

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 17, стр. 179–189 (2020)

УДК 517.958

DOI 10.33048/semi.2020.17.013

MSC 35L20,35R30,35Q99

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ СЛОИСТОЙ
СРЕДЫ ОТ ВРЕМЕННОЙ ЧАСТОТЫ

У.Д. ДУРДИЕВ

ABSTRACT. The paper presents a numerical method for determining the parameters of the memory function for a horizontally layered medium. Numerical modeling made it possible to choose the optimal frequency range for constructing the residual functional. Numerical examples illustrating the solution of the inverse problem are presented.

Keywords: Maxwell equations, Riccati equation, inverse problem, residual functionality.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе представлен численный метод по определению зависимости диэлектрической проницаемости от частоты, неизменяемая часть диэлектрической проницаемости считалась известной.

На практике замечено, что при использовании высокочастотных источников величина диэлектрической проницаемости начинает зависеть от частоты. Для учёта данного явления в уравнениях Максвелла полагают, что вектор индукции электромагнитного поля D связан с вектором напряженности электромагнитного поля E посредством интегрального оператора. Среды, обладающие таким свойством называют средами с памятью или средами с последствием.

С одной стороны, прямые и обратные задачи по определению функции памяти среды изучены для достаточно широкого круга прямых и обратных задач.

DURDIEV, U.D., NUMERICAL METHOD FOR DETERMINING THE DEPENDENCE OF THE DIELECTRIC PERMITTIVITY ON THE FREQUENCY IN THE EQUATION OF ELECTRODYNAMICS WITH MEMORY.

© 2020 Дурдиев У.Д.

Работа поддержана Министерством инновационного развития Республики Узбекистан (грант Ф-4-02).

Поступила 6 декабря 2019 г., опубликована 21 февраля 2020 г.

Можно, например, отметить работы [1]–[16], а так же работы автора [17, 18]. С другой стороны, весьма малое количество работ посвящено численным методам решения данных задач. Можно отметить на эту тему работы [19, 20].

Во многих практических случаях используется горизонтально-слоистая модель среды. Первый алгоритм решения прямой задачи (метод послойного пересчета), пригодный для машинной реализации, был предложен в работе [24], который затем был усовершенствован в работах [25, 26]. Далее алгоритм был развит в работах [27]–[35]. Суть метода заключается в сведении дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений второго порядка к дифференциальному уравнению Риккати или дифференциальному матричному уравнению Риккати. Решение дифференциального уравнения Риккати или дифференциального матричного уравнения Риккати может быть получено в форме, которая позволяет осуществлять послойный пересчет без накопления ошибок округления. Данный алгоритм позволяет вычислять решение прямой задачи очень быстро. В своей работе мы будем использовать аналогичный метод послойного пересчета для решения прямой задачи.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим среду – n -слойную структуру с границами раздела x_3^k , $k = \overline{0, N}$, $x_3^0 = 0$; k -ый слой находится в интервале $[x_3^{k-1}, x_3^k]$, последний $N + 1$ (подстилающий) слой есть $[x_3^N, \infty)$, $(-\infty, 0]$ – воздух (Рис. 2). Физические свойства каждого слоя характеризуются диэлектрической проницаемостью ε , проводимостью σ и характеристиками, отвечающими за памяти среды, т.е. данные функции являются кусочно-постоянными функциями переменной x_3 , $0 < x_3 < \infty$, и, например, ε_k – значение кусочно-постоянной функции $\varepsilon(x_3)$ в k -ом слое.

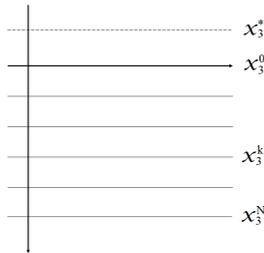


Рис. 1. Модель среды.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений Максвелла

$$(1) \quad \nabla \times H = (\partial/\partial t)D(x, t) + \sigma E + j, \quad \nabla \times E = -(\partial/\partial t)B(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+,$$

где D и B – индукции электромагнитного поля, а E и H – напряженность электромагнитного поля, j – плотность сторонних токов, ε – диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, ε_r –

относительная диэлектрическая проницаемость, σ – проводимость среды.

$$(2) \quad D(x, t) = \varepsilon E + \int_0^t \varphi(x_3, t - \tau) E(x, \tau) d\tau,$$

где $\varphi(t)$ – скалярная функция времени, характеризующая память среды. Эта функция конечна при всех значениях своего аргумента и стремится к нулю, когда $t \rightarrow \infty$.

$$(3) \quad B(x, t) = \mu H(x, t),$$

Здесь $E = (E_1, E_2, E_3)^T$, $H = (H_1, H_2, H_3)^T$.

