S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 1943–1952 (2020) УДК 517.958

DOI 10.33048/semi.2020.17.130 MSC 35Q20, 35Q60

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ С КОМПТОНОВСКИМ РАССЕЯНИЕМ

И.В. ПРОХОРОВ, И.П. ЯРОВЕНКО

Abstract. The paper considers the initial-boundary-value problem for the radiative transfer equation in an inhomogeneous medium with a collision integral that describes Compton scattering by free electrons. The problem is reduced to abstract Cauchy problem in Banach space. Using the theory of strongly continuous semigroups, well-posedness of the Cauchy problem is proved. Conditions of the operator semigroup stability are found.

Keywords: radiative transfer equation, Compton scattering, Cauchy problem, strongly continuous semigroup

1. Введение

В связи с широким внедрением перспективных технологий в области разработки импульсных источником рентгеновского излучения, и современными исследованиями астрофизических процессов, быстро протекающих в различных небесных объектах, весьма актуальны становятся задачи математического моделирования нестационарного взаимодействия гамма-излучения с веществом [1–3]. При таком взаимодействии преобладающим эффектом становится некогерентное рассеяние, когда гамма-квант сталкиваясь с электроном теряет часть своей энергии в зависимости от угла рассеяния. Соотношение выражающее связь энергии до и после столкновения фотона с электроном носит название закона Комптона [3]. В последнее время наблюдается стабильный рост

Prokhorov, I.V., Yarovenko, I.P., The Cauchy problem for the non-stationary radiative transfer equation with Compton scattering.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20–01-00173).

Поступила 23 июня 2020 г., опубликована 26 ноября 2020 г.

исследований для моделей рентгеновской томографии в средах с преобладанием комптоновского рассеяния [4–7].

Несмотря на такой большой интерес к указанным моделям, вопросы строгого обоснования корректности краевых задач для уравнения переноса излучения с комптоновским рассеянием достаточно долго оставались без ответа. В работах Аниконова Д.С., Коноваловой Д.С. [8–10] и последующих статьях Яровенко И.П. [11, 12] рассматривались вопросы существования и единственности решений краевых задач для стационарного уравнения переноса излучения с комптоновским рассеянием в различных функциональных пространствах. В [8–12] доказаны теоремы об однозначной разрешимости задачи без традиционных в теории переноса условий «типа неравенств» на коэффициенты уравнения.

В данной работе исследованы вопросы корректности задачи Коши для нестационарного уравнения переноса излучения с комптоновским рассеянием. Доказательство корректности задачи проведено с привлечением теории сильно непрерывных полугрупп, путем сведения начально-краевой задачи к абстрактной задаче Коши [13,14]. Показано, что спектр генератора сильно непрерывной полугруппы разрешающих операторов содержится в левой полуплоскости комплексной плоскости, и получены условия стабилизации решения задачи Коши.

2. Уравнение переноса излучения, начальные и граничные условия. Основные ограничения

Предметом исследования является интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения следующего вида [10]

$$(1)\qquad \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \omega\cdot\nabla_r + \mu(r,\alpha)\right) I(r,\omega,\alpha,t) = \\ = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} \sigma(r,\omega\cdot\omega',\alpha) I(r,\omega',g(\omega\cdot\omega',\alpha),t)d\omega'.$$

Уравнение (1) описывает распространение радиации в выпуклой ограниченной области $G\subset\mathbb{R}^3$, где функция $I(r,\omega,\alpha,t)$ интерпретируется как плотность потока гамма-квантов с энергией $\alpha\in[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]$ в момент времени $t\in[0,\infty)$ в точке $r\in G$, перемещающихся в направлении $\omega\in\Omega=\{\omega\in\mathbb{R}^3 : |\omega|=1\}$ со скоростью c. Функция g определяется соотношением Комптона [3] и выражает связь между энергией фотона до рассеяния $\alpha'=g(\omega\cdot\omega',\alpha)$ и энергией после рассеяния α:

$$g(\omega\cdot\omega',\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha(\omega\cdot\omega'-1)}.$$

Для удобства энергия α выражена в безразмерных единицах и связана с энергией фотона E соотношением $\alpha = E/E_0$, где E_0 – энергия покоя электрона [3]. Вектор ω' принадлежит подмножеству единичной сферы

$$\Omega_{\omega,\alpha} = \{\omega'\in\Omega : \alpha\le g(\omega\cdot\omega',\alpha)\le\overline{\alpha}\},$$

где $\overline{\alpha}$ — максимальная энергия источников излучения. Неравенства, определяющие множество $\Omega_{\omega,\alpha}$ непосредственно вытекают из соотношения Комптона, связывающего энергии фотона до и после рассеяния с косинусом угла рассеяния, и выражают тот факт, что энергия фотона в результате рассеяния может только уменьшиться.

