S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 2204–2215 (2020) УДК 517.929.4
DOI 10.33048/semi.2020.17.146 MSC 34K20

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т. ЫСКАК

Abstract. In the paper we consider a system of nonlinear differential equations with distributed delay and periodic coefficients in linear terms. Sufficient conditions for exponential stability of the zero solution are established, estimates that characterize the rate of decay of solutions at infinity are obtained, and attraction sets of the zero solution are indicated. Similar results are obtained in the case of small perturbations in linear terms.

Keywords: exponential stability; Lyapunov - Krasovskii functional; nonlinear equation; distributed delay; periodic coefficients; perturbations in linear terms.

1. Введение

В настоящее время существует большое число работ, посвященных изучению дифференциальных уравнений с запаздыванием (см., например, [1-11]).

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием следующего вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds + F(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds), \qquad (1.1)$$

Yskak, T., Estimates for solutions of one class to systems of nonlinear differential equations with distributed delay.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 18-29-10086, № 19-31-90149.

Поступила 24 августа 20 г., опубликована 25 декабря 2020 г.

где $A(t)$ – матрица размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,s)$ – матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной, т.е.

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T,s) \equiv B(t,s),$$

$F(t,u_1,u_2)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по (u_1,u_2) и следующей оценке

$$\|F(t,u_1,u_2)\| \le q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2}, \tag{1.2}$$

где

$$q_1,\, q_2 \ge 0, \quad \omega_1,\, \omega_2 > 0 \, - \, const.$$

Цель работы заключается в получении достаточных условий экспоненциальной устойчивости нулевого решения, получении оценок на множество притяжения и оценок решений системы, которые характеризуют скорость убывания при $t \to \infty$.

Во втором параграфе исследована устойчивость нулевого решения системы (1.1), в третьем параграфе исследована устойчивость нулевого решения в случае наличия возмущений в линейной части системы (1.1).

Уравнения с сосредоточенным запаздыванием исследовались в [12-22], в частности, в работах [12, 13, 15, 17, 18, 20-22] исследован нелинейный случай. В работе [23] исследован линейный случай системы (1.1).

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н. Демиденко Г.В., к.ф.-м.н. Матвеевой И.И., к.ф.-м.н. Скворцовой М.А. за внимание и ценные советы.

2. Устойчивость нулевого решения исходной системы

Рассмотрим начальную задачу для (1.1) при $t > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t,t-s)y(s)ds + F\Big(t, y(t), \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\Big), \\ y(s) = \varphi(s),\, s \in [-\tau, 0], \quad \varphi \in C[-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0). \end{cases} \tag{2.1}$$

При исследовании устойчивости нулевого решения будет использоваться следующая модификация функционала Ляпунова – Красовского [12, 13, 23]

$$v(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \langle M(t-s)y(s), y(s)\rangle ds d\eta$$

$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds, \tag{2.2}$$

где $H(t)$, $M(s)$, $K(s)$ – эрмитовы гладкие положительно определенные матрицы, на которые более подробные условия будут изложены в следующей теореме.

Введем обозначения: $h_{min}(t)$ – минимальное собственное значение матрицы $H(t)$, $c_{min}(t)$ – минимальное собственное значение матрицы

$$C(t) = H^{-1/2}(t) \left(\tau C_{11}(t) - \int\limits_{t-\tau}^{t} C_{12}(t,t-s) C_{22}^{-1}(t-s) C_{12}^*(t,t-s) ds \right) H^{-1/2}(t),$$

где

$$C_{11}(t) = -\frac{1}{\tau} \left(\frac{d}{dt} H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + K(0) \right) - M(0),$$
$$C_{12}(t,t-s) = -H(t)B(t,t-s), \quad C_{22}(t-s) = M(t-s).$$

Сформулируем теорему, которая является аналогом теорем из [12, 13, 15].

Теорема 1. *Пусть существуют T-периодическая матрица $H(t) \in C^1(\mathbb{R})$ такая, что*

$$H(t) = H^*(t) > 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

и матрицы $M(s) = M^*(s)$, $K(s) = K^*(s) \in C^1[0,\tau]$ такие, что

$$M(s) > 0, \quad K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds} M(s) < 0, \quad \frac{d}{ds} K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Выберем $æ_1$, $æ_2 > 0$ так, что

$$æ_1 M(s) + \frac{d}{ds} M(s) \le 0, \quad æ_2 K(s) + \frac{d}{ds} K(s) \le 0,$$