Предположим, что источником, возбуждающим электромагнитное поле, является шнуровой источник следующего вида:

$$(4) \quad j = j^0 \delta(x_1, x_3) F(t), \quad j^0 = (0, 1, 0)^T.$$

Считаем, что в начальный момент времени среды находились в покое, т.е.

$$(5) \quad E|_{t < 0} \equiv 0, \quad H|_{t < 0} \equiv 0.$$

В этом случае, уравнения Максвелла распадаются на две независимые подсистемы (см., например, [21, 22]), и после несложных преобразований получим уравнение для компоненты электрического поля E_2

$$(6) \quad \varepsilon \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} + \int_0^t \varphi(x_3, t - \tau) \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2}(x_1, x_3, \tau) d\tau + \sigma E_2 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_3^2}.$$

В силу непрерывности тангенциальных компонент электромагнитного поля имеем следующие условия склейки в точках разрыва среды:

$$(7) \quad [E_2]_{x_3^k} = 0, \quad \left[\frac{\partial E_2}{\partial x_3} \right]_{x_3^k} = 0.$$

Считаем, что в точке $x_3^0 = 0$ имеем следующие условия:

$$(8) \quad [E_2]_{x_3^0} = 0, \quad \left[\frac{\partial E_2}{\partial x_3} \right]_{x_3^0} = \delta(x_1) F'(t),$$

Начальные условия:

$$(9) \quad E_2|_{t < 0} \equiv 0.$$

Обратная задача: определить функцию $\varphi = \varphi(x_3, t)$, если относительно решения прямой задачи (6)-(9) известна дополнительная информация

$$(10) \quad E_2|_{x_3=0} = g(x_1, t).$$

На практике в силу конструкционных особенностей источника и регистрирующей аппаратуры, существует ограниченный интервал временных частот, для которых Фурье образ функции $g(x_1, t)$ мало искажен. Данное ограничение заставляет нас решать обратную задачу по восстановлению функции $\varphi(x_3, t)$ в частотной области. Кроме того, поскольку интервал временных частот ограничен, то, вообще говоря, функция $\varphi(x_3, t)$ определена быть не может. Известно [23], что для широкого круга сред функция памяти может быть представлена следующей функцией

$$\varphi(x_3, t) = \varepsilon_0 A e^{-\gamma t}.$$

Очевидно, что для горизонтально-слоистой среды A и γ являются кусочно-постоянными функциями переменной x_3 .

Получим постановку прямой задачи в частотной области. С этой целью сделаем преобразование Фурье по переменной x_1 и преобразование Лапласа по временной переменной t . Т.е., имеем

$$(11) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - r^2 u = 0, \quad r^2 = \lambda^2 + \sigma p \mu_0 + \mu_0 \varepsilon_0 p^2 \left(\varepsilon_r + \frac{A_k}{\gamma_k + p} \right), \quad \text{Re } r > 0,$$

где u – образ Фурье функции E_2 по переменной x_1 и Лапласа по t , λ и $p = \beta + i\omega$ – параметры преобразования Фурье и Лапласа, β – параметр затухания, ω – круговая частота, $\omega = 2\pi f$ и f – временная частота.

