

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 17, стр. 1741–1765 (2020)
DOI 10.33048/semi.2020.17.119

УДК 519.63
MSC 35Q04

ИЕРАРХИЧЕСКИЙ БАЗИС В ПРОСТРАНСТВЕ H^{div} ДЛЯ СМЕШАННОЙ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ ДАРСИ

С.А. ТРОФИМОВА, Н.Б. ИТКИНА, Э.П. ШУРИНА

ABSTRACT. A mixed variational formulation based on a discontinuous Galerkin method for solving the Darcy problem with a tensor permeability coefficient is considered. Two special hierarchical basis systems in H^{div} space for velocity and in H^1 space for pressure are constructed. The influence of these basis on the properties of the matrix of the discrete analogue is investigated.

Keywords: mixed variational formulation, discontinuous Galerkin method, Darcy problem, algebraic multilevel method.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для математического моделирования процесса фильтрации флюида в гетерогенной неоднородной геологической среде с включениями используется модель Дарси, которая достаточно точно позволяет описать движение жидкости в пористой среде под действием давления [1, 2]. Спектр приложений задач теории фильтрации весьма обширен и включает в себя одну из основополагающих отраслей российской экономики – нефтегазодобывающий сектор. При моделировании процессов, связанных с интенсификацией (гидравлический разрыв пласта горной породы) и разработкой месторождений углеводородов, возникает класс задач, которые не предусматривают определения явного поведения

TROFIMOVА, S.A., ITKINA, N.B., SHURINA, E.P., HIERARCHICAL BASIS IN H^{div} SPACE FOR A MIXED FINITE ELEMENT FORMULATION OF THE DARCY PROBLEM.

© 2020 Трофимова С.А., Иткина Н.Б., Шурина Э.П.

Работа выполнена при поддержке проектов ФНИ № 0331-2019-0015, ФНИ № 0266-2019-0007, ОФИ-М 16-29-15094.

Поступила 16 апреля 2019 г., опубликована 26 октября 2020 г.

давления на границе области моделирования, однако задают поведение нормальной компоненты скорости. Необходимость решения такого рода прикладных проблем обуславливает использование специализированных смешанных вариационных постановок.

Термин "смешанный метод" появился в 1960-х годах при решении задач теории упругости конечно-элементными методами, в которых одновременно аппроксимируются поля смещения и напряжения. В отличие от прямых постановок, использование смешанного метода для решения задачи Дарси позволяет сразу определить как давление, так и скорость течения флюида, при этом осуществляется поиск критической точки соответствующего функционала в конечно-элементном пространстве допустимых пробных функций, которое представимо в виде прямой суммы двух подпространств. Сложность метода состоит в том, что критическая точка функционала – седловая точка [3, 4, 5], т.е. решение задачи об определении минимума функционала в общем случае не единственны и для выполнения условий корректности требуется дополнительная информация. Наиболее распространенный подход – введение множителей Лагранжа или определение конечноэлементного базиса из пространства H^{div} , для которого выполнены условия Ладыженской-Бабушки-Брецци [26, 27]. Такой подход позволяет найти решение, соответствующее физике моделируемых процессов [6, 7, 8].

В современных исследованиях для получения конечно-элементного приближения всё чаще применяется разрывный метод Галёркина (DG-метод). Основная идея данного метода заключается в локальной аппроксимации решения на каждом конечном элементе и определении решения на межэлементных границах при помощи специальных операторов следа функций – «численных потоков». Потоки вводятся для обеспечения сходимости численного решения к физически реlevantному решению без осцилляций вблизи разрывов. В зависимости от вида потоков можно получить вычислительную схему с различными свойствами [9].

Разрывный метод Галёркина имеет преимущества перед стандартным методом конечных элементов при решении задач в сложно построенных геологических областях. Основным достоинством DG-метода является гибкое применение p , h , $p-h$ стратегий, то есть возможность использования несогласованных сеток, а также независимый выбор порядка полиномиальных базисов на конечных элементах. Однако, подобные преимущества сопровождаются недостатками, к которым следует отнести вычислительные и временные затраты при решении системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой размерности, так как для DG-метода количество степеней свободы значительно больше, чем для классического метода Галёркина. Проблемы, связанные с увеличением размерности дискретного аналога (ухудшение обусловленности и изменение структуры матрицы СЛАУ), могут быть разрешены разработкой специальных многоуровневых решателей и выбором иерархического базиса.

Основная особенность дискретных аналогов неконформных смешанных вариационных постановок для задачи Дарси с тензорным коэффициентом проницаемости в гетерогенных средах – вычислительная неустойчивость. Повышение устойчивости таких схем достигается за счёт дополнительной стабилизации вариационной постановки, выбора специального базиса или специального решателя. В статье предлагается использовать специальный иерархический базис,

повышающий устойчивость дискретного аналога вариационной постановки без использования дополнительных стабилизаторов.

Отметим, что при решении сложных прикладных задач необходимо принимать в рассмотрение три этапа моделирования и учитывать согласованность этих этапов между собой:

- выбор функциональных пространств, построение вариационной постановки;
- конструирование базисных систем в соответствующих функциональных пространствах, выбор метода дискретизации, а также определение структуры матрицы СЛАУ;
- построение эффективного решателя с учетом предыдущих этапов.

В данной работе подробно анализируется возможность применения специального иерархического базиса при решении задачи Дарси DG-методом в смешанной постановке на классе модельных задач, имеющих аналитическое решение. Необходимо отметить, что большая часть публикаций посвящена построению специальных вариационных постановок на базе многомасштабных конформных и неконформных конечно-элементных методов. Практически все публикации по данной проблеме с 90-х годов и до 2020 года посвящены априорным оценкам погрешности дискретных аналогов, рассматриваемые базисы – Raviart-Thomas-элементы различных порядков. Ни в одной из работ не используется иерархический базис и не реализуется подробный анализ свойств матрицы СЛАУ. В работе [10] для устойчивости вычислительной схемы применяют элементы Raviart-Thomas порядка k для скорости, кусочно-полиномиальные функции степени k для давления и непрерывные кусочно-полиномиальные функции степени $k+1$ для дополнительных множителей Лагранжа. Авторы работы [11] ставят целью разработку такой вычислительной схемы, которая бы позволила для линейных конечных элементов получать решение со вторым порядком точности. Предлагается обогащение (enrichment), получаемое с использованием связи между основной переменной и переменной потока, которая явно доступна в узлах в смешанной формулировке. В данной работе представлены два подхода: несимметричное обогащение и симметричное обогащение, которое позволяет проводить полный анализ ошибок в классическом контексте конечных элементов. В работе [12] проводится анализ априорных оценок стабилизированного смешанного метода конечных элементов для задачи Дарси. Стабилизация вычислительной схемы достигается путём добавления в вариационную постановку особых слагаемых штрафа, возникающих из закона сохранения массы. В работе [13] рассматривается встроенный гибридизированный разрывный метод Галёркина (embedded-hybridized discontinuous Galerkin (EDG-HDG) method) для задачи Стокса-Дарси. Авторы утверждают, что в данном подходе точечно выполняется закон сохранения массы, что приводит к дивергентно-конформному полю скоростей во всей области. В работе [14] рассматривается адаптивный смешанный обобщённый многомасштабный метод конечных элементов (Generalized Multiscale Finite Element Method (GMsFEM)) для решения задачи Дарси в гетерогенной среде. Предлагается стратегия апостериорных оценок: в каждой грубой окрестности вычислительной области вводится индикатор локальной ошибки как произведение норм невязки прямого и дуального вариационных уравнений. В [15] исследуется стратегия уточнения решения, основанная на оценках погрешности вычисления давления и скорости,

для численного моделирования движения несжимаемой однофазной жидкости в пористой среде. Авторами вводятся апостериорные оценки погрешности для расширенного смешанного метода конечных элементов (Enhanced Velocity Mixed Finite Element Method). В данной работе сравниваются различные подходы (явные и неявные) к оцениванию ошибки вычислений и на основе численных экспериментов демонстрируются преимущества некоторых подходов. В работе [16] разрабатывается вариационный многомасштабный интерполационный сеточно-свободный метод Галёркина (Variational Multiscale Interpolating Element-free Galerkin (VMIEFG) method), основанный на вариационной многомасштабной формулировке T.J.R. Hughes, для решения задачи Дарси. Для построения функций формы используется модификация метода наименьших квадратов. Авторы утверждают, что в методе VMIEFG снимаются ограничения, накладываемые условием Бабушка-Брецци (Babuska-Brezzi). Таким образом, возможен выбор одинакового порядка базиса для аппроксимации скорости и давления. В работе [17] рассматривается смешанная конечно-элементная дискретизация обобщённой модели Дарси-Форхгеймера на кусочно-постоянных и кусочно-линейных элементах. Авторами получены оценки погрешности для скорости и давления в пространствах L^m и $L^{m/m+1}$ для любого $m \in (1, 2]$. В работе [18] рассматривается применение модификации вариационной формулировки разрывного метода Галёркина с внутренним штрафом для решения задачи Стокса. В работе [19] представлен метод несогласованных конечных элементов (unfitted finite element method) для решения задачи Дарси в расчётной области, представленной сетью трещин в пористой матрице. Система трещин располагается в области произвольным образом, при этом границы трещин не обязательно совпадают с границами конечных элементов. Подход к решению основан на модификации стабилизированной формулировки Hughes-Masud, выполненной путём включения в формулировку слагаемых штрафа. Авторами оценивается эффективность метода при помощи численных экспериментов, проводится анализ сходимости. В работе [20] рассматриваются вариационные формулировки конечно-элементного метода для решения задачи Стокса, задачи Стокса-Дарси и задачи Бринкмана, при этом используются разрывная, H^1 -конформная и H^{div} -конформная аппроксимации для скорости.