Коэффициенты μ и σ в уравнении (1) называются коэффициентом полного взаимодействия и дифференциальным сечением рассеяния, соответственно. Функция $\sigma(r, \omega \cdot \omega', \alpha)$ выражается через плотность электронов в среде и сечение рассеяние Кляйна – Нишины [3]

$$\sigma_{KN}(\alpha, \alpha') = \frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\alpha'}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\alpha}\right)\left(2 + \frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

при энергии $\alpha' = g(\omega \cdot \omega', \alpha)$, где $\alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$, $\underline{\alpha} > 0$, $\overline{\alpha} < \infty$.

Как правило, процесс переноса излучения происходит в неоднородной среде, поэтому коэффициенты уравнения (1) представляют собой кусочно-непрерывные функции в области G. Для характеристики неоднородности среды введем в рассмотрение некоторое подмножество $G_0 \subset G$ плотное в G и состоящее из конечного объединения попарно-непересекающихся областей $G_1, G_2, ..., G_p$. Предполагается, что границы областей G_i являются гладкими поверхностями класса $C^1(\partial G_i)$ и множество G_0 удовлетворяет условию обобщенной выпуклости [15, 16]. Условие обобщенной выпуклости накладывает ограничение на строение множества G_0, заключающиеся в том, что любая прямая, имеющая общую точку с G_0, пересекает ∂G_0 в конечном числе точек.

Будем предполагать, что функции $\mu \geq \text{const} > 0$ и $\sigma \geq 0$ принадлежат пространствам $C_b(G_0 \times [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}])$ и $C_b(G_0 \times [-1, 1] \times [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}])$, соответственно, где через $C_b(Y)$ обозначено банахово пространство непрерывных и ограниченных на некотором множестве Y функций с нормой $\|f\|_{C_b(Y)} = \sup\limits_{y \in Y} |f(y)|$.

Введем еще ряд обозначений: $X = G \times \Omega \times [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$; $X_0 = G_0 \times \Omega \times [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$; $\Gamma^{\pm} = \partial G \times \Omega_{\pm}(r) \times [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$; $\Omega_{\pm} = \{\omega \in \Omega : \text{sgn}(n(r) \cdot \omega) = \pm 1\}$, где $n(r)$ единичный вектор внешней нормали в точке $r \in \partial G$.

В работе рассматривается начально-краевая задача для уравнения (1) с начальными и граничными условиями следующего вида:

$$I|_{t=0} = I_0 \quad \text{на} \quad X, \tag{2}$$

$$I = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma^{-} \times [0, +\infty). \tag{3}$$

Функция $I_0(r, \omega, \alpha) \geq 0$ в соотношении (2) описывает состояние процесса в начальный момент времени $t = 0$. Однородное условие (3) интерпретируется как отсутствие излучения, поступающего извне в область G.

3. Функциональные пространства. Постановка задачи

Обозначим через $L_{r,\omega}$ луч исходящий из точки r в направлении ω, то есть $L_{r,\omega} = \{z \in \mathbb{R}^3 : z = r + t\omega,\, t > 0\}$. Согласно условию обобщенной выпуклости луч пересекает множество ∂G_0 в конечном числе точек $\{r + t_i\omega, i = 1, ..., q(r, \omega)\}$. Пусть $d(r, \omega)$ — расстояние от точки $r \in G$ до границы области G в направлении ω, тогда из определения множеств G_0 и G получаем $d(r, \omega) = t_{q(r,\omega)}$. Из выпуклости области G вытекает, что $d \in C_b(G_0 \times \Omega)$ [16].