Условия склейки примут вид

$$(12) \quad [u]_{x_3^k} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x_3} \right]_{x_3^k} = 0,$$

$$(13) \quad [u]_{x_3^0} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x_3} \right]_{x_3^0} = \mu p F(p).$$

К данным условиям необходимо добавить условие затухания на бесконечности

$$(14) \quad u \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow \pm\infty).$$

Дополнительная информация (8) примет вид:

$$(15) \quad u|_{x_3=0} = g(\lambda, p).$$

Обратная задача (11)-(15) в частотной области по определению кусочно-постоянных функций A и γ может быть решена при помощи минимизации функционала невязки

$$(16) \quad J[A, \gamma] = \sum_{k=1}^{N_\omega} |u(\lambda, 0, p) - g(\lambda, p)|^2, \quad p = \beta + i\omega_k$$

где ω_k принадлежит некоторому ограниченному интервалу, N_ω – количество частот из этого интервала, λ – известная постоянная.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Для вычисления функционала невязки (16) необходимо уметь быстро решать прямую задачу (11)-(15) или, говоря более точно, находить значение $u(\lambda, 0, p)$. С этой целью воспользуемся методом послойного пересчёта [25]-[35].

Рассмотрим функцию $y(x_3)$, которая удовлетворяет равенству

$$(17) \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = y(x_3)u(x_3),$$

где u есть решение дифференциального уравнения (11). Нетрудно видеть, что функция y удовлетворяет уравнению Риккати

$$(18) \quad y' + y^2 = r^2.$$

Благодаря условиям склейки (12) можно получить условия склейки

$$(19) \quad [y]_{x_3^k} = 0.$$

В каждом k -ом слое решение уравнения (18) может быть получено в следующем виде:

$$y(x_3) = r_k \frac{(y^k + r_k) e^{2r_k(x_3 - x_3^k)} + (y^k - r_k)}{(y^k + r_k) e^{2r_k(x_3 - x_3^k)} - (y^k - r_k)},$$

здесь $y^k \equiv y(x_3^k - 0)$.

Из удовлетворения краевого условия (14) следует, что в подстилающем слое $[x_3^N, \infty)$ решение уравнения Риккати (18) имеет вид

$$y(x_3) = -r_{N+1},$$

а в воздухе

$$y(x_3) = r_0.$$

Благодаря условиям склейки (19) имеем $y(x_3^k + 0) = y(x_3^k - 0) \equiv y^k$.

Условия склейки (13) и равенство (17) позволяют получить следующие соотношения:

$$y(0 + 0)u(0 + 0) - y(0 - 0)u(0 - 0) = \mu p F(p), \quad u(0 + 0) - u(0 - 0) = 0.$$

Откуда следует

$$u(\lambda, 0, p) = \frac{\mu p F(p)}{y^0 - y(0 - 0)}.$$

Исходя из вышеизложенного можем написать следующий алгоритм нахождения величины $u(\lambda, 0, p)$:

- осуществляем послойный пересчет:

$$y^N = -r_{N+1},$$

$$y^{k-1} = r_k \frac{(y^k + r_k) e^{2r_k(x_3^{k-1} - x_3^k)} + (y^k - r_k)}{(y^k + r_k) e^{2r_k(x_3^{k-1} - x_3^k)} - (y^k - r_k)}, \quad k = \overline{N, 1},$$

в конце процедуры получаем значение $y^0 \equiv y(0 + 0)$;

- вычисляем $y(0 - 0) = r_0$;
- вычисляем $u(\lambda, 0, p)$:

$$u(\lambda, 0, p) = \mu \frac{p F(p)}{y^0 - r_0}.$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА ФУНКЦИОНАЛА НЕВЯЗКИ (17)

Для минимизации функционала невязки (17) может быть использован какой-либо градиентный метод. Следовательно, необходимо уметь вычислять градиент функционала невязки.

Поскольку A и γ являются кусочно-постоянными функциями и память m -ого слоя характеризуется постоянными значениями A_m и γ_m , тогда функционал невязки $J[A, \gamma]$ (17) можно рассматривать как функцию $2N$ аргументов: $J[\dots, A_m, \dots, \dots, \gamma_m, \dots]$. Тогда её градиент – это вектор

$$(20) \quad \nabla J[\dots, A_m, \dots, \dots, \gamma_m, \dots] = \left(\dots, \frac{\partial J}{\partial A_m}, \dots, \dots, \frac{\partial J}{\partial \gamma_m}, \dots \right)^T.$$