пусть также будет выполнено неравенство

$$\gamma = \int\limits_0^T \min\{c_{min}(s), æ_1, æ_2/2\} ds > 0. \tag{2.3}$$

Выберем число $\alpha > 0$ так, что

$$\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2} \int\limits_0^T \frac{\|H(s)\|}{h_{min}(s)} ds < \gamma, \tag{2.4}$$

тогда для решения (2.1) с начальными данными из

$$\overline{E} = \Bigg\{ \varphi \in C[-\tau, 0] : v(0,\varphi) < r^{-2/\omega_1},$$

$$\int\limits_{-\tau}^{0} \left(\frac{æ_2 \theta}{2} \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s) \rangle - \frac{q_2 \tau^{\omega_2} \|H(0)\|}{\alpha} \|\varphi(s)\|^{2+2\omega_2} \right) ds \ge 0,$$

$$\left(\max_{s\in[0,T]} \left(h_{min}^{-1}(s) \exp\left(-\int\limits_0^s \delta(\xi) d\xi \right) \right) \left[1 - r v^{\omega_1/2}(0,\varphi) \right]^{-2/\omega_1} v(0,\varphi) \right)^{\omega_2}$$
$$< \frac{\alpha æ_2 \|K^{-1}(\tau)\|^{-1}}{2 q_2 \tau^{\omega_2} \max\limits_{s\in[0,T]} \|H(s)\|} \Bigg\},$$

где $\theta \in (0,1)$, справедлива следующая оценка

$$\|y(t)\| \le \frac{1}{\sqrt{h_{min}(t)}} e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \delta(s) ds} \left[1 - r v^{\omega_1/2}(0,\varphi) \right]^{-1/\omega_1} v^{1/2}(0,\varphi), \tag{2.5}$$

где

$$r = q_1\omega_1 \int\limits_0^T \frac{\|H(s)\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}(s)} \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^s \delta(\eta)d\eta\right) ds$$

$$\times \left(1-\exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^T \delta(\eta)d\eta\right)\right)^{-1}, \tag{2.6}$$

$$\delta(t) = \min\{c_{min}(t) - \frac{\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2}\|H(t)\|}{h_{min}(t)}, æ_1, æ_2/2\}. \tag{2.7}$$

Замечание. *В силу (2.4) оценка (2.5) характеризует экспоненциальное убывание решений на бесконечности, поскольку $\delta(t)$ – T-периодическая функция и справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^T \delta(s)ds = \int\limits_0^T \min\{c_{min}(s) - \frac{\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2}\|H(s)\|}{h_{min}(s)}, æ_1, æ_2/2\}ds$$

$$\geq \int\limits_0^T \left(\min\{c_{min}(s), æ_1, æ_2/2\} - \frac{\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2}\|H(s)\|}{h_{min}(s)}\right) ds$$

$$= \int\limits_0^T \min\{c_{min}(s), æ_1, æ_2/2\}ds - \alpha q_2 \tau^{1+\omega_2} \int\limits_0^T \frac{\|H(s)\|}{h_{min}(s)} ds > 0.$$

Отсюда следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения (1.1).

Доказательство. Продифференцируем функционал Ляпунова – Красовского (2.2) вдоль решения (2.1)

$$\frac{d}{dt}v(t,y) = -\int\limits_{t-\tau}^t \left\langle G(t,t-s)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(s) \end{pmatrix}\right\rangle ds - \langle K(\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle$$

$$+2Re\left\langle H(t)y(t), F(t,y(t),\int\limits_{t-\tau}^t y(s)ds)\right\rangle + \int\limits_0^\tau \int\limits_{t-\eta}^t \left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s), y(s)\right\rangle dsd\eta$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^t \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds,$$

где

$$G(t,t-s) = \begin{pmatrix} C_{11}(t) & C_{12}(t,t-s) \\ C_{12}^*(t,t-s) & C_{22}(t-s) \end{pmatrix}.$$

Имеет место следующее представление

$$\int\limits_{t-\tau}^t \left\langle G(t,t-s)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(s) \end{pmatrix}\right\rangle ds$$

$$= \int\limits_{t-\tau}^t \left\langle\left(\begin{pmatrix} C_{12}(t,t-s)C_{22}^{-1}(t-s)C_{12}^*(t,t-s) & C_{12}(t,t-s) \\ C_{12}^*(t,t-s) & C_{22}(t-s) \end{pmatrix}\right.\right.$$

$$\times \begin{pmatrix} y(t) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(s) \end{pmatrix} \Bigg\rangle ds + \langle C(t)H^{1/2}(t)y(t), H^{1/2}(t)y(t)\rangle.$$