Рассмотрим оператор $\mathcal{L} : D \to C_b(X_0)$, определенный выражением

$$\mathcal{L}f = \omega \cdot \nabla_r f(r, \omega, \alpha) + \mu(r, \alpha) f(r, \omega, \alpha),$$

где первое слагаемое в определении оператора $\mathcal{L}$ понимается как производная в точке r по направлению ω:

$$\omega \cdot \nabla_r f(r,\omega,\alpha) = \left.\frac{df(r+\tau\omega,\omega,\alpha)}{d\tau}\right|_{\tau=0}.$$

Множество D является областью определения оператора $\mathcal{L}$ и состоит из функций f, удовлетворяющих условиям:

1. для всех $(r,\omega,\alpha) \in X_0$ функция $f(r+t\omega,\omega,\alpha)$ абсолютно непрерывная по t на отрезке $[-d(r,-\omega), d(r,\omega)]$;
2. для всех $(r,\omega,\alpha) \in X_0$ справедливо условие $f(r-d(r,-\omega)\omega,\omega,\alpha) = 0$;
3. функция $\mathcal{L}f$ принадлежит пространству $C_b(X_0)$.

Оператор $\mathcal{L}$ имеет ограниченный обратный

$$\mathcal{L}^{-1}F = \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp\left(-\int\limits_0^{\tau} \mu(r-\omega\tau',\alpha)d\tau'\right) F(r-\tau\omega,\omega,\alpha)d\tau, \tag{4}$$

действующий из $C_b(X_0)$ в D, причем

$$\|\mathcal{L}^{-1}F\|_{C_b(X_0)} \leq (1-\exp(-\overline{\mu}d)) \left\|\frac{F}{\mu}\right\|_{C_b(X_0)}, \tag{5}$$

где $\overline{\mu} = \|\mu\|_{C_b(G_0\times[\underline{\alpha},\overline{\alpha}])}$ и d – диаметр области G. Достаточно трудоемкое и нетривиальное доказательство непрерывности функции $f = \mathcal{L}^{-1}F$ на множестве X_0 при $\mu \in C_b(G_0 \times [\underline{\alpha},\overline{\alpha}]), F \in C_b(X_0)$ можно найти в [16]. Заметим, что из соотношений (4),(5) вытекает вложение $D \subset C_b(X_0)$.

Так как функции σ и g, как функции переменных $(r,\omega,\omega',\alpha)$ непрерывны и ограничены на множестве $G_0 \times \Omega \times \Omega_{\alpha,\omega}, \times[\underline{\alpha},\overline{\alpha}])$, то оператор столкновений

$$\mathcal{S}f = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} k(r,\omega\cdot\omega',\alpha) f(r,\omega',g(\omega\cdot\omega',\alpha))d\omega',$$

переводит пространство $C_b(X_0)$ в себя. Этот факт является следствием теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Учитывая свойства линейных операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{S}$, определим оператор

$$\mathcal{A} = -c(\mathcal{L}-\mathcal{S}),$$

действующий в банаховом пространстве $C_b(X)$, с областью определения D.

Решением начально-краевой задачи (1),(2),(3) будем называть вектор-функцию $I(t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

значения $I(t)$ при всех $t \in [0,+\infty)$ принадлежат D;

в каждой точке t существует сильная производная функции $I(t)$, принадлежащая пространству $C([0,+\infty); C_b(X_0))$;

справедливы соотношения

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \mathcal{A}I(t), \tag{6}$$

и

$$I(0) = I_0, \tag{7}$$

где $I_0 \in D$. Таким образом, изучение начально-краевой задачи (1),(2),(3) сведено к исследование корректности абстрактной задачи Коши в банаховом пространстве.

4. Предварительные сведения

Для доказательства корректности задачи (6), (7) достаточно показать, что найдется такое число β, что резольвента $\mathcal{R}_\lambda = (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}$ оператора $\mathcal{A}$ существует для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > \beta$, и ее норма ограничена числом $1/(\operatorname{Re}\lambda - \beta)$. В этом случае теорема Хилле-Иосиды [13, 14] гарантирует существование единственной сильно непрерывной полугруппы $\mathcal{U}(t)$ разрешающих операторов ($I(t) = \mathcal{U}(t)I_0$), причем норма однопараметрического семейства операторов $\mathcal{U}(t)$ не превосходит величины $M\exp(\beta t)$, $M \geq 1$. Такой подход наиболее прост в реализации и был использован нами при доказательстве корректности начально-краевых задач для уравнения переноса с обобщенными условиями сопряжения на границах раздела сред [17–20].