Рассмотрим следующие неравенства:

$$(21) \quad \Phi(\dots, A_m, \dots) \leq \Phi(\dots, A_m + h_A, \dots) \quad \text{и} \quad \Phi(\dots, A_m, \dots) \leq \Phi(\dots, A_m - h_A, \dots),$$

$$(22) \quad \Phi(\dots, \gamma_m, \dots) \leq \Phi(\dots, \gamma_m + h_\gamma, \dots) \quad \text{и} \quad \Phi(\dots, \gamma_m, \dots) \leq \Phi(\dots, \gamma_m - h_\gamma, \dots).$$

Для вычисления частных производных в (20) могут быть использованы следующие выражения:

$$(23) \quad \frac{\partial J}{\partial A_m} = \begin{cases} 0, & \text{если выполняются (21),} \\ \frac{J(\dots, A_m + h_A, \dots) - J(\dots, A_m - h_A, \dots)}{2h_A}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \gamma_m} = \begin{cases} 0, & \text{если выполняются (22),} \\ \frac{J(\dots, \gamma_m + h_\gamma, \dots) - J(\dots, \gamma_m - h_\gamma, \dots)}{2h_\gamma}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Впервые формулы подобные (23) для вычисления градиента функционала невязки были использованы в работе [36]. Необходимость такой модификации была обусловлена тем, что использование только разностного выражения может привести к тому, что значение частной производной будет вычислено неправильно вплоть до знака. Неточное вычисление градиента приводит к тому, что теряется направление минимизации и продуцируется “прыгающая” минимизационная последовательность, т.е. сначала значение функционала невязки убывает до некоторой величины, затем значение функционала резко увеличивается, после чего снова происходит уменьшение, затем снова резкое увеличение, и так далее. Использование формул подобных (23) позволило избежать таких ситуаций. Они были опробованы при численном решении различных обратных задач на симмулированных и реальных данных (см., например, [37]-[45], и во многих других работах). Ни в одном случае “прыгающая” минимизационная последовательность не была получена.

Значения приращений h_A или h_γ выбираются при решении обратной задачи на симмулированных точных данных. Оптимальные значения приращений выбираются из условия минимума итераций для поиска минимума функционала невязки.

5. СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ И ФУНКЦИОНАЛА НЕВЯЗКИ

Будем считать, что зависимость поведения источника от времени определяется функцией

$$F(t) = A_0 e^{-a_0 t} \cos(\omega_0 t).$$

Здесь A_0 – амплитуда источника, параметр a_0 определяет скорость затухания, частота $\omega_0 = 2\pi f_0$ является несущей. В численных экспериментах ниже положим: $A_0 = 10^5$, $a_0 = 10^2$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, $f_0 = 500$ МГц.

Отметим, если при решении прямой задачи частота ω близка к ω_0 , то решение прямой задачи растет или убывает в значительных пределах (см. Рис. 5).

Исходя из опыта численного решения обратных задач в частотной области оптимизационным методом (см., например, [32, 38]), можно заключить, что для построения функционала невязки (16) не должны быть использованы частоты близкие к ω_0 .

Рассмотрим следующую реалистичную модель среды:

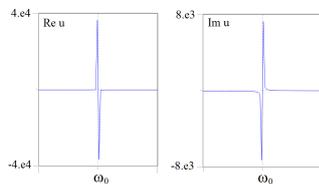


Рис. 2. Поведение величины $u(0, p)$ при изменении параметра ω в окрестности ω_0 .

| | $z_k, \text{ м}$ | $\sigma, \text{ См/м}$ | ε_r | $A \cdot 10^4, 1/\text{с}$ | $\gamma \cdot 10^{-8}, 1/\text{с}$ |
|--------|------------------|------------------------|-----------------|----------------------------|------------------------------------|
| воздух | — | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 |
| слой 1 | 0.3 | 0.0020 | 20.0 | 10.0 | 3.5 |
| слой 2 | 0.7 | 0.0022 | 25.0 | 25.0 | 8.8 |
| слой 3 | 1.0 | 0.0015 | 15.0 | 22.0 | 7.9 |
| слой 4 | 1.3 | 0.0018 | 20.0 | 18.0 | 8.2 |
| слой 5 | — | 0.0025 | 25.0 | 0.0 | 0.0 |