В данной статье исследуется проблема построения специального иерархического базиса в пространстве H^{div} и влияние данного базиса на свойства матрицы дискретного аналога.

2. СМЕШАННАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА НА БАЗЕ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА

Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная n -мерная область с границей $\partial\Omega = \Gamma_D$, модель Дарси описывается системой уравнений для вектора скорости \mathbf{u} и давления p :

$$(1) \quad \begin{cases} \mathbf{u} = -K\nabla p & \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = f & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

где K – симметричный положительно определенный тензор.

Введем пространство Лебега $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением $(v, w)_{L_2(\Omega)} = \int vwd\Omega$ и нормой $\|v\|_{L_2(\Omega)} = (v, v)_{L_2(\Omega)}^{1/2}$ и гильбертовы пространства скалярных

и векторных функций:

$$H^1(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega), \partial v / \partial x_i \in L_2(\Omega), 1 \leq i \leq n\}$$

$$H^{\text{div}}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in (L_2(\Omega))^n, \nabla \cdot \mathbf{v} \in L_2(\Omega)\}$$

Смешанная формулировка для задачи Дарси (1) имеет вид [22]: найти $(\mathbf{u}, p) \in H^{\text{div}}(\Omega) \times L_2(\Omega)$ такие, что:

$$(2) \quad \begin{cases} (K^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L_2(\Omega)} - (p, \nabla \cdot \mathbf{v})_{L_2(\Omega)} = 0 & \forall \mathbf{v} \in H^{\text{div}}(\Omega) \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}, q)_{L_2(\Omega)} = (f, q)_{L_2(\Omega)} & \forall q \in L_2(\Omega) \end{cases}$$

Пусть $\Xi_h = \{T\}$ – разбиение расчетной области Ω на конечные элементы T . Тогда $\Gamma = \bigcup_T \partial T$ – множество границ элементов T , $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \partial\Omega$. Введём конечно-элементные подпространства следующим образом:

$$(3) \quad Q_h = \{q \in L_2(\Omega) : q|_T \in P_l(T) \forall T \in \Xi_h\}$$

$$(4) \quad V_h = \{\mathbf{v} \in (L_2(\Omega))^n : \mathbf{v}|_T \in (P_l(T))^n \forall T \in \Xi_h\}$$

где $P_l(T)$ – пространство полиномов степени $l \geq 1$, определенное на элементе T .

В соответствии с [8], смешанная вариационная постановка разрывного метода Галёркина имеет вид:

$$(5) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} K^{-1}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_0} [p]\{\mathbf{v}\} dS + \int_{\Gamma_D} (pn) \cdot \mathbf{v} dS - \\ -\theta \int_{\Omega} (K^{-1}\mathbf{u} + \nabla p) \cdot \mathbf{v} d\Omega = 0 \\ -\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} q d\Omega + \int_{\Gamma_0} \{\mathbf{u}\}[q] dS + \int_{\Gamma_D} \mathbf{u} \cdot (qn) dS + \delta\theta \int_{\Omega} (\mathbf{u} + K\nabla p) \cdot \nabla q d\Omega = \\ = \int_{\Omega} f q d\Omega - \int_{\Gamma_D} g q dS \end{cases}$$

где θ – параметр стабилизации, $\delta = \pm 1$, $[\cdot]$ – оператор скачка, $\{\cdot\}$ – оператор среднего.

3. БАЗИСЫ В ПРОСТРАНСТВАХ H^{div} И H^1

Построение конечно-элементных подпространств (3) – (4) необходимо выполнять с учетом теорем вложения С.Л. Соболева [31]. Диаграмма DeRham'a для области $\Omega \subset R^2$:

$$\begin{array}{ccccc} H^1 & \xrightarrow{\nabla \times} & H^{\text{div}} & \xrightarrow{\nabla \cdot} & L_2 \\ \cup & & \cup & & \cup \\ Q_h & \xrightarrow{\nabla \times} & V_h & \xrightarrow{\nabla \cdot} & S_h \end{array}$$

Рассмотрим один из способов построения иерархического конформного базиса в пространстве H^{div} . Конформность подразумевает выполнение требования непрерывности нормальных компонент базисных функций на межэлементных границах.

Рассмотрим конечный элемент, представленный на рисунке 1,

$$T_{\text{quad}}^{\text{div}} = (T_{\text{quad}}, V_{\text{quad}}, \Sigma_{\text{quad}}^{\text{div}}),$$

где T_{quad} – прямоугольная область вида:

$$T_{\text{quad}} = \{\xi \in R^2; -1 < \xi_1, \xi_2 < 1\}$$

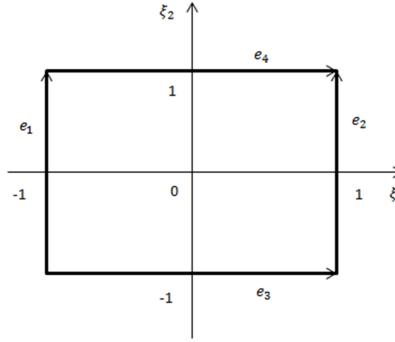


Рис. 1. Прямоугольный мастер-элемент

Конечный элемент T_{quad}^{div} будет оснащен полиномиальным пространством:

$$V_{quad} = \{\mathbf{v} \in Q_{p^{b,1}+1, p^{b,2}} \times Q_{p^{b,1}, p^{b,2}+1}, \mathbf{v} \cdot n|_{e_j} \in P_{p^{e_j}}(e_j), j = \overline{1, 4}\}$$

где $p^{b,1}, p^{b,2}$, – степени полиномов для bubble-функций, p^{e_j} – степени полиномов для edge-функций. Множество степеней свободы Σ_{quad}^{div} однозначно определяется выбором базиса в V_{quad} .

Базисные функции строятся как результат тензорного произведения ортогональных полиномов, заданных на данном носителе, само пространство при этом представляется в виде прямой суммы двух подпространств: подпространства дивергентно свободных функций и подпространства недивергентно свободных функций [23].

Рассмотрим иерархический конформный базис в пространстве H^{div} , построенный с использованием интегрированных полиномов Лежандра [24]:

$$(6) \quad l_n(x) = \int_{-1}^x L_{n-1}(\xi) d\xi, \quad x \in [-1, 1], \quad n \geq 2$$

при этом $l_n(-1) = l_n(1) = 0$. Полиномы Лежандра $L_n(x)$ определяются в виде:

$$(7) \quad \begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= x, \\ L_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Введем билинейные функции λ_i , равные единице в вершине i и нулю в остальных вершинах, и линейные функции σ_i [24]:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (1-x)(1-y), & \sigma_1 &= (1-x)+(1-y), \\ \lambda_2 &= x(1-y), & \sigma_2 &= x+(1-y), \\ \lambda_3 &= xy, & \sigma_3 &= x+y, \\ \lambda_4 &= (1-x)y & \sigma_4 &= (1-x)+y \end{aligned}$$

В качестве edge-функций низкого порядка выберем функции для Raviart-Thomas конечного элемента [25], при этом нормальная компонента будет равна единице на ребре, с которым ассоциирована, и нулю на всех остальных ребрах.

$$(8) \quad \psi_{e_1}^{RT_0} = \frac{1}{2} rot(\sigma_4 - \sigma_1)(\lambda_4 + \lambda_1),$$

$$(9) \quad \psi_{e_2}^{RT_0} = \frac{1}{2} \text{rot}(\sigma_3 - \sigma_2)(\lambda_3 + \lambda_2),$$

$$(10) \quad \psi_{e_3}^{RT_0} = \frac{1}{2} \text{rot}(\sigma_2 - \sigma_1)(\lambda_2 + \lambda_1),$$

$$(11) \quad \psi_{e_4}^{RT_0} = \frac{1}{2} \text{rot}(\sigma_3 - \sigma_4)(\lambda_3 + \lambda_4),$$

где $\text{rot}(q) = (\frac{\partial q}{\partial y}, -\frac{\partial q}{\partial x})$.