Учитывая то, что следующая квадратичная форма неотрицательно определенная

$$\left\langle \begin{pmatrix} C_{12}(t,t-s)C_{22}^{-1}(t-s)C_{12}^*(t,t-s) & C_{12}(t,t-s) \\ C_{12}^*(t,t-s) & C_{22}(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \langle C_{22}^{-1}(t-s)(C_{12}^*(t,t-s)u_1 + C_{22}(t-s)u_2), (C_{12}^*(t,t-s)u_1 + C_{22}(t-s)u_2)\rangle \geq 0,$$

и для эрмитовой матрицы $P = P^*$ справедливо неравенство

$$p_{min}\|u\|^2 \leq \langle Pu, u\rangle, \tag{2.8}$$

где p_{min} – минимальное собственное значение матрицы P, имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leq -c_{min}(t)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds$$

$$+2Re\left\langle H(t)y(t), F(t,y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds) \right\rangle + \int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s), y(s) \right\rangle dsd\eta.$$

В силу (1.2) и неравенства Гельдера получаем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leq -c_{min}(t)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds$$

$$+2\|H(t)\|\|y(t)\| \left(q_1\|y(t)\|^{1+\omega_1} + q_2\tau^{\omega_2}\int\limits_{t-\tau}^{t} \|y(s)\|^{1+\omega_2}ds \right)$$

$$+\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s), y(s) \right\rangle dsd\eta.$$

Используя неравенство $2ab \leq \alpha a^2 + b^2/\alpha$, $\alpha > 0$, имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leq -c_{min}(t)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds$$

$$+2q_1\|H(t)\|\|y(t)\|^{2+\omega_1} + q_2\tau^{\omega_2}\|H(t)\| \left(\alpha\tau\|y(t)\|^2 + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{t-\tau}^{t} \|y(s)\|^{2+2\omega_2}ds \right)$$

$$+\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s), y(s) \right\rangle dsd\eta.$$

Следовательно, в силу (2.8)

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leq -\left(c_{min}(t) - \frac{\alpha q_2\tau^{1+\omega_2}\|H(t)\|}{h_{min}(t)} \right) \langle H(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds+2q_1\|H(t)\|\|y(t)\|^{2+\omega_1}$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{1}{2}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle+\frac{q_2\tau^{\omega_2}\|H(t)\|}{\alpha}\|y(s)\|^{2+2\omega_2}\right)ds$$

$$+\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s),y(s)\right\rangle dsd\eta. \tag{2.9}$$

В силу второго неравенства в определении множества $\overline{E}$ и непрерывности решения (2.1) либо $\varphi(s)\equiv 0$, из чего следует, что решение (2.1) $y(t)\equiv 0$ и оценка (2.5) доказана, либо существует $t_0>0$ такое, что при всех $t\in(0,t_0)$

$$\int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{1}{2}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle+\frac{q_2\tau^{\omega_2}\|H(t)\|}{\alpha}\|y(s)\|^{2+2\omega_2}\right)ds<0. \tag{2.10}$$

Из (2.9) при $t\in(0,t_0)$ вытекает следующее неравенство

$$\frac{d}{dt}v(t,y)\le-\left(c_{min}(t)-\frac{\alpha q_2\tau^{1+\omega_2}\|H(t)\|}{h_{min}(t)}\right)\langle H(t)y(t),y(t)\rangle$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds+2q_1\|H(t)\|\|y(t)\|^{2+\omega_1}$$

$$+\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s),y(s)\right\rangle dsd\eta.$$

Используя (2.8), определение $\delta(t)$ из (2.7), функционал Ляпунова – Красовского (2.2), получим

$$\frac{d}{dt}v(t,y)\le-\delta(t)v(t,y)+\frac{2q_1\|H(t)\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}(t)}v^{1+\omega_1/2}(t,y).$$

Если $v(t_1,y)=0$ при некотором t_1, то $y(t)=0$ при $t\in(t_1-\tau,t_1]$. Поставив начальную задачу типа (2.1) с нулевыми начальными данными на интервале $(t_1-\tau,t_1]$, в силу существования и единственности решения начальной задачи получим, что $y(t)=0$ при всех $t>t_1$. Поэтому можно считать, что $v(t,y)>0$. Имеем

$$v^{-1-\omega_1/2}(t,y)\frac{d}{dt}v(t,y)\le-\delta(t)v^{-\omega_1/2}(t,y)+\frac{2q_1\|H(t)\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}(t)}.$$