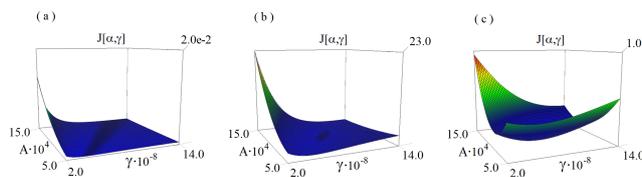


Рис. 3. Примеры поведения функционала невязки при использовании различных интервалов временных частот, а) $f \in [20, 80]$ МГц, б) $f \in [200, 400] \cup [600, 800]$ МГц, в) $f \in [2, 8]$ ГГц.

На Рис. 5 приведены примеры поведения функционала невязки, когда выбирались различные интервалы частот. Данный рисунок получен, когда варьировались величины A_1 и γ_1 в достаточно больших пределах, а остальные величины оставались неизменными (варьирование других пар величин $\{A_k, \gamma_k\}$ приводит к подобным результатам).

Результаты численного моделирования показывают, что наибольшие изменения функционала невязки происходят при использовании частот из интервала $[200, 400] \cup [600, 800]$ МГц, т.е. на этом интервале частот проявляется наибольшая зависимость комплексной диэлектрической проницаемости от частоты, что согласуется с результатами работы [23].

Таким образом, для решения обратной задачи по определению параметров функции памяти среды остановимся на использовании ранее упомянутого интервала частот (см. Рис. 5 б). Так же заметим, что функционал невязки на Рис. 5 имеет выпуклую форму, что даёт надежду на отсутствие локальных минимумов и максимумов. Так же необходимо отметить, что функционал невязки

имеет овражную форму: вариации параметров A_k вносят гораздо более значительный вклад в вариации функционала невязки, чем вариации параметров γ_k .

6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Для минимизации функционала невязки (17) можно использовать метод сопряженных градиентов (см., например, [46]). Т.е., минимизационная последовательность организуется следующим образом:

$$G^{k+1} = G^k - \theta_k P_k, \quad G = \begin{bmatrix} A \\ \gamma \end{bmatrix},$$

где k – номер итерации, G^0 – начальное приближение для искомым функций, P_k – сопряженное направление и

$$P_0 = J'[G^0], \quad P_k = J'[G^k] + \beta_k P_{k-1}, \quad \beta_k = \frac{\|J'[G^k]\|^2}{\|J'[G^{k-1}]\|^2}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

параметр θ_k – шаг метода, являющийся решением задачи минимизации функции одной переменной

$$\theta_k = \arg \min_{\theta > 0} J[G^k - \theta P_k].$$

Тестирование предложенного алгоритма осуществляется на симулированных данных, т.е. при помощи решения соответствующей прямой задачи вычисляются необходимые величины, после чего в значения функций, играющих роль дополнительной информации, добавляется случайная ошибка, например:

$$\tilde{g}(p) = g(p) \left(1 + \frac{Pr}{100} \xi \right),$$

здесь Pr – величина ошибки в процентах, ξ – комплексная случайная величина, нормально распределённая на единичном круге.

Для численных экспериментов была выбрана среда с реалистичными данными (см. параграф 5).

Для численного решения обратной задачи были использованы следующие параметры:

- для построения функционала невязки: т.к. $f_0 = 500$ МГц, используем два интервала $f \in [200, 400]$ и $[600, 800]$ МГц, количество временных частот $N_{\omega,1} = 3000$ и $N_{\omega,2} = 3000$ соответственно с равным шагом; $\beta = 10^{-4}$;
- для вычисления градиента функционала невязки: $h_A = 10^{-7}$ и $h_\gamma = 10^{-7}$;
- шаг метода сопряженных градиентов θ_k вычислялся с точностью 10^{-8} .

В обратной задаче определялись параметры памяти среды A_k и α_k ($k = \overline{1,4}$), являющиеся параметрами горизонтально-слоистой среды. Начальное приближение $A_k = 5 \cdot 10^{-4}$ 1/с и $\alpha_k = 10^8$ 1/с ($k = \overline{1,4}$). Результаты численных экспериментов представлены на Рис. 6.