Для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ введем в рассмотрение семейство операторов

$$\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L} + \frac{\lambda}{c}\mathcal{I},$$

где $\mathcal{I}$ единичный оператор. Оператор $\mathcal{L}_\lambda$, также как и оператор $\mathcal{L}$, при

$$\operatorname{Re}\lambda > \lambda_-, \qquad \text{где} \quad \lambda_- = -c \inf_{(r,\alpha)\in G_0\times[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]} \mu(r,\alpha), \tag{8}$$

имеет ограниченный обратный

$$\mathcal{L}_\lambda^{-1}F = \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp\left(-\int\limits_0^\tau \mu(r-\omega\tau',\alpha)d\tau' - \frac{\lambda}{c}\tau\right) F(r-\tau\omega,\omega,\alpha)d\tau, \tag{9}$$

причем

$$\|\mathcal{L}_\lambda^{-1}F\|_{C_b(X_0)} \leq \frac{c(1-\exp(-(\operatorname{Re}\lambda-\lambda_-)d/c))}{\operatorname{Re}\lambda-\lambda_-}\|F\|_{C_b(X_0)} \leq \frac{c}{\operatorname{Re}\lambda-\lambda_-}\|F\|_{C_b(X_0)}. \tag{10}$$

Везде далее, если не оговорено противное, предполагается справедливость неравенства (8). Если на линейном функциональном множестве D определить норму

$$\|f\|_D = \|\mathcal{L}_\lambda f\|_{C_b(X_0)}, \tag{11}$$

тогда из соотношения (10) непосредственно вытекает неравенство

$$\|f\|_{C_b(X_0)} \leq \frac{c}{\operatorname{Re}\lambda-\lambda_-}\|f\|_D. \tag{12}$$

Из (12) следует, что сходимость последовательности функций в пространстве D влечет за собой сходимость в пространстве $C_b(X_0)$. Так как пространство $C_b(X_0)$ банахово, то нетрудно показать, что и D с нормой (11) также образует банахово пространство (см., например, [15, 16]).

Учитывая определение оператора $\mathcal{L}_\lambda$, для резольвенты оператора $\mathcal{A}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\lambda = (\lambda\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1} = (\lambda\mathcal{I}+c(\mathcal{L}-\mathcal{S}))^{-1} = (\mathcal{L}+\frac{\lambda}{c}\mathcal{I}-\mathcal{S})^{-1}c^{-1} = \\ = (\mathcal{L}_\lambda-\mathcal{S})^{-1}c^{-1} = (\mathcal{I}-\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^{-1}\mathcal{L}_\lambda^{-1}c^{-1}.\end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, для доказательства существования и ограниченности резольвенты оператора $\mathcal{A}$ достаточно показать существование ограниченного оператора $(\mathcal{I}-\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^{-1}$. В следующем разделе мы покажем, что оператор $(\mathcal{I}-\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})$, также как и оператор $\mathcal{L}_\lambda$ имеет ограниченный обратный при выполнении условия (8).

5. Основное утверждение

Прежде, чем перейти к доказательству основного утверждения, докажем две вспомогательные леммы. В первом утверждении устанавливаются некоторые свойства операторов $(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^n$, а во втором получена вспомогательная оценка для резольвенты оператора $\mathcal{A}$.

Лемма 1. *Для всех* $(r, \omega, \alpha) \in X_0$ *справедливо неравенство*

$$|(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^n f(r,\omega,\alpha)| \le \frac{1}{n!}\left(\frac{c\,\|\sigma\|_{C_b(X_0)}}{2(\operatorname{Re}\lambda - \lambda_-)}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)\right)^n \|f\|_{C_b(X_0)}, \tag{14}$$

Доказательство. Предварительно для любых $n \ge 0$ и $\alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$ покажем справедливость вспомогательного неравенства

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} \left(\frac{1}{g(\omega\cdot\omega',\alpha)} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^n d\omega' \le \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^{n+1}. \tag{15}$$

Если при интегрировании на единичной сфере Ω использовать параметризацию

$$\omega = \omega(\nu,\gamma) = (\cos\gamma\sqrt{1-\nu^2}, \sin\gamma\sqrt{1-\nu^2}, \nu),$$