Edge-функции высоких порядков связаны с интегрированными полиномами Лежандра и строятся таким образом, что след нормальной компоненты не равен нулю только на том ребре, на котором определена соответствующая базисная функция:

$$(12) \quad \psi_{e_1}^k = \text{rot}(l_{k+2}(\sigma_4 - \sigma_1)(\lambda_4 + \lambda_1)),$$

$$(13) \quad \psi_{e_2}^k = \text{rot}(l_{k+2}(\sigma_3 - \sigma_2)(\lambda_3 + \lambda_2)),$$

$$(14) \quad \psi_{e_3}^k = \text{rot}(l_{k+2}(\sigma_2 - \sigma_1)(\lambda_2 + \lambda_1)),$$

$$(15) \quad \psi_{e_4}^k = \text{rot}(l_{k+2}(\sigma_3 - \sigma_4)(\lambda_3 + \lambda_4)),$$

где $0 \leq k \leq p^{e_i} - 1$, $i = \overline{1, 4}$ – порядок базисной функции. На рисунке 2 представлены edge-функции второго порядка.

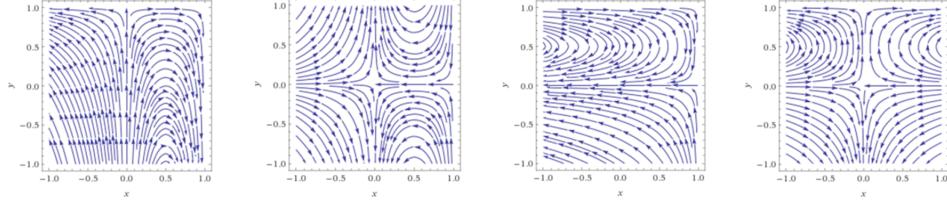


Рис. 2. Edge-функции второго порядка, связанные с интегрированными полиномами Лежандра

Bubble-функции также связаны с интегрированными полиномами Лежандра и строятся таким образом, что следы нормальных компонент равны нулю на всех ребрах конечного элемента:

$$(16) \quad \begin{aligned} \psi_{k_1, k_2}^{b_1} &= \text{rot}(l_{k_1+2}(2x-1)l_{k_2+2}(2y-1)) = \\ &= 2(l'_{k_1+2}(2x-1)l_{k_2+2}(2y-1)\tau_2 - l_{k_1+2}(2x-1)l'_{k_2+2}(2y-1)\tau_1), \end{aligned}$$

$$(17) \quad \psi_{k_1, k_2}^{b_2} = l'_{k_1+2}(2x-1)l_{k_2+2}(2y-1)\tau_2 + l_{k_1+2}(2x-1)l'_{k_2+2}(2y-1)\tau_1,$$

$$(18) \quad \psi_{k_1}^{b_3} = l_{k_1+2}(2y-1)\tau_2,$$

$$(19) \quad \psi_{k_1+p^{b_3}}^{b_3} = l_{k_1+2}(2y-1)\tau_1,$$

где $0 \leq k_1, k_2 \leq p^{b_i} - 1$, $i = \overline{1, 3}$, а $\tau_1 = (1, 0)$ и $\tau_2 = (0, 1)$ – векторы направления.

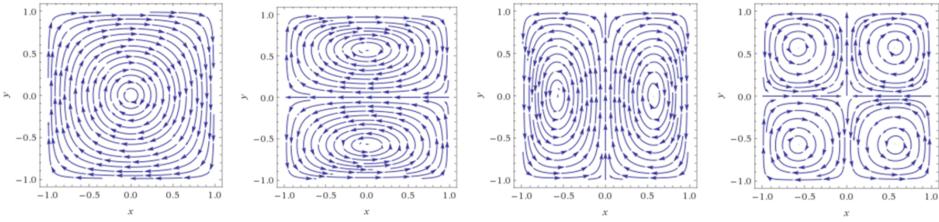


Рис. 3. Bubble-функции второго порядка, связанные с интегрированными полиномами Лежандра

Выполним построение иерархической базисной системы для давления в пространстве H^1 [23]. Рассмотрим изображенный на рисунке 1 мастер-элемент

$$T_{quad}^1 = (T_{quad}, W_{quad}, \Sigma_{quad}^1),$$

который оснащен полиномиальным пространством:

$$W_{quad} = \{w \in Q_{p^{b,1}, p^{b,2}}; w|_{e_j} \in P_{p^{e_j}}(e_j), j = \overline{1,4}\}$$

где $Q_{p,q} = \text{span}\{\xi_1^i \xi_2^j | (\xi_1, \xi_2) \in T_{quad}, i = \overline{0,p}, j = \overline{0,q}\}$. Множество степеней свободы Σ_{quad}^1 однозначно определяется выбором базиса в W_{quad} .

Иерархический базис полиномиального пространства W_{quad} определяется набором из vertex-, edge- и bubble-функций. Vertex-функция равна единице в вершине прямоугольника T_{quad} , с которой функция ассоциирована, и нулю во всех остальных вершинах.

$$(20) \quad \varphi_{quad}^{v_1}(\xi_1, \xi_2) = l_0(\xi_1)l_0(\xi_2)$$

$$(21) \quad \varphi_{quad}^{v_2}(\xi_1, \xi_2) = l_1(\xi_1)l_0(\xi_2)$$

$$(22) \quad \varphi_{quad}^{v_3}(\xi_1, \xi_2) = l_1(\xi_1)l_1(\xi_2)$$

$$(23) \quad \varphi_{quad}^{v_4}(\xi_1, \xi_2) = l_0(\xi_1)l_1(\xi_2)$$

где $l_0(x) = \frac{1-x}{2}$, $l_1(x) = \frac{x+1}{2}$.

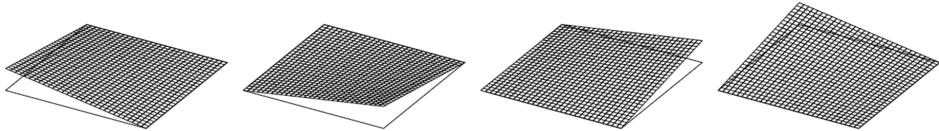


Рис. 4. Vertex-функции из пространства H^1

Edge-функция строится таким образом, что след функции на ребре, с которым она ассоциирована, связан с функцией Лобатто и равен нулю на остальных ребрах.

$$(24) \quad \varphi_{k,quad}^{e_1}(\xi_1, \xi_2) = l_0(\xi_1)l_k(\xi_2), 2 \leq k \leq p^{e_1}$$

$$(25) \quad \varphi_{k,quad}^{e_2}(\xi_1, \xi_2) = l_1(\xi_1)l_k(\xi_2), 2 \leq k \leq p^{e_2}$$

$$(26) \quad \varphi_{k,quad}^{e_3}(\xi_1, \xi_2) = l_k(\xi_1)l_0(\xi_2), 2 \leq k \leq p^{e_3}$$

$$(27) \quad \varphi_{k, \text{quad}}^{e_4}(\xi_1, \xi_2) = l_k(\xi_1)l_1(\xi_2), \quad 2 \leq k \leq p^{e_4}$$

Функции Лобатто имеют вид:

$$l_k(x) = \frac{1}{\|L_{k-1}\|} \int_{-1}^x L_{k-1}(\xi) d\xi, \quad k \geq 2$$

где $\|L_{k-1}\| = \sqrt{2/(2k-1)}$.

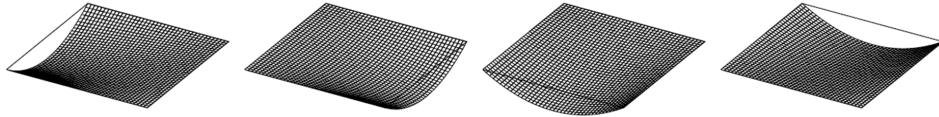


Рис. 5. Edge-функции второго порядка из пространства H^1

Bubble-функция определяется таким образом, что её значение равно нулю на границах прямоугольника T_{quad} .

$$(28) \quad \varphi_{n_1, n_2, \text{quad}}^b(\xi_1, \xi_2) = l_{n_1}(\xi_1)l_{n_2}(\xi_2), \quad 2 \leq n_1 \leq p^{b,1}, \quad 2 \leq n_2 \leq p^{b,2}$$

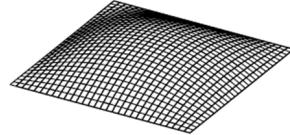


Рис. 6. Bubble-функция второго порядка из пространства H^1

Для устойчивости смешанных методов конечномерные подпространства должны удовлетворять условию совместности, полученному Ладыженской (1969), Бабушкиной (1970) и Брецци (1974). Для существования и единственности конечноэлементного решения задачи (5) должно выполняться ЛББ условие [26, 27]:

$$(29) \quad \inf_{p \in Q_h} \sup_{\mathbf{v} \in V_h} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}, p)_{L_2(\Omega)}}{\|p\|_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^3}} \geq \alpha > 0$$

где α не зависит от размерности конечноэлементной сетки.

4. ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ И СТРУКТУРА МАТРИЦЫ СЛАУ

Определим искомые скорость и давление в виде разложения по базисным функциям из подпространств (3) – (4) соответственно:

$$(30) \quad p = \sum_{i=1}^{N^p} q_i^p \psi_i^p, \quad \psi_i^p \in Q_h$$

$$(31) \quad u = \sum_{i=1}^{N^u} q_i^u \psi_i^u, \quad \psi_i^u \in V_h$$

Подставив (30) – (31) в (5), получим дискретный аналог вариационной постановки:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} K^{-1} \left(\sum_{j=1}^{N^u} q_j^u \psi_j^u \right) \cdot \psi_i^u d\Omega - \int_{\Omega} \left(\sum_{j=N^u+1}^{N^u+N^p} q_j^p \psi_j^p \right) \nabla \cdot \psi_i^u d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_0} \left[\left(\sum_{j=N^u+1}^{N^u+N^p} q_j^p \psi_j^p \right) \right] \{\psi_i^u\} dS + \int_{\Gamma_D} \left(\sum_{j=N^u+1}^{N^u+N^p} q_j^p \psi_j^p \right) n \cdot \psi_i^u dS - \\ - \theta \int_{\Omega} K^{-1} \left(\sum_{j=1}^{N^u} q_j^u \psi_j^u \right) \cdot \psi_i^u d\Omega - \theta \int_{\Omega} \left(\sum_{j=N^u+1}^{N^u+N^p} q_j^p \nabla \psi_j^p \right) \cdot \psi_i^u d\Omega = 0, \quad i = \overline{1, N^u} \\ - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\sum_{j=1}^{N^u} q_j^u \psi_j^u \right) \psi_i^p d\Omega + \int_{\Gamma_0} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{N^u} q_j^u \psi_j^u \right) \right\} [\psi_i^p] dS + \\ + \int_{\Gamma_D} \left(\sum_{j=1}^{N^u} q_j^u \psi_j^u \right) \cdot (\psi_i^p n) dS + \delta \theta \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{N^u} q_j^u \psi_j^u \right) \cdot \nabla \psi_i^p d\Omega + \\ + \delta \theta \int_{\Omega} K \left(\sum_{j=N^u+1}^{N^u+N^p} q_j^p \nabla \psi_j^p \right) \cdot \nabla \psi_i^p d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{N^u} f_j^u \psi_j^u + \sum_{j=1}^{N^p} f_j^p \psi_j^p \right) \psi_i^p d\Omega - \\ - \int_{\Gamma_D} \left(\sum_{j=1}^{N^u} g_j^u \psi_j^u + \sum_{j=1}^{N^p} g_j^p \psi_j^p \right) \psi_i^p dS, \\ i = \overline{N^u + 1, N^u + N^p} \end{array} \right.$$

В итоге, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$(33) \quad \tilde{A} \tilde{q} = \tilde{f}$$

с матрицей, имеющей блочную структуру:

$$(34) \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^u \\ q^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

где элементы блоков матрицы и вектора правой части вычисляются по формулам:

$$(35) \quad a_{ij} = \int_{\Omega} K^{-1} \psi_j^u \cdot \psi_i^u d\Omega - \theta \int_{\Omega} K^{-1} \psi_j^u \cdot \psi_i^u d\Omega$$

$$(36) \quad b_{ij} = \begin{aligned} & - \int_{\Omega} \psi_j^p \nabla \cdot \psi_i^u d\Omega + \int_{\Gamma_0} [\psi_j^p] \{\psi_i^u\} dS + \int_{\Gamma_D} (\psi_j^p n) \cdot \psi_i^u dS - \\ & - \theta \int_{\Omega} \nabla \psi_j^p \cdot \psi_i^u d\Omega, \quad i = \overline{1, N^u}, \quad j = \overline{1, N^p} \end{aligned}$$

$$(37) \quad c_{ij} = \begin{aligned} & - \int_{\Omega} \nabla \cdot \psi_j^u \psi_i^p d\Omega + \int_{\Gamma_0} \{\psi_j^u\} [\psi_i^p] dS + \int_{\Gamma_D} \psi_j^u \cdot (\psi_i^p n) dS + \\ & + \delta \theta \int_{\Omega} \psi_j^u \cdot \nabla \psi_i^p d\Omega, \quad i = \overline{1, N^p}, \quad j = \overline{1, N^u} \end{aligned}$$

$$(38) \quad d_{ij} = \delta \theta \int_{\Omega} K \nabla \psi_j^p \cdot \nabla \psi_i^p d\Omega, \quad i = \overline{1, N^p}, \quad j = \overline{1, N^p}$$

$$(39) \quad f_i = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{N^u} f_i^u \psi_i^u + \sum_{i=1}^{N^p} f_i^p \psi_i^p \right) \psi_j^p d\Omega - \\ - \int_{\Gamma_D} \left(\sum_{i=1}^{N^u} g_i^u \psi_i^u + \sum_{i=1}^{N^p} g_i^p \psi_i^p \right) \psi_j^p dS, \quad j = \overline{1, N^p}$$

Реализация различных стратегий нумерации конечных элементов и степеней свободы позволяет построить матрицу СЛАУ определенной структуры. Учитывая специфику формирования матрицы дискретного аналога разрывного метода Галёркина, используем нумерацию, которая позволит оптимизировать структуру матрицы.

Рассмотрим прямоугольное разбиение двумерной расчётной области. Конечные элементы пронумеруем стандартным образом: снизу-вверх и слева-направо. В первую очередь пронумеруем степени свободы для скорости на всех конечных элементах, а затем – для давления, при этом сначала производится нумерация степеней свободы для скорости на одном конечном элементе, и только потом переходим к следующему элементу (для давления стратегия повторяется).

При применении такой идеологии блоки матрицы СЛАУ имеют также блочную структуру, причём с минимальным количеством внедиагональных ненулевых элементов. На рисунке 7 показан портрет матрицы, сформированной на 100 прямоугольных конечных элементах с использованием иерархического базиса для скорости (8) – (19) из пространства H^{div} и базисных функций для давления (20) – (28) из пространства H^1 . На рисунках 8–10 показано строение

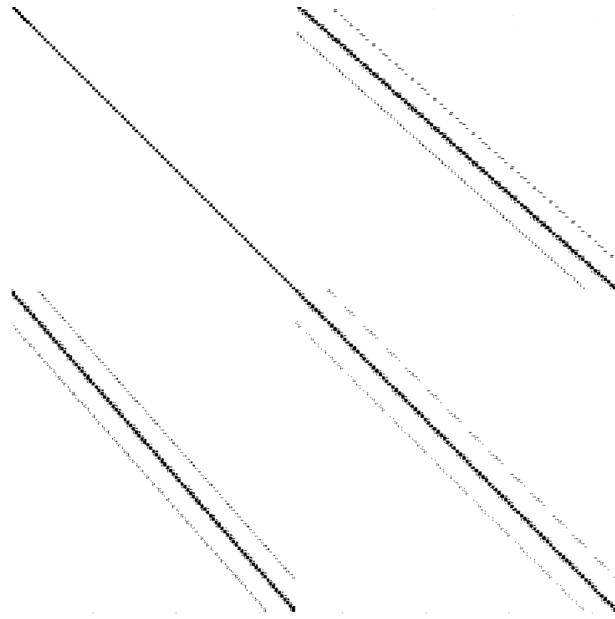


Рис. 7. Портрет матрицы СЛАУ

ние внутренних блоков, расположенных в блоке A глобальной матрицы СЛАУ. Размер данных блоков зависит от количества базисных функций, включаемых в иерархическую базисную систему для скорости из пространства H^{div} .