Это эквивалентно

$$\frac{d}{dt}\left(v^{-\omega_1/2}(t,y)\exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^t\delta(s)ds\right)\right)\ge-\frac{q_1\omega_1\|H(t)\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}(t)}\exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^t\delta(s)ds\right).$$

Проинтегрировав от 0 до t, получим

$$v^{-\omega_1/2}(t,y)\exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^t\delta(s)ds\right)\ge v^{-\omega_1/2}(0,\varphi)$$

$$-q_1\omega_1 \int\limits_0^t \frac{\|H(s)\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}(s)} \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^s \delta(\eta)d\eta\right) ds.$$

Следовательно,

$$v^{-\omega_1/2}(t,y)\exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^t \delta(s)ds\right)$$

$$\geq v^{-\omega_1/2}(0,\varphi) - q_1\omega_1 \int\limits_0^\infty \frac{\|H(s)\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}(s)} \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^s \delta(\eta)d\eta\right) ds. \tag{2.11}$$

Последний интеграл сходится в силу того, что $\int\limits_0^T \delta(s)ds > 0$ и $H(t)$, $\delta(t)$ – T-периодические.

Нетрудно показать следующее равенство

$$\int\limits_0^\infty \frac{\|H(s)\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}(s)} \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^s \delta(\eta)d\eta\right) ds = \int\limits_0^T \frac{\|H(s)\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}(s)} \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^s \delta(\eta)d\eta\right) ds$$

$$\times\left(1-\exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^T \delta(s)ds\right)\right)^{-1} = \frac{r}{q_1\omega_1},$$

где r определено в (2.6). Из (2.11) имеем

$$v(t,y) \leq e^{-\int\limits_0^t \delta(s)ds}\left[v^{-\omega_1/2}(0,\varphi) - r\right]^{-2/\omega_1}.$$

При этом в силу определения $\overline{E}$ выражение в квадратных скобках положительно. В силу (2.8) и определения функционала Ляпунова – Красовского получаем оценку (2.5) при $t \in (0,t_0]$. Покажем, что эта оценка справедлива при всех $t > 0$. Для этого достаточно показать, что неравенство (2.10) выполнено при всех $t > 0$, тогда, повторяя рассуждения после (2.10), получим оценку (2.5). Докажем от противного. Мы знаем, что при $t \in (0,t_0)$ выполнено (2.10). Предположим, что t_1 – это первая точка, где интеграл из левой части (2.10) равен 0, а при $t < t_1$ выполнено (2.10):

$$\int\limits_{t_1-\tau}^{t_1} \left(\frac{1}{2}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)|_{t=t_1} y(s), y(s)\right\rangle + \frac{q_2\tau^{\omega_2}\|H(t_1)\|}{\alpha}\|y(s)\|^{2+2\omega_2}\right) ds = 0.$$

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям после (2.10), мы получим, что оценка (2.5) справедлива при $t \leq t_1$. Из третьего неравенства в определении $\overline{E}$ и оценки (2.5) при $t \in (0,t_1]$ имеем

$$\|y(t)\|^{2\omega_2} < \frac{\alpha æ_2 \|K^{-1}(\tau)\|^{-1}}{2q_2\tau^{\omega_2}\max\limits_{s\in[0,T]}\|H(s)\|},$$

следовательно, либо $y(t) = 0$ при всех $t \in [t_1-\tau, t_1]$, тогда в силу существования и единственности решения начальной задачи получим, что $y(t) = 0$ при $t > t_1$

и оценка (2.5) выполнена, либо на ненулевой мере отрезка $[t_1 - \tau, t_1]$ будет выполнено строгое неравенство

$$\frac{q_2 \tau^{\omega_2} \max\limits_{s\in[0,T]} \|H(s)\|}{\alpha} \|y(t)\|^{2+2\omega_2} < \frac{æ_2 \|K^{-1}(\tau)\|^{-1}}{2} \|y(t)\|^2.$$

Откуда в силу (2.8) и определения матрицы $K(s)$ получим

$$\int\limits_{t_1-\tau}^{t_1} \frac{q_2 \tau^{\omega_2} \max\limits_{s\in[0,T]} \|H(s)\|}{\alpha} \|y(\eta)\|^{2+2\omega_2} d\eta < \int\limits_{t_1-\tau}^{t_1} \frac{æ_2}{2} \langle K(t_1-\eta) y(\eta), y(\eta)\rangle d\eta$$

$$\leq - \int\limits_{t_1-\tau}^{t_1} \frac{1}{2} \left\langle \frac{d}{dt} K(t-\eta)|_{t=t_1} y(\eta), y(\eta) \right\rangle d\eta.$$

Противоречие. Следовательно, (2.10) выполнено при всех $t > 0$. Повторяя рассуждения после (2.10), получаем, что оценка (2.5) выполнена при всех $t > 0$.