где $\nu = \omega\cdot\omega' \in [-1,1], \gamma \in [0,2\pi)$, $d\omega = d\nu d\gamma$, то, учитывая следующие выражения для функции $g(\nu,\alpha)$ и ее производной

$$g(\nu,\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha(\nu-1)}, \quad \frac{\partial g}{\partial \nu} = -\frac{\alpha^2}{(1+\alpha(\nu-1))^2} = -g^2, \tag{16}$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} \left(\frac{1}{g(\omega\cdot\omega',\alpha)} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^n d\omega' &= \\ = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} \chi_{[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]}(g(\nu,\alpha))\left(\frac{1}{g(\nu,\alpha)} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^n d\nu d\gamma &= \\ = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \chi_{[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]}(g(\nu,\alpha))\left(\frac{1}{g(\nu,\alpha)} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^n d\nu = -\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha^*}^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^n \frac{d\alpha'}{\alpha'^2} &\le \\ \le -\frac{1}{2}\int\limits_{\overline{\alpha}}^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^n \frac{d\alpha'}{\alpha'^2} = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^{n+1}&. \end{aligned} \tag{17}$$

При построении цепочки неравенств (17) использовались следующие обозначения $\alpha^* = \min\{\overline{\alpha}, g(-1,\alpha)\}$, где $g(-1,\alpha) = \dfrac{\alpha}{1-2\alpha}$.

Теперь приступим непосредственно к оценке выражения $|(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^n f|$ на множестве X_0 при любых $n \geq 1$. При всех $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_-$ из (17) всюду на X_0 получаем

(18)
$$\left|\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S}f(r,\omega,\alpha)\right| = \left| \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp\left(-\int\limits_0^{\tau} \mu(r-\tau'\omega,\alpha)d\tau' - \frac{(\operatorname{Re}\lambda + i\operatorname{Im}\lambda)\tau}{c}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} \sigma(r-\tau\omega,\omega\cdot\omega,\alpha)d\omega' d\tau \right| \|f\|_{C_b(X_0)} \leq$$
$$\leq \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp\left(-\frac{(\operatorname{Re}\lambda - \lambda_-)\tau}{c}\right) \frac{\|\sigma\|_{C_b(X_0)}}{4\pi} \int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} d\omega' d\tau \|f\|_{C_b(X_0)} \leq$$
$$\leq C\left(\frac{1}{\underline{\alpha}} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right) \|f\|_{C_b(X_0)},$$

где через C обозначено

$$C(\lambda) = \frac{c\|\sigma\|_{C_b(X_0)}}{2(\operatorname{Re}\lambda - \lambda_-)}. \tag{19}$$

Имея в наличии оценку (18), при любом n находим

$$\left|(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^n f\right| \leq C\left|(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^{n-1}\left(\frac{1}{\underline{\alpha}} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)\right| \|f\|_{C_b(X_0)} \leq \tag{20}$$
$$\leq \frac{C^2}{2!}\left|(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^{n-2}\left(\frac{1}{\underline{\alpha}} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^2\right| \|f\|_{C_b(X_0)} \leq \dots. \leq \frac{C^n}{n!}\left(\frac{1}{\underline{\alpha}} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^n \|f\|_{C_b(X_0)},$$

где C определена в (19). Сравнивая полученный в (20) результат с тем, что требовалось доказать, заключаем справедливость утверждения леммы. □

Лемма 2. *Резольвента оператора $\mathcal{A}$ существует при $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_-$ и удовлетворяет соотношению*

$$\|\mathcal{R}_\lambda\| \leq \frac{\exp\left(\Lambda/(\operatorname{Re}\lambda - \lambda_-)\right)}{\operatorname{Re}\lambda - \lambda_-}, \tag{21}$$

где

$$\Lambda = \frac{c\,\|\sigma\|_{C_b(X_0)}}{2}\left(\frac{1}{\underline{\alpha}} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right). \tag{22}$$

Доказательство. Из утверждения леммы 1 вытекает, что при любом n оператор $(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^n$ ограничен из $C_b(X_0)$ в $C_b(X_0)$, причем

$$\|(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^n\| \leq \frac{\Lambda^n}{n!(\operatorname{Re}\lambda - \lambda_-)^n}. \tag{23}$$