Анализ восстановленных параметров показывает, что при ошибке 3% в данных обратной задачи (15) максимальная относительная ошибка при восстановлении параметров A_k ($k = \overline{1,4}$) составляет 7%, γ_k ($k = \overline{1,4}$) – 8%. При ошибке 5% – 12% и 13%, при ошибке 10% – 26% и 27% соответственно. Видно, что

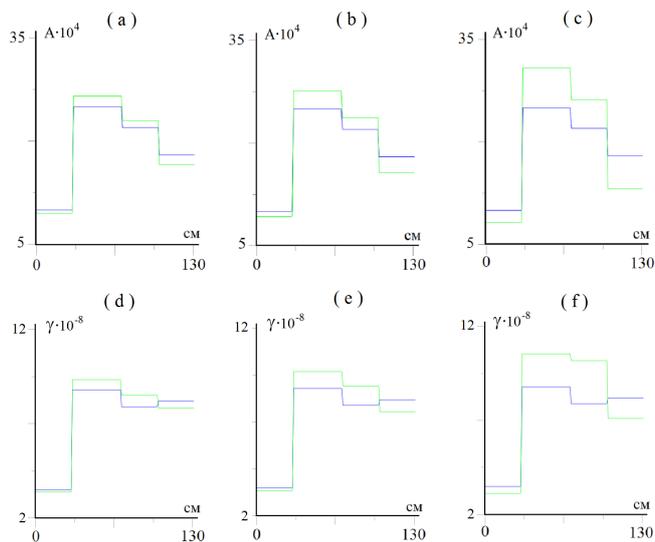


Рис. 4. Примеры восстановления параметров а)-с) A , d)-f) γ ; ошибка в данных обратной задачи а), d) 3%, b), e) 5% и с), f) 10%. Точное значение дано синей линией, восстановленное – зелёной.

несмотря на авражность функционала невязки, параметры γ_k восстановлены чуть менее хуже чем параметры A_k .

Вывод

В работе представлен численный метод определения параметров функции памяти для горизонтально-слоистой среды. Численное моделирование позволило выбрать оптимальный интервал частот для построения функционала невязки. Представлены численные примеры, иллюстрирующие решение обратной задачи.

REFERENCES

[1] V.G. Romanov, A. Lorenzi, *Identification of an electromagnetic coefficient connected with deformation currents*, *Inverse Probl.*, **9**:2 (1993), 301–319. Zbl 0771.35079
 [2] V.G. Romanov, A. Lorenzi, *Stability estimates for an inverse problem related to viscoelastic media*, *J. of Inverse III-Posed Probl.*, **14**:1 (2006), 57–82. Zbl 1097.45016
 [3] A. Lorenzi, F. Messina, V.G. Romanov, *Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system*, *Appl. Anal.*, **86**:11 (2007), 1375–1395. Zbl 1148.45013
 [4] V.G. Romanov, *Inverse problems for equation with a memory*, *Eurasian Jour. of Math. and Computer Applications*, **2**:4 (2014), 51–80.