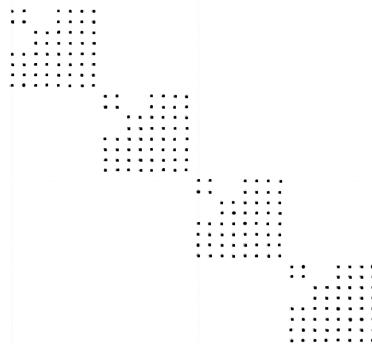


Рис. 8. Фрагмент верхнего левого блока при использовании Edge-функций Raviart-Thomas (RT) и функций 0 порядка для скорости (8 функций)

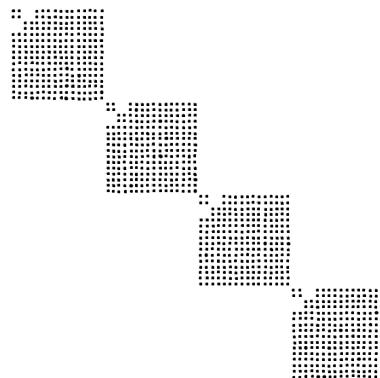


Рис. 9. Фрагмент верхнего левого блока при использовании Edge-функций Raviart-Thomas (RT) и функций 0 порядка и bubble-функций 1 типа для скорости (12 функций)

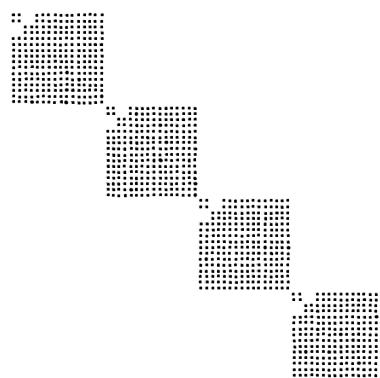


Рис. 10. Фрагмент верхнего левого блока при использовании Edge-функций Raviart-Thomas (RT) и функций 0 порядка и bubble-функций 1, 2 типа для скорости (16 функций)

В таблице 1 представлены первое и последнее сингулярные числа сингулярного разложения (singular values decomposition (SVD)) матриц СЛАУ, сформированных при разном количестве базисных функций для скорости.

ТАБЛИЦА 1. Ранг матрицы СЛАУ и сингулярные числа

Коэффициент проницаемости среды	Базисные функции	Размерность матрицы	Ранг матрицы	Первое сингулярное число	Последнее сингулярное число
$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	Edge-функции Raviart-Thomas (RT), 0 порядка	1700	1700	427.1731	3.84e-04
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 типа	2100	2100	427.1731	3.12e-05
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 и 2 типа	2500	2500	427.1733	3.74e-05
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1, 2 и 3 типа	2900	2900	427.1733	1.85e-05
$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$	Edge-функции Raviart-Thomas (RT), 0 порядка	1700	1700	215.7337	5.96e-05
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 типа	2100	2100	215.7337	5.96e-05
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 и 2 типа	2500	2500	215.7341	6.08e-05
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1, 2 и 3 типа	2900	2900	215.7344	1.70e-05

Анализ таблицы 1 позволяет сделать вывод, что увеличение контрастности тензора проницаемости в 10^3 раз практически не влияет на минимальное сингулярное число, т.е. на обусловленность матрицы дискретного аналога при использовании полного иерархического базиса. Минимальное сингулярное число матрицы СЛАУ для базиса с функциями Raviart-Thomas, 0 порядка уменьшается практически в 10 раз при увеличении контрастности в 10^3 раз. Несмотря на увеличение степеней свободы при расширении базиса (увеличение размера блоков и размера матрицы СЛАУ примерно в 1,5 раза) минимальное сингулярное число практически не изменяется при значительном изменении контрастности тензора проницаемости.

На рисунках 11 – 14 представлены графики сингулярных чисел при SVD-разложении матрицы СЛАУ, сформированной для двенадцати базисных функций скорости. Для матриц СЛАУ, сформированных при восьми, шестнадцати и двадцати базисных функций для скорости из иерархической базисной системы пространства H^{div} , графики сингулярных чисел практически совпадают с представленными.



Рис. 11. Сингулярные числа при SVD-разложении матрицы СЛАУ, сформированной при использовании Edge-функций Raviart-Thomas (RT) и функций 0 порядка и bubble-функций 1 типа для скорости, $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

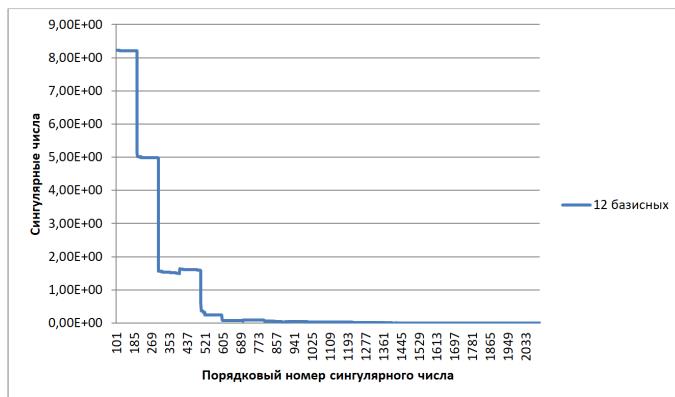


Рис. 12. Укрупнённо с 100-го сингулярного числа при SVD-разложении матрицы СЛАУ, сформированной при использовании Edge-функций Raviart-Thomas (RT) и функций 0 порядка и bubble-функций 1 типа для скорости, $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Решение системы линейных алгебраических уравнений осуществлялось при помощи комбинации метода бисопряжённых градиентов (Biconjugate Gradient

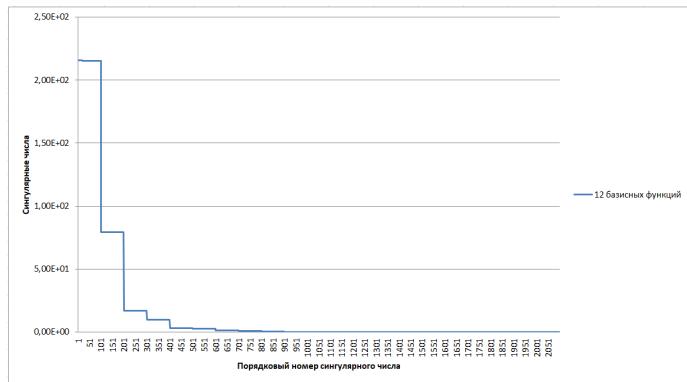


Рис. 13. Сингулярные числа при SVD-разложении матрицы СЛАУ, сформированной при использовании Edge-функций Raviart-Thomas (RT) и функций 0 порядка и bubble-функций 1 типа для скорости, $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$

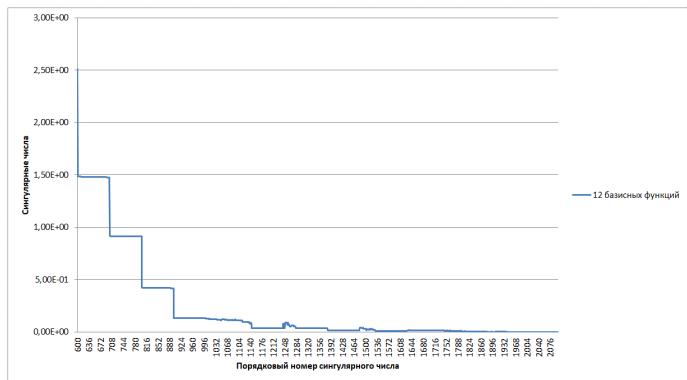


Рис. 14. Укрупнённо с 600-го сингулярного числа при SVD-разложении матрицы СЛАУ, сформированной при использовании Edge-функций Raviart-Thomas (RT) и функций 0 порядка и bubble-функций 1 типа для скорости, $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$

method (BCG)) и метода обобщённых минимальных невязок (Generalized Minimum Residual method (GMRES)) [21]. Такой подход позволяет использовать преимущества обоих методов для ускорения сходимости решения. Метод BCG обладает более высокой скоростью сходимости, однако после определённого количества итераций происходят осцилляции невязки, метод GMRES на первых итерациях позволяет значительно уменьшить ошибку, однако в дальнейшем сходимость происходит довольно медленно. В связи с этим применялась следующая стратегия: 50 итераций метода BCG, а затем 5 итераций метода GMRES – одна итерация комбинированного подхода. Подбор оптимального количества

итераций обоих методов, а также глубины метода GMRES осуществлялся в отдельном исследовании, не вошедшем в рамки данной работы.

5. Вычислительные эксперименты

5.1. Вычислительные эксперименты на задаче с аналитическим решением. Рассмотрим вариационную постановку (5), базисные функции скорости, определяемые формулами (8) – (19) и базисные функции давления, определяемые формулами (20) – (28). Пусть расчетная область $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, шаг сетки $h = 0.1$.

5.1.1. Квадратичная функция. Аналитическая функция давления, скорости и правая часть имеют вид:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= 16x(1-x)y(1-y) \\ \mathbf{u}(x, y) &= \begin{pmatrix} -16y(1-y)(1-2x) \\ -16x(1-x)(1-2y) \end{pmatrix} \\ f(x, y) &= -32(y(y-1) + x(x-1)) \end{aligned}$$

В таблице 2 представлены относительные погрешности вычисления давления (описываемого квадратичной функцией) в норме L_2 и относительные погрешности вычисления скорости в норме H^{div} и векторной норме L_2 . На рисунках 15 – 16 представлены численные поля, полученные с использованием разного количества базисных функций для скорости из пространства H^{div} .