где Λ определена в (22). Учитывая неравенство (23) для нормы резольвенты оператора $\mathcal{A}$ получаем

$$\|\mathcal{R}_\lambda\| = \|((\mathcal{I} - \mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S})^{-1}\mathcal{L}_\lambda^{-1}c^{-1}\| \leq \|\mathcal{L}_\lambda^{-1}c^{-1}\| \sum_{n=0}^{\infty} \|(\mathcal{L}_\lambda^{-1}\mathcal{S}\|^n \leq \tag{24}$$

$$\leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda - \lambda_-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^n}{n!(\operatorname{Re}\lambda - \lambda_-)^n} = \frac{\exp\left(\Lambda/(\operatorname{Re}\lambda - \lambda_-)\right)}{\operatorname{Re}\lambda - \lambda_-}.$$

Утверждение леммы доказано. □

Теорема 1. *Задача Коши (6),(7) однозначно разрешима и при выполнении условия*

$$\lambda_- + \Lambda < 0 \tag{25}$$

ее решение стабилизируется к нулю при $t \to \infty$.

Доказательство. Подберем константу β так, чтобы для любого $\operatorname{Re}\lambda > \beta$ выполнялось неравенство

$$\frac{\exp\left(\Lambda/(\operatorname{Re}\lambda - \lambda_-)\right)}{\operatorname{Re}\lambda - \lambda_-} \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda - \beta}. \tag{26}$$

Из справедливости (26) вытекает

$$\beta \geq \lambda_- + (\operatorname{Re}\lambda - \lambda_-)(1 - \exp\left(\Lambda/(\operatorname{Re}\lambda - \lambda_-)\right)). \tag{27}$$

Так как для всех $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_-$

$$1 - \exp\left(\Lambda/(\operatorname{Re}\lambda - \lambda_-)\right) \leq \Lambda/(\operatorname{Re}\lambda - \lambda_-), \tag{28}$$

то неравенство (26) будет верно для всех λ, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}\lambda > \beta = \lambda_- + \Lambda$.

Из (26) и леммы 2 вытекает, что норма резольвенты производящего оператора $\mathcal{A}$ не превосходит $\dfrac{1}{\operatorname{Re}\lambda - \beta}$. Применяя теорему Хилле-Иосиды [13, 14] заключаем, что существует единственная сильно непрерывна полугруппа $\mathcal{U}(t)$ разрешающих операторов задачи Коши (6),(7)

$$I(t) = \mathcal{U}(t)I_0 = \lim_{\epsilon \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta - i\epsilon}^{\Delta + i\epsilon} e^{-\lambda t}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} I_0 d\lambda, \quad \Delta > \beta, \tag{29}$$

причем $\|\mathcal{U}(t)\| \leq M\exp(\beta t)$, где $\beta = \lambda_- + \Lambda$. Отсюда в частности вытекает стабилизация к нулю решения задачи Коши к нулю при $\beta = \lambda_- + \Lambda < 0$.

□

Согласно Лемме 2 спектр оператора $\mathcal{A}$ содержится в комплексной полуплоскости, все элементы которой, имеют отрицательную вещественную часть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = \operatorname{Re}\lambda + i\operatorname{Im}\lambda$, $\operatorname{Re}\lambda \leq \lambda_- < 0$. Не смотря на отмеченный факт, теорема гарантирует устойчивость полугруппы $\mathcal{U}(t)$ только при выполнении условия $\lambda_- + \Lambda < 0$. Такая ситуация не редкость в теории сильно непрерывных полугрупп с неограниченными производящими операторами [13, 14].

Тем не менее в достаточно узком интересующем нас диапазоне энергий $\alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$ всегда можно добиться малости величины Λ, определяемой соотношением (22), так, чтобы обеспечить выполнение условия (25), гарантирующего устойчивость полугруппы разрешающих операторов задачи Коши.

References

[1] G.V. Fetisov, *X-ray diffraction methods for structural diagnostics of materials: progress and achievements*, Phys. Usp., **63** 2020, 2–32.

[2] V. Suleimanov, J. Poutanen, K. Werner, *X-ray bursting neutron star atmosphere models using an exact relativistic kinetic equation for Compton scattering*, Astronomy & Astrophysics, **545** (2012), Article ID A120.