- [5] V.G. Romanov, *Problem of determining the permittivity in the stationary system of Maxwell equations*, Dokl. Math., **95**:3 (2017), 230–234. Zbl 1375.35532
- [6] A. Lorenzi, *An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation*, Nonlinear Anal., Theory, Methods Appl., **22**:1 (1994), 21–44. Zbl 0818.93014
- [7] A. Lorenzi, E. Paparoni, *Direct and inverse problems in the theory of materials with memory*, Rend. Semin. Math. Univ. Padova, **87** (1992), 105–138. Zbl 0757.73018
- [8] A. Lorenzi, V. Priymenko *A duality approach for solving identification problems related to integrodifferential Maxwell's equations*, Rend. Semin. Math. Univ. Padova, **91** (1994), 31–51. Zbl 0804.45006
- [9] A.L. Bukhgeim, G.V. Dyatlov, G. Uhlmann, *Unique continuation for hyperbolic equations with memory*, J. Inverse III-Posed Probl., **15**:6 (2007), 587–598. Zbl 1141.35347
- [10] G.V. Dyatlov, *Determination for the memory kernel from boundary measurements on a finite time interval*, J. Inverse III-Posed Probl., **11**:1 (2003), 59–66. Zbl 1033.45014
- [11] D.K. Durdiev *Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations*, J. Math. Phys. Anal. Geom., **3**:4 (2007), 441–423. Zbl 1257.35191
- [12] D.K. Durdiev, *Global solvability of an inverse problem for an integro-differential equation of electrodynamics*, Differ. Equ., **44**:7 (2008), 893–899. Zbl 1175.78006
- [13] D.K. Durdiev, U.D. Durdiev, *Stability of the inverse problem solution for Maxwell's system integrodifferential equations in a homogeneous anisotropic media*, Uzbek Mathematical Journal, **2** (2014), 25–34. (in Russian)
- [14] D.K. Durdiev, Zh.D. Totieva, *The problem of determining the one-dimensional kernel of the electroviscoelasticity equation*, Sib. Math. J., **58**:3 (2017), 427–444. Zbl 1379.35306
- [15] D.K. Durdiev, Z.R. Bozorov, *A problem of determining the kernel of integrodifferential wave equation with weak horizontal properties*, Dal'nevost. Mat. Zh., **13**:2 (2013), 209–221. Zbl 1292.35325
- [16] D.K. Durdiev, Z.S. Safarov, *Inverse problem of determining the one-dimensional kernel of the viscoelasticity equation in a bounded domain*, Math. Notes, **97**:6 (2015), 867–877. Zbl 1326.35375
- [17] U.D. Durdiev, *A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation*, Eurasian Jour. of Math. and Computer Appl., **7**:2 (2019), 4–19.
- [18] U.D. Durdiev, Z.D. Totieva, *A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation*, Math. Meth. Appl. Sciences, **42**:18 (2019), 7440–7451.
- [19] S.I. Kabanikhin, A.L. Karchevsky, A. Lorenzi, *Laurent'ev regularization of solutions to linear integrodifferential inverse problems*, J. Inverse III-Posed Probl., **1**:2 (1993), 115–140. Zbl 0821.65091
- [20] A.L. Karchevsky, A.G. Fatianov, *Numerical solution of the inverse problem for a system of elasticity with the aftereffect for a vertically inhomogeneous medium*, Sib. Zh. Vychisl. Mat., **4**:3 (2001), 259–268. Zbl 0982.86004
- [21] V.G. Romanov, S.I. Kabanikhin, *Inverse Problems for Maxwell's Equations*, Utrecht, VSP, Berlin, 1994. Zbl 0853.35001
- [22] D.K. Durdiev, *Inverse Problems for Media with Aftereffects*. Turon-Ikbol, Tashkent, 2014. (in Russian)
- [23] M.I. Epov, V.L. Mironov, P.P. Bobrov, A.V. Repin, *The dielectric permeability of oil-comprising clayey rocks in the frequency range 100 Hz–4 GHz*, Krasnoyarsk, Inst. Phys. SO RAN, **847** (2009), 18 p. (in Russian)
- [24] A.N. Tikhonov, D.N. Shaxsuvarov, *Method for calculating electromagnetic fields excited by alternating current in layered media*, Izv. AN SSSR, ser. Geophys., **3** (1956), 245–251. (in Russian)
- [25] V.I. Dmitriev, *General method for calculating the electromagnetic field in a layered medium*, Numerical methods and Programming, **10** (1968), 55–65. (in Russian)
- [26] V.I. Dmitriev, E.A. Fedorova, *Numerical investigations of electromagnetic fields in layered medium*, Numerical methods and Programming, **32** (1980), 150–183. (in Russian)
- [27] G.V. Akkuratov, V.I. Dmitriev, *Method for calculating the field of stable elastic vibrations in a layered medium*, In: Numerical methods in Geophysics, Moskva, MGU, 1979, 3–12. (in Russian)

