Из неравенства (65) следует, что предельная функция $v_{\lambda^\star}^{\delta^\star}$ имеет заданную структуру: $v_{\lambda^\star}^{\delta^\star}=\rho^\star,\rho^\star\in R(\omega)$.

Выберем в (51) в качестве $(\bar u,\bar v)\in K$ функцию $(\bar u,\varrho)\in K_0$ (см. (22)). При такой тестовой функции перейдем к пределу в вариационной задаче (50), (51) при $(\delta,\lambda)\to(\delta',0)$ на основе сходимостей (64). Получим задачу в следующем виде:

$$\text{Найти такую} \quad (u_{\lambda^\star}^{\delta^\star},\rho^\star)\in K_0 \ , \quad \text{что} \tag{66}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u_{\lambda^\star}^{\delta^\star})\varepsilon(\bar u - u_{\lambda^\star}^{\delta^\star}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar u - u_{\lambda^\star}^{\delta^\star}) - \int\limits_\omega g(\varrho-\rho^\star) + \tag{67}$$
$$+ \frac{1}{\delta'}\int\limits_\gamma [u_{\lambda^\star}^{\delta^\star}][\bar u - u_{\lambda^\star}^{\delta^\star}] \ge 0 \quad \text{для всех} \quad (\bar u,\varrho)\in K_0 \ .$$

Предельная задача (66), (67) совпадает с задачей (23), (24) из теоремы 2 при $\delta=\delta'$. Введем обозначение для решения $(u_{\lambda^\star}^{\delta^\star},\rho^\star)=(u_0^{\delta'},\rho^{\delta'})$. В силу равенства

(52) и вариационного неравенства (67) имеет место ряд предельных соотношений при $(\delta,\lambda)\to(\delta',0)$:

$$\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u_0^{\delta'})\varepsilon(u_0^{\delta'})+\frac{1}{\delta'}\int\limits_\gamma[u_0^{\delta'}]^2\le\liminf_{(\delta,\lambda)\to(\delta',0)}\left(\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u_\lambda^\delta)\varepsilon(u_\lambda^\delta)+\frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma[u_\lambda^\delta]^2\right)$$

$$=\liminf_{(\delta,\lambda)\to(\delta',0)}\left(\int\limits_{\Omega_\gamma}fu_\lambda^\delta-\frac{1}{\lambda}\int\limits_\omega p(v_\lambda^\delta)\varepsilon(v_\lambda^\delta)+\int\limits_\omega gv_\lambda^\delta\right)\le\liminf_{(\delta,\lambda)\to(\delta',0)}\left(\int\limits_{\Omega_\gamma}fu_\lambda^\delta+\int\limits_\omega gv_\lambda^\delta\right)$$

$$=\int\limits_{\Omega_\gamma}fu_0^{\delta'}+\int\limits_\omega g\rho^{\delta'}=\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u_0^{\delta'})\varepsilon(u_0^{\delta'})+\frac{1}{\delta'}\int\limits_\gamma[u_0^{\delta'}]^2\ .$$

Таким образом,

$$\lim_{(\delta,\lambda)\to(\delta',0)}\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u_\lambda^\delta)\varepsilon(u_\lambda^\delta)+\frac{1}{\delta}\int\limits_\gamma[u_\lambda^\delta]^2=\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u_0^{\delta'})\varepsilon(u_0^{\delta'})+\frac{1}{\delta'}\int\limits_\gamma[u_0^{\delta'}]^2\ . \tag{68}$$

Опираясь на полученную сходимость норм в (68) и слабую сходимость в (64) для функции u_λ^δ в пространстве $H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2$, можно утверждать, что при $(\delta,\lambda)\to(\delta',0)$

$$u_\lambda^\delta\to u_0^{\delta'}\quad\text{сильно в}\quad H^1_{\partial\Omega}(\Omega_\gamma)^2\ . \tag{69}$$

На основе сходимости (69) перейдем к пределу в формуле для производной функционала энергии по длине трещины (48) при $(\delta,\lambda)\to(\delta',0)$:

$$\begin{aligned}\lim_{(\delta,\lambda)\to(\delta',0)}&G(\delta,\lambda)\\&=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma_{ij}(u_0^{\delta'})\varepsilon_{ij}(u_0^{\delta'})\theta_{,1}-\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma_{ij}(u_0^{\delta'})u^{\delta'}_{0i,1}\theta_{,j}-\int\limits_{\Omega_\gamma}(\theta f_i)_{,1}u^{\delta'}_{0i}+\\&\qquad+\frac{1}{2\delta'}\int\limits_\gamma[u_0^{\delta'}]^2\theta_{,1}=G(\delta',0)\ .\end{aligned}\tag{70}$$