[3] D.I. Nagirner, J. Poutanen, *Single Compton scattering*, Astrophysics and Space Physics Reviews, **9**, Harwood Academic Publishers, Amsterdam, 1994.

[4] I.P. Yarovenko, it The method for solving tomography problem based on the specifics of the Compton scattering, Vychisl. Tekhnol., **17**:6 (2012), 99–109. Zbl 1420.92062

[5] I.G. Kazantsev, U.L. Olsen, H.F. Poulsen, P.C. Hansen, *A spectral geometric model for Compton single scatter in PET based on the single scatter simulation approximation*, Inverse Probl., **34**:2 (2018), Article ID 024002. Zbl 1400.78012

[6] James Webber, Eric L Miller, *Compton scattering tomography in translational geometries*, Inverse Probl., **36**:2 (2020), Article ID 025007. Zbl 07161823

[7] Yang Zhang, *Recovery of singularities for the weighted cone transform appearing in Compton camera imaging*, Inverse Probl., **36**:2 (2020), Article ID 025014. Zbl 1442.44003

[8] D.S. Anikonov, D.S. Konovalova, *The Kinetic Transport Equation in the case of Compton scattering*, Sib. Math. J., **43**:5 (2002), 795–807. Zbl 1052.82026

[9] D.S. Anikonov, D.S. Konovalova, *Compton effect in transport theory*, Dokl. Akad. Nauk, Ross. Akad. Nauk, **398**:4 (2004), 462–465. Zbl 1083.78004

[10] D.S. Anikonov, D.S. Konovalova, *The boundary-value problem for the transport equation with purely Compton scattering*, Sib. Math. J., **46**:1 (2005), 1–12. Zbl 1094.35034

[11] I.P. Yarovenko, *On the solvability of the boundary value problem for the radiation transfer equation with the Compton scattering effect*, Dal'nevost. Mat. Zh., **14**:1 (2014), 109–121. Zbl 1335.35245

[12] I.P. Yarovenko, *Unique solvability of boundary value problem for a polychromatic radiation transfer equation*, Dal'nevost. Mat. Zh., **19**:1 (2019), 96–107. Zbl 1434.35212

[13] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied mathematics science, **44**, Springer-Verlag, New-York etc., 1983. Zbl 0516.47023

[14] Ph. Clément, H.J.A.M. Heijmans, S. Angenent, C.J. van Duijn, B. de Pagter, *One-parameter semigroups*, CWI Monographs, **5**, North-Holland, Amsterdam etc., 1987. Zbl 0636.47051

[15] V.S. Vladimirov, *Mathematical problems of the uniform-speed theory of transport*, Trudy Mat. Inst. Steklov., **61**, AN SSSR, Moscow, 1961. MR0156658

[16] D.S. Anikonov, A.E. Kovtanyuk, I.V. Prokhorov, *Transport equation and tomography*, VSP, Utrecht-Boston, 2002. Zbl 1042.45009

[17] I.V. Prokhorov, *Solvability of the initial-boundary value problem for an integro-differential equation*, Sib. Math. J., **53**:2 (2012), 301–309. Zbl 1254.45011

[18] I.V. Prokhorov, A.A. Sushchenko, *On the well-possessedness of the Cauchy problem for the equation of radiative transfer with Fresnel matching conditions*, Sib. Math. J., **56**:4 (2015), 736–745. Zbl 1332.45010

[19] I.V. Prokhorov, A.A. Sushchenko, A. Kim, *Initial boundary value problem for the radiative transfer equation with diffusion matching conditions*, J. Appl. Ind. Math., **11**:1 (2017), 115–124. Zbl 1374.45015

[20] I.V. Prokhorov, *The Cauchy problem for the radiation transfer equation with Fresnel and Lambert matching conditions*, Math. Notes, **105**:1 (2019), 80–90. Zbl 1421.35364

Igor Vasilievich Prokhorov
Institute of Applied Mathematics FEB RAS,
7, Radio str.,
Vladivostok, 690041, Russia
Far Eastern Federal University,
8, Sukhanova str. ,
Vladivostok, 690950, Russia
Email address: prokhorov@iam.dvo.ru

Ivan Petrovich Yarovenko
Institute of Applied Mathematics FEB RAS,
7, Radio str.,
Vladivostok, 690041, Russia
Email address: yarovenko@iam.dvo.ru