- [28] G.V. Akkuratov, V.I. Dmitriev, *Method of calculation of a field of steady elastic vibrations in a layered medium*, Zh.Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **24**:2 (1984), 272–286. Zbl 0557.73050
- [29] A.G. Fatianov, B.G. Mikhailenko, *Method for calculating non-stationary wave fields in inelastic layered-inhomogeneous media*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **301** (1988), 834–839. (in Russian)
- [30] A.G. Fatianov, *Unsteady seismic wave fields in inhomogeneous anisotropic media with energy absorption*, Novosibirsk: Preprint, Vychist. Center SO AN, **857** (1989). (in Russian)
- [31] A.G. Fatianov, *Semi-analytical method for solving direct dynamic problems in layered media*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **310** (1990), 323–327. (in Russian)
- [32] A.L. Karchevsky, *A numerical solution to a system of elasticity equations for layered anisotropic media*, Russian Geology and Geophysics, **46**:3 (2005), 339–351.
- [33] A.L. Karchevsky, *The direct dynamical problem of seismics for horizontally stratified media*, Sib. Electron. Mat. Izv., **2** (2005), 23–61. Zbl 1125.86004
- [34] A.L. Karchevsky, *A frequency-domain analytical solution of Maxwell's equations for layered anisotropic media*, Russian Geology and Geophysics, **48**:8 (2007), 689–695.
- [35] A.L. Karchevsky, B.R. Rysbayuly, *Analytical expressions for a solution of convective heat and moisture transfer equations in the frequency domain for layered media* Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications, **3**:4 (2015), 55–67.
- [36] A.L. Karchevsky, *Numerical solution to the one-dimensional inverse problem for an elastic system*, Dokl. Earth Sci., **375**:8 (2000), 1325–1328. Zbl 1059.74530
- [37] A.L. Karchevsky, *Simultaneous reconstruction of permittivity and conductivity*, J. Inverse and III-Posed Probl., **17**:4 (2009), 387–404. Zbl 1177.35253
- [38] E. Kurpinar, A.L. Karchevsky, *Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system for horizontally stratified media*, Inverse Probl., **20**:3 (2004), 953–976. Zbl 1062.74025
- [39] A.L. Karchevsky, *Numerical reconstruction of medium parameters of member of thin anisotropic layers*, J. Inverse III-Posed Probl., **12**:5 (2004), 519–534. Zbl 1080.74035
- [40] A.L. Karchevsky, *Reconstruction of pressure velocities and boundaries of thin layers in thinly-stratified layers*. J. Inv. Ill-Posed Problems, **18**:4 (2010), 371–388. Zbl 1279.35112
- [41] L.A. Nazarov, L.A. Nazarova, A.L. Karchevskii, A.V. Panov, *Estimation of stresses and deformation properties of rock masses which is based on the solution of an inverse problem from the measurement data of the free surface displacement*, J. Appl. Ind. Math., **7**:2 (2013), 234–240. Zbl 1340.74045
- [42] A.A. Duchkov, A.L. Karchevsky, *Estimation of terrestrial heat flow from temperature measurements in bottom sediments*, J. Appl. Ind. Math., **7**:4 (2013), 480–502. Zbl 1340.80002
- [43] L.A. Nazarova, L.A. Nazarov, A.L. Karchevsky, M. Vandamme, *Determining Kinetic Parameters of a Block Coal Bed Gas by Solving Inverse Problem Based on Data of Borehole Gas Measurements*, Journal of Mining Science, **51**:4 (2015), 666–672.
- [44] A.L. Karchevsky, *Determination of the possibility of rock burst in a coal seam*, J. Appl. Ind. Math., **11**:4 (2017), 527–534. Zbl 1399.74083
- [45] A.L. Karchevsky, L.A. Nazarova, V.N. Zakharov, L.A. Nazarov, *Stress state estimation in coal bed under random conditions in contact zone with enclosing rocks based on inverse problem solution*, Gornyi zhurnal, **11** (2017), 37–40.
- [46] F.P. Vasilyev, *Numerical methods for solving extreme problems*, Nauka, Moskva, 1988. Zbl 0661.65055

UMIDJAN DURDIMURATOVICH DURDIEV
 BUKHARA STATE UNIVERSITY,
 11, M. IKBOL STR.,
 BUKHARA, 200114, UZBEKISTAN
 E-mail address: umidjan93@mail.ru