Поскольку верна цепочка равенств и неравенств

$$\begin{aligned}\sup_{(\delta,\lambda)\in[\delta_0,\delta_1]\times[0,\lambda_0]}G(\delta,\lambda)&=\lim_{(\delta,\lambda)\to(\delta',0)}G(\delta,\lambda)=\\&=G(\delta',0)\le\sup_{(\delta,\lambda)\in[\delta_0,\delta_1]\times[0,\lambda_0]}G(\delta,\lambda)\ ,\end{aligned}$$

пара $(\delta,\lambda)=(\delta',0)$, $\delta'\in[\delta_0,\delta_1]$, является решением задачи оптимального управления (49) при $(\delta,\lambda)\to(\delta',0)$. Кроме того, функция $u_0^{\delta'}$ в формуле (70) – решение задачи (66), (67). Теорема доказана. □

6. Заключение

В рамках плоской задачи теории упругости исследована задача о равновесии двуслойной упругой конструкции, в которой верхний слой накрывает одну из вершин дефекта. С помощью вариационного подхода установлена разрешимость задачи. Осуществлены предельные переходы в задаче равновесия по параметру жесткости верхнего слоя. Получено, что при стремлении жесткости верхнего слоя к нулю предельная задача описывает равновесие упругого тела с дефектом, а при стремлении жесткости верхнего слоя к бесконечности – равновесие конструкции с дефектом в упругом слое, одну из вершин которого накрывает жесткий слой. Также изучено поведение решения задачи при стремлении параметра повреждаемости дефекта к нулю и к бесконечности. Предельная задача при стремлении параметра повреждаемости к нулю описывает равновесие двуслойной упругой конструкции без дефекта. При стремлении параметра повреждаемости к бесконечности решение предельной задачи соответствует решению задачи о равновесии двуслойной конструкции с трещиной. Кроме того, рассмотрена задача оптимального управления, формулируемая на основе критерия Гриффитса. В качестве целевого функционала в задаче выступает производная функционала энергии по длине дефекта, а функциями управления выбраны два параметра, которые характеризуют жесткость верхнего слоя и повреждаемость дефекта. Доказано существование решения задачи оптимального управления.

References

[1] A.M. Khludnev, *On modeling elastic bodies with defects*, Sib. Electron. Math. Izv., **15** (2018), 153–166. Zbl 1390.35354

[2] A.M. Khludnev, *On thin inclusions in elastic bodies with defects*, Z. Angew. Math. Phys., **70**:45 (2019). Zbl 1419.35060

[3] A.M. Khludnev, *On thin Timoshenko inclusions in elastic bodies with defects*, Arch. Appl. Mech., **89**:8 (2019), 1691–1704.

[4] A.M. Khludnev, *Elasticity Problems in Nonsmooth Domains*, Fizmatlit, Moscow, 2010.

[5] T.S. Popova, *Contact problem for two viscoelastic plates*, Mat. Notes YaGU, **12**:2 (2005), 60–92.

[6] N.V. Neustroeva, *Rigid inclusion in the contact problem for elastic plates*, J. Appl. Ind. Math., **4**:4 (2010), 526–538. Zbl 1230.74114

[7] T.A. Rotanova, *On formulation and solvability of problems on the contact of two plates with rigid inclusions*, Sib. Zh. Ind. Mat., **15**:2 (2012), 107–118. Zbl 1324.74045

[8] D. Knees, A. Schroder, *Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints*, Math. Methods Appl. Sci., **35**:15 (2012), 1859–1884. Zbl 1255.35068

[9] L. Freddi, T. Roubicek, C. Zanini, *Quasistatic delamination of sandwich-like Kirchhoff-Love plates*, J. Elasticity, **113**:2 (2013), 219–250. Zbl 1275.49019

[10] V.A. Kovtunenko, G. Leugering, *A shape-topological control problem for nonlinear crack-defect interaction: the antiplane variational model*, SIAM J. Control Optim., **54**:3 (2016), 1329–1351. Zbl 1342.35381