ТАБЛИЦА 2. Относительные погрешности

Коэффициент проницаемости среды	Базисные функции	Погр. давления, $\frac{\ p-p^h\ _{L_2}}{\ p\ _{L_2}}$	Погр. скорости, $\frac{\ \mathbf{u}-\mathbf{u}^h\ _{H^{div}}}{\ \mathbf{u}\ _{H^{div}}}$	Погр. скорости, $\frac{\ \mathbf{u}-\mathbf{u}^h\ _{L_2}}{\ \mathbf{u}\ _{L_2}}$
$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	Edge-функции Raviart-Thomas (RT), 0 порядка	4.79e-4	6.67e-2	7.59e-3
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 типа	4.90e-4	6.67e-2	7.34e-3
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 и 2 типа	1.65e-4	1.24e-2	4.89e-3
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1, 2 и 3 типа	7.54e-5	5.85e-3	2.31e-3
$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$	Edge-функции Raviart-Thomas (RT), 0 порядка	7.80e-4	8.14e-2	9.27e-3
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 типа	7.80e-4	8.14e-2	8.89e-3

Продолжение таблицы 2

Коэффициент проницаемости среды	Базисные функции	Погр. давления, $\frac{\ p-p^h\ _{L_2}}{\ p\ _{L_2}}$	Погр. скорости, $\frac{\ \mathbf{u}-\mathbf{u}^h\ _{H^{\text{div}}}}{\ \mathbf{u}\ _{H^{\text{div}}}}$	Погр. скорости, $\frac{\ \mathbf{u}-\mathbf{u}^h\ _{L_2}}{\ \mathbf{u}\ _{L_2}}$
$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 и 2 типа	2.68e-4	5.17e-2	5.64e-3
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1, 2 и 3 типа	2.26e-4	2.46e-2	2.59e-3
$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$	Edge-функции Raviart-Thomas (RT), 0 порядка	1.69e-3	8.68e-2	9.90e-3
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 типа	1.68e-3	8.68e-2	9.79e-3
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 и 2 типа	1.65e-3	8.68e-2	9.82e-3
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1, 2 и 3 типа	1.42e-3	2.35e-2	3.28e-3
	Edge-функции Raviart-Thomas (RT), 0 порядка	1.39e-2	8.74e-2	1.00e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 типа	1.39e-2	8.74e-2	9.99e-3
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 и 2 типа	1.39e-2	8.74e-2	1.00e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1, 2 и 3 типа	1.34e-2	2.34e-2	3.55e-3

Из таблицы 2 видно, что добавление в базис bubble-функций 1 типа особо не влияет на увеличение точности определения решения. Использование bubble-функций 1, 2 и 3 типа при любой контрастности коэффициента проницаемости среды позволяет сократить погрешность вычисления скорости примерно в 3 раза. Увеличение контрастности коэффициента проницаемости среды приводит к росту погрешности определения давления: контрастность 1 – относительная погрешность $7.54e - 5$, контрастность 10^3 – относительная погрешность $1.34e - 2$. Однако, несмотря на увеличение контрастности и возрастание размерности блоков матрицы СЛАУ в связи с добавлением в базисную систему из

пространства H^{div} bubble-функций 1, 2 и 3 типа, использование базиса полного порядка позволяет сохранить уровень погрешности определения скорости.

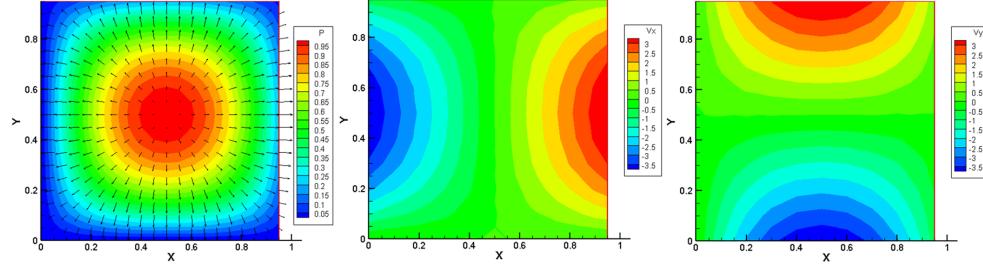


Рис. 15. Квадратичная функция: поля давления, x-, y-компоненты скорости полученные с использованием edge-функций Raviart-Thomas и 0 порядка, коэффициент проницаемости среды $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

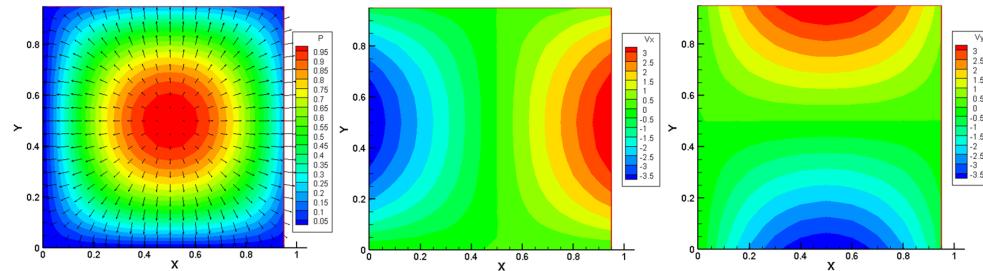


Рис. 16. Квадратичная функция: поля давления, x-, y-компоненты скорости полученные с использованием edge-функций Raviart-Thomas, 0 порядка и bubble-функций 1, 2 и 3 типа, коэффициент проницаемости среды $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.1.2. Гармоническая функция. Аналитическая функция давления, скорости и правая часть имеют вид:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \sin 2\pi x \sin 2\pi y \\ \mathbf{u}(x, y) &= \begin{pmatrix} -2\pi \sin 2\pi y \cos 2\pi x \\ -2\pi \sin 2\pi x \cos 2\pi y \end{pmatrix} \\ f(x, y) &= 8\pi^2 \sin 2\pi x \sin 2\pi y \end{aligned}$$

В таблице 3 представлены относительные погрешности вычисления давления (описываемого гармонической функцией) в норме L_2 и относительные погрешности вычисления скорости в норме H^{div} и векторной норме L_2 . На рисунках 17 – 18 представлены численные поля, полученные с использованием разного количества базисных функций для скорости из пространства H^{div} .

ТАБЛИЦА 3. Относительные погрешности

Коэффициент проницаемости среды	Базисные функции	Погр. давления, $\frac{\ p-p^h\ _{L_2}}{\ p\ _{L_2}}$	Погр. скорости, $\frac{\ \mathbf{u}-\mathbf{u}^h\ _{H^{\text{div}}}}{\ \mathbf{u}\ _{H^{\text{div}}}}$	Погр. скорости, $\frac{\ \mathbf{u}-\mathbf{u}^h\ _{L_2}}{\ \mathbf{u}\ _{L_2}}$
$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	Edge-функции Raviart-Thomas (RT), 0 порядка	6.13e-3	2.62e-1	4.69e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 типа	6.13e-3	2.62e-1	4.69e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 и 2 типа	1.91e-3	1.84e-1	3.29e-2
$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$	Edge-функции Raviart-Thomas (RT), 0 порядка	7.45e-3	2.59e-1	4.58e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 типа	7.35e-3	2.60e-1	4.50e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 и 2 типа	2.98e-3	1.86e-1	3.22e-2
$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$	Edge-функции Raviart-Thomas (RT), 0 порядка	1.47e-2	2.58e-1	4.64e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 типа	1.46e-2	2.58e-1	4.64e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 и 2 типа	1.06e-2	2.02e-1	3.64e-2

Таблица 3 показывает, что использование bubble-функций 1 типа практически не влияет на точность нахождения скорости, однако включение bubble-функций 1 и 2 типа в иерархическую базисную систему из пространства H^{div} позволяет сократить на 30-40% относительную погрешность вычисления скорости. Увеличение контрастности коэффициента проницаемости среды, также как и в случае квадратичной функции, приводит к росту погрешности определения давления. Несмотря на увеличение контрастности и рост размерности СЛАУ использование bubble-функций 1 и 2 типа позволяет сохранить уровень погрешности определения скорости.

5.1.3. Экспоненциальная функция. Аналитическая функция давления, скорости и правая часть имеют вид:

$$p(x, y) = e^{-10((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)}$$

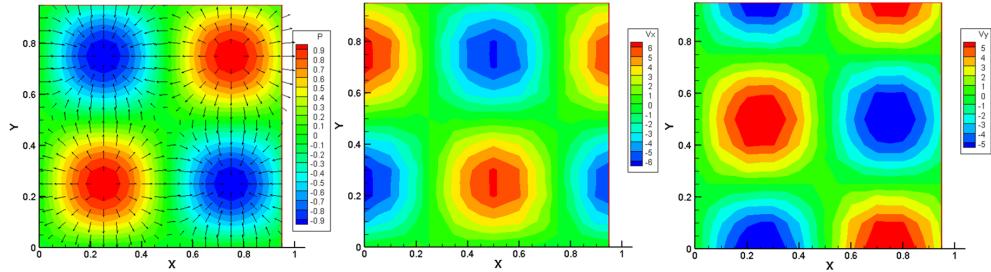


Рис. 17. Гармоническая функция: поля давления, x-, y-компоненты скорости полученные с использованием edge-функций Raviart-Thomas и 0 порядка, коэффициент проницаемости среды $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

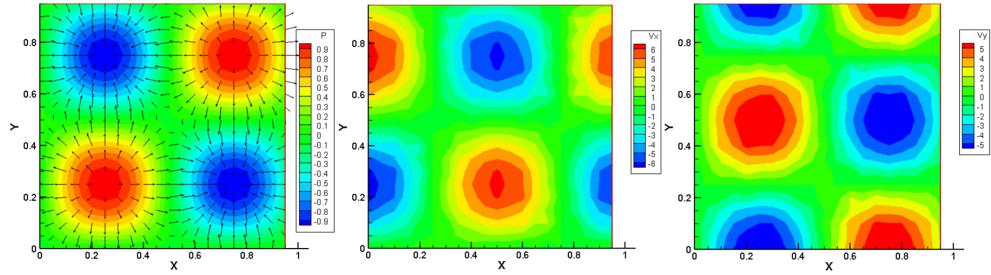


Рис. 18. Гармоническая функция: поля давления, x-, y-компоненты скорости полученные с использованием edge-функций Raviart-Thomas, 0 порядка и bubble-функций 1 и 2 типа, коэффициент проницаемости среды $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} 20(x - 0.5)e^{-10((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)} \\ 20(y - 0.5)e^{-10((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)} \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) = e^{-10((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)} (40 - (20x - 10)^2 - (20y - 10)^2)$$

В таблице 4 представлены относительные погрешности вычисления давления (описываемого экспоненциальной функцией) в норме L_2 и относительные погрешности вычисления скорости в норме H^{div} и векторной норме L_2 . На рисунках 19 – 20 представлены численные поля, полученные с использованием разного количества базисных функций для скорости из пространства H^{div} .

ТАБЛИЦА 4. Относительные погрешности

Коэффициент проницаемости среды	Базисные функции	Погр. давления, $\frac{\ p-p^h\ _{L_2}}{\ p\ _{L_2}}$	Погр. скорости, $\frac{\ \mathbf{u}-\mathbf{u}^h\ _{H^{\text{div}}}}{\ \mathbf{u}\ _{H^{\text{div}}}}$	Погр. скорости, $\frac{\ \mathbf{u}-\mathbf{u}^h\ _{L_2}}{\ \mathbf{u}\ _{L_2}}$
$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	Edge-функции Raviart-Thomas (RT), 0 порядка	1.85e-3	2.26e-1	2.90e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 типа	1.84e-3	2.26e-1	2.86e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 и 2 типа	6.91e-4	1.60e-1	2.03e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1, 2 и 3 типа	6.17e-4	6.79e-2	7.42e-3
$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$	Edge-функции Raviart-Thomas (RT), 0 порядка	2.14e-3	2.29e-1	3.16e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 типа	2.13e-3	2.28e-1	3.12e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 и 2 типа	1.19e-3	1.85e-1	2.51e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1, 2 и 3 типа	1.19e-3	1.77e-1	8.41e-3
$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$	Edge-функции Raviart-Thomas (RT), 0 порядка	3.11e-3	2.30e-1	3.32e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 типа	3.07e-3	2.29e-1	3.28e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 и 2 типа	2.54e-3	2.09e-1	2.99e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1, 2 и 3 типа	2.07e-3	1.18e-1	8.80e-3
$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$	Edge-функции Raviart-Thomas (RT), 0 порядка	1.72e-2	2.30e-1	3.34e-2

Продолжение таблицы 4

Коэффициент проницаемости среды	Базисные функции	Погр. давления, $\frac{\ p-p^h\ _{L_2}}{\ p\ _{L_2}}$	Погр. скорости, $\frac{\ \mathbf{u}-\mathbf{u}^h\ _{H^{div}}}{\ \mathbf{u}\ _{H^{div}}}$	Погр. скорости, $\frac{\ \mathbf{u}-\mathbf{u}^h\ _{L_2}}{\ \mathbf{u}\ _{L_2}}$
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 типа	1.70e-2	2.30e-1	3.31e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1 и 2 типа	1.58e-2	1.83e-1	3.02e-2
	Edge-функции RT, 0 порядка + bubble-функции 1, 2 и 3 типа	1.57e-2	1.18e-1	9.42e-3

Анализ результатов из таблицы 4 показывает, что включение bubble-функций 1 типа практически не оказывает влияния на точность вычисления скорости. Но добавление в базисную систему для скорости bubble-функций 1, 2 и 3 типа позволяет уменьшить относительную погрешность вычисления вектора скорости в среднем в 2,5 раза. Увеличение контрастности коэффициента проницаемости среды также приводит к росту погрешности определения давления. Однако, несмотря на увеличение контрастности и рост размерности блоков матрицы СЛАУ в связи с добавление в базисную систему из пространства H^{div} bubble-функций 1, 2 и 3 типа, использование базиса полного порядка позволяет сохранить уровень погрешности определения скорости.

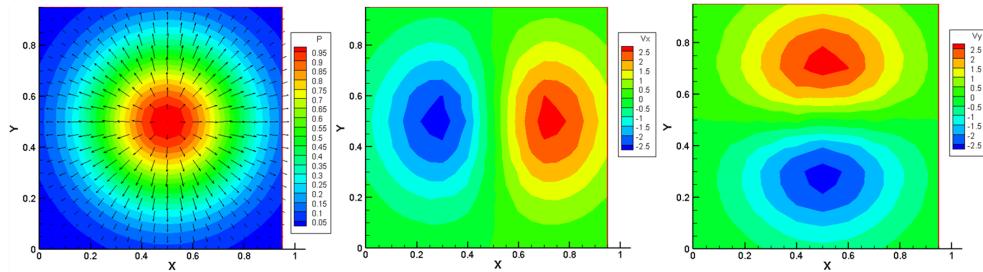


Рис. 19. Экспоненциальная функция: поля давления, x-, y-компоненты скорости полученные с использованием edge-функций Raviart-Thomas и 0 порядка, коэффициент проницаемости среды $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы была построена вычислительная схема для смешанной постановки на базе разрывного метода Галеркина для решения задачи Дарси с тензорным коэффициентом проницаемости среды. Подход, описанный в [8],

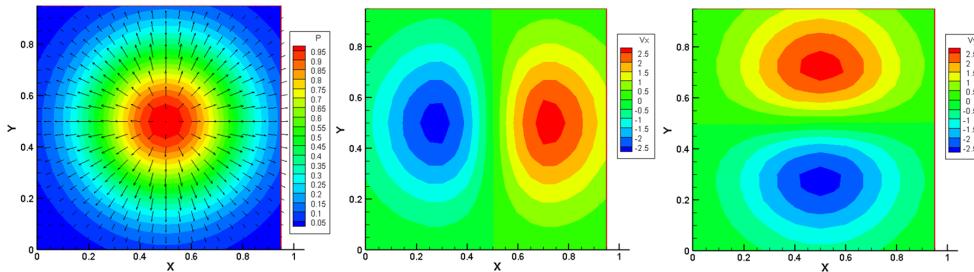


Рис. 20. Экспоненциальная функция: поля давления, x-, y-компоненты скорости полученные с использованием edge-функций Raviart-Thomas, 0 порядка и bubble-функций 1, 2 и 3 типа, коэффициент проницаемости среды $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

позволил получить устойчивую схему, обладающую необходимыми свойствами. Получено, что вычислительная схема с численными потоками F. Brezzi и T. J. R. Hughes устойчива к контрастным значениям тензорного коэффициента проницаемости среды.

Анализ сингулярного разложения матрицы СЛАУ дискретного аналога смешанной постановки позволяет сделать вывод, что увеличение контрастности тензора проницаемости среды в 1000 раз практически не влияет на минимальное сингулярное число, т.е. на обусловленность матрицы дискретного аналога при использовании полного иерархического базиса. Минимальное сингулярное число матрицы СЛАУ для базиса с функциями Raviart-Thomas, 0 порядка уменьшается практически в 10 раз при увеличении контрастности в 1000 раз. Несмотря на увеличение степеней свободы при расширении базиса (увеличение размера блоков и размера матрицы СЛАУ примерно в 1,5 раза) минимальное сингулярное число практически не изменяется при значительном изменении контрастности тензора проницаемости.