[11] S. Almi, *Energy release rate and quasi-static evolution via vanishing viscosity in a fracture model depending on the crack opening*, ESAIM, Control Optim. Calc. Var., **23**:3 (2017), 791–826. Zbl 1373.49011

[12] A. Chambolle, S. Conti, G. Francfort, *Approximation of a brittle fracture energy with a constraint of non-interpenetration*, Arch. Ration. Mech. Anal., **228**:3 (2018), 867–889. Zbl 1391.35366

[13] A.M. Khludnev, *On crack problem with overlapping domain*, Z. Angew. Math. Mech., **88**:8 (2008), 650–660. Zbl 1146.49002

[14] A.M. Khludnev, A. Tani, *Overlapping domain problems in the crack theory with possible contact between crack faces*, Q. Appl. Math., **66**:3 (2008), 423–435. Zbl 1148.49008

[15] M.P. Savruk, V.S. Kravets, *Influence of reinforcement pads on distribution stress in cracked plates*, Prikl. Mech., **29**:3 (1993), 48–55.

[16] A.Yu. Zemlyanova, V.V. Sil'vestrov, *A problem on reinforcement of a plate with a cut by a two-dimensional covering strap*, J. Appl. Math. Mech., **71**:1 (2007), 40–51. Zbl 1150.74070

[17] Yu.O. Vasil'eva, V.V. Sil'vestrov, *The problem of an interface crack with a rigid patch plate on part of its edge*, J. Appl. Math. Mech., **75**:6 (2011), 716–730. Zbl 1272.74576
[18] A. Gaudiello, A.M. Khludnev, *Crack on the boundary of two overlapping domains*, Z. Angew. Math. Phys., **61**:2 (2010), 341–356. Zbl 1273.74441
[19] A.M. Khludnev, G.R. Leugering, *Optimal control of cracks in elastic bodies with thin rigid inclusion*, Z. Angew. Math. Mech., **91**:2 (2011), 125–137. Zbl 1370.74136
[20] A.M. Khludnev, *On the equilibrium of a two-layer elastic body with a crack*, J. Appl. Ind. Math., **7**:3 (2013), 370–379. Zbl 1340.74005
[21] E.V. Pyatkina, *Optimal control of the layer size in the problem of equilibrium of elastic bodies with overlapping domains*, J. Appl. Ind. Math., **10**:3 (2016), 435–443. Zbl 1374.49007
[22] E.V. Pyatkina, *On control problem for two-layers elastic body with a crack*, J. Math. Sci., **230**:1 (2018), 159–166. MR3796674
[23] E.M. Rudoy, N.A. Kazarinov, V.Yu. Slesarenko, *Numerical simulation of the equilibrium of an elastic two-layer structure with a through crack*, Numer. Anal. Appl., **10**:1 (2017), 63–73. MR3629070
[24] G.P. Cherepanov, *Mechanics of Brittle Fracture*, Nauka, Moscow, 1974.
[25] V.Z. Parton, E.M. Morozov, *Mechanics of elastic-plastic fracture*, Hemisphere Publishing Corp., Washington, DC, 1989. Zbl 0783.73005
[26] E. M. Rudoy, *Differentiation of energy functionals in two-dimensional elasticity theory for solids with curvilinear cracks*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **45**:6 (2004), 843–852. Zbl 1087.74008
[27] N.P. Lazarev, *The Griffith formula for a Timoshenko-type plate with a curvilinear track*, Sib. Zh. Ind. Mat., **16**:2 (2013), 98–108. Zbl 1340.74061
[28] V. Shcherbakov, *Energy release rates for interfacial cracks in elastic bodies with thin semirigid inclusions*, Z. Angew. Math. Phys., **68**:26 (2017). Zbl 1365.35180
[29] N. P. Lazarev, S. Das, M. P. Grigoryev, *Optimal control of a thin rigid stiffener for a model describing equilibrium of a Timoshenko plate with a crack*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **15** (2018), 1485–1497. Zbl 1414.49010
[30] V.P. Mikhailov, *Partial Differential Equations*, Nauka, Moscow, 1976.
[31] R. Temam, *Mathematical Problems of Plasticity Theory*, Nauka, Moscow, 1991. Zbl 0716.73027

Irina Vladimirovna Fankina
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
15, Lavrentyeva ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: fankina.iv@gmail.com