Сконструированы иерархические базисы в пространстве H^{div} для скорости и пространстве H^1 для давления. Исследования на классе модельных задач показали, что добавление в базис скорости bubble-функций 1 типа особо не влияет на увеличение точности определения решения. Использование bubble-функций 1, 2 и 3 типа при любой контрастности коэффициента проницаемости среды позволяет сократить погрешность вычисления скорости примерно в 3 раза для квадратичной функции, на 30-40% для гармонической функции и в среднем в 2,5 раза для экспоненциальной функции. Увеличение контрастности коэффициента проницаемости среды приводит к росту погрешности определения давления. Однако, несмотря на увеличение контрастности до 10^3 и возрастание размерности блоков матрицы СЛАУ в связи с добавлением в базисную систему из пространства H^{div} bubble-функций 1, 2 и 3 типа, использование базиса полного порядка позволяет сохранить уровень погрешности определения скорости.

Разработан программный комплекс, позволяющий задавать разбиение расчетной области на прямоугольные конечные элементы без учета согласованности элементов между собой, а также предусмотрена возможность экспорта

решения задачи в файл формата ".dat" программного пакета "Tecplot" для графического отображения и анализа.

REFERENCES

- [1] N.E. Leontiev, *Fundamentals of the filtration theory: Study guide*, Applied Research Centre Publ., MSU, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 2009.
- [2] L.S. Leibenzon, *Underground hydrodynamics*, The Academy of Sciences of the USSR, Moscow, 1953.
- [3] D.N. Arnold, *Mixed finite element methods for elliptic problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **82**:1-3 (1990), 281–300. Zbl 0729.73198
- [4] F. Brezzi, *On the existence, uniqueness, and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers*, Rev. Franc. Automat. Inform. Rech. Operat. 8, Analyse numer., R-2, (1974), 129–151. Zbl 0338.90047
- [5] D.N. Arnold, F. Brezzi, *Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates*, RAIRO, Modelisation Math. Anal. Numer., **19** (1985), 7–32. Zbl 0729.73198
- [6] M. Ainsworth, P. Coggins, *The stability of mixed hp-finite element methods for Stokes flow on high aspect ratio elements*, Siam J. Numer. Anal., **38**:5 (2000), 1721–1761. Zbl 0989.76039
- [7] A. Masud, T.J.R. Hughes, *A stabilized mixed finite element method for Darcy flow*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **191** (2002), 4341–4370. Zbl 1015.76047
- [8] F. Brezzi, T.J.R. Hughes, L.D. Marini, A. Masud, *Mixed discontinuous Galerkin methods for Darcy flow*, J. Sci. Comput., **22**–**23** (2005), 119–225. Zbl 1103.76031
- [9] D.N. Arnold, F. Brezzi, L.D. Marini, *Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems*, SIAM J. Numer. Anal., **39**:5 (2002), 1749–1779. Zbl 1008.65080
- [10] G.N. Gatica, R. Ruiz-Baier, G. Tierra, *A mixed finite element method for Darcy's equations with pressure dependent porosity*, Math. Comp., **85**:297 (2016), 1–33. Zbl 1329.76169
- [11] L. Nouveau, M. Ricchiuto, G. Scovazzi, *High-Order gradients with the shifted boundary method: an embedded enriched mixed formulation for elliptic PDEs*, J. Comput. Phys., **398** (2019), 108898. MR4000067
- [12] T.P. Barrios, J.M. Cascon, M. Gonzalez, *A posteriori error analysis of a stabilized mixed finite element method for Darcy flow*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **283** (2015), 909–922. Zbl 1423.76209
- [13] A. Cesmelioglu, S. Rhebergen, G.N. Wells, *An embedded-hybridized discontinuous Galerkin method for coupled Stokes-Darcy system*, J. Comput. Appl. Math., **367** (2020), Article ID 112476. Zbl 1428.65078
- [14] E. Chung, S. Pollock, Sai-Mang Pun, *Goal-oriented adaptivity of mixed GMsFEM for flows in heterogeneous media*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **323** (2017), 151–173. Zbl 1433.76076
- [15] Y. Amanbek, G. Singh, G. Pencheva, M.F. Wheeler, *Error indicators for incompressible Darcy Flow problems using enhanced velocity mixed finite element method*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **363** (2020), Article ID 112884. Zbl 1437.76019
- [16] T. Zhang, X. Li, *Meshless analysis of Darcy flow with a variational multiscale interpolating element-free Galerkin method*, Eng. Anal. Bound. Elem., **100** (2019), 237–245. Zbl 07014427
- [17] J.D. Audu, F. Fairag, K. Mustapha, *Mixed finite element analysis for generalized Darcy-Forchheimer model in porous media*, J. Comput. Appl. Math., **353** (2019), 191–203. Zbl 1432.76152
- [18] R. Li, Z. Sun, F. Yang, Z. Yang, *A finite element method by patch reconstruction for the Stokes problem using mixed formulations*, J. Comput. Appl. Math., **353** (2019), 1–20. Zbl 1427.65371
- [19] A.Y. Chernyshenko, M.A. Olshanskii, *An unfitted finite element method for the Darcy problem in a fracture network*, J. Comput. Appl. Math., **366** (2020), Article ID 112424. Zbl 07126182
- [20] P.G.S. Carvalho, P.R.B. Devloo, S.M. Gomes, *On the use of divergence balanced $\mathbf{H}(\text{div}) - L^2$ pair of approximation spaces for divergence-free and robust simulations of Stokes, coupled Stokes-Darcy and Brinkman problems*, Mathematics and Computers in Simulation, **170** (2020), 51–78.

- [21] H.A. van der Vorst, *Iterative Krylov methods for large linear systems*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics **13**, Cambridge University Press, Cambridge, 2003. Zbl 1023.65027
- [22] F. Brezzi, D. Marini, *A survey on mixed finite element approximations*, IEEE Transactions on Magnetics, **30**:5 (1994), 3547–3551.
- [23] P. Solin, K. Segeth, I. Dolezel, *High-order finite element methods*, CRC Press, Boca Raton, 2004. Zbl 1032.65132
- [24] S. Beuchler, V. Pillwein, S. Zaglmayr, *Sparsity optimized high order finite element functions for $H(\text{div})$ on simplices*, Numer. Math., **122**:2 (2012), 197–225. Zbl 1256.65100
- [25] P.A. Raviart, J.M. Thomas, *A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems*, Math. Aspects Finite Elem. Meth., Proc. Conf. Rome 1975, Lect. Notes Math., **606** (1977), 292–315. Zbl 0362.65089
- [26] O.A. Ladyzhenskaya, *Mathematical questions of the dynamics of a viscous incompressible fluid*, Nauka, Moscow, 1970. Zbl 0215.29004
- [27] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer Series in Computational Mathematics, **15**, Springer-Verlag, New York etc., 1991. Zbl 0788.73002
- [28] J. Kraus, S. Margenov, *Robust algebraic multilevel methods and algorithms*, Radon Series on Computational and Applied Mathematics, **5**, de Gruyter, Berlin, 2009. Zbl 1184.65113
- [29] O. Axelsson, P.S. Vassilevski, *Algebraic multilevel preconditioning methods I*, Numer. Math., **56**:2-3 (1989), 157–177. Zbl 0661.65110
- [30] O. Axelsson, P.S. Vassilevski, *Algebraic multilevel preconditioning methods II*, SIAM J. Numer. Anal., **27**:6 (1990), 1569–1590. Zbl 0715.65091
- [31] S.L. Sobolev, S.M. Nikol'skij, *Embedding theorems*, Am. Math. Soc., Transl., II. Ser., **87** (1970), 147–173. Zbl 0206.12204

SVETLANA ALEKSEEVNA TROFIMOVA

TROFIMUK INSTITUTE OF PETROLEUM GEOLOGY AND GEOPHYSICS SB RAS,

3, KOPTYUGA AVE.,

NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA

NOVOSIBIRSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY,

20, K. MARKSA AVE.,

NOVOSIBIRSK, 630073, RUSSIA

Email address: svetik-missy@mail.ru

NATALIA BORISOVNA ITKINA

NOVOSIBIRSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY,

20, K. MARKSA AVE.,

NOVOSIBIRSK, 630073, RUSSIA

Email address: itkina.nat@yandex.ru

ELLA PETROVNA SHURINA

TROFIMUK INSTITUTE OF PETROLEUM GEOLOGY AND GEOPHYSICS SB RAS,

3, KOPTYUGA AVE.,

NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA

NOVOSIBIRSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY,

20, K. MARKSA AVE.,

NOVOSIBIRSK, 630073, RUSSIA

Email address: shurina@online.sinor.ru