$\square$

3. Устойчивость нулевого решения возмущенной системы

Теперь рассмотрим возмущенную систему (1.1)

$$\frac{d}{dt} y(t) = \overline{A}(t) y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} \overline{B}(t, t-s) y(s) ds + F(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s) ds),$$

где

$$\overline{A}(t) = A(t) + A_1(t), \quad A(t+T) \equiv A(t),$$

$$\overline{B}(t,s) = B(t,s) + B_1(t,s), \quad B(t+T,s) \equiv B(t,s),$$

$A_1(t)$, $B_1(t,s)$ – матрицы размера $n \times n$ с непрерывными элементами. Выпишем начальную задачу для возмущенной системы

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y(t) = \overline{A}(t) y(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} \overline{B}(t, t-s) y(s) ds + F(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s) ds), \\ y(s) = \varphi(s),\ s \in [-\tau, 0],\ \varphi \in C[-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0). \end{cases} \tag{3.1}$$

Теорема 2. *Пусть существуют T-периодическая матрица $H(t) \in C^1(\mathbb{R})$ такая, что*

$$H(t) = H^*(t) > 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

и матрицы $M(s) = M^*(s)$, $K(s) = K^*(s) \in C^1[0,\tau]$ такие, что

$$M(s) > 0, \quad K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds} M(s) < 0, \quad \frac{d}{ds} K(s) < 0, \quad s \in [0, \tau].$$

Выберем $æ_1$, $æ_2 > 0$ так, что

$$æ_1 M(s) + \frac{d}{ds} M(s) \leq 0, \quad æ_2 K(s) + \frac{d}{ds} K(s) \leq 0,$$

пусть также выполнено (2.3) и для некоторого фиксированного числа $\beta \in (0,1)$ *и любого* $l \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство*

$$\int\limits_{(l-1)T}^{lT} \left(\frac{\|H(s)\|^2}{h_{min}(s)} \int\limits_{s-\tau}^{s} \|M^{-1}(s-\eta)\| \left(2\|B(s,s-\eta)\|\|B_1(s,s-\eta)\| \right.\right.$$

$$\left.\left. + \|B_1(s,s-\eta)\|^2\right) d\eta + 2\frac{\|H(s)\|}{h_{min}(s)}\|A_1(s)\| \right) ds \leq (1-\beta)\gamma$$

$$= (1-\beta)\int\limits_0^T \min\{c_{min}(s), æ_1, æ_2/2\} ds. \tag{3.2}$$

Выберем число $\alpha > 0$ *так, что*

$$\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2} \int\limits_0^T \frac{\|H(s)\|}{h_{min}(s)} ds < \beta\gamma,$$

тогда для решения (3.1) с начальными данными из

$$\overline{E}_1 = \Bigg\{ \varphi \in C[-\tau, 0] : v(0,\varphi) < r_1^{-2/\omega_1},$$

$$\int\limits_{-\tau}^{0} \left(\frac{æ_2\theta}{2} \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle - \frac{q_2\tau^{\omega_2}\|H(0)\|}{\alpha} \|\varphi(s)\|^{2+2\omega_2} \right) ds > 0,$$

$$\left(\max_{s\in[0,T]} \left(h_{min}^{-1}(s) \exp\left(-\int\limits_0^s \delta_1(s)ds \right) \right) \left[1 - r_1 v^{\omega_1/2}(0,\varphi)\right]^{-2/\omega_1} v(0,\varphi) \right)^{\omega_2}$$

$$< \frac{\alpha æ_2 \|K^{-1}(\tau)\|^{-1}}{2q_2\tau^{\omega_2} e^{(1-\beta)\gamma_{max}\omega_2} \max\limits_{s\in[0,T]} \|H(s)\|} \Bigg\},$$

где $\theta \in (0,1)$, *справедлива следующая оценка*

$$\|y(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{h_{min}(t)}} e^{\frac{(1-\beta)\gamma_{max}}{2}} e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \delta_1(s)ds} \left[1 - r_1 v^{\omega_1/2}(0,\varphi)\right]^{-1/\omega_1} v^{1/2}(0,\varphi), \tag{3.3}$$

где

$$r_1 = q_1\omega_1 e^{\frac{(1-\beta)\gamma_{max}\omega_1}{2}} \int\limits_0^T \frac{\|H(s)\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}(s)} \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^s \delta_1(\eta)d\eta \right) ds$$

$$\times \left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^T \delta_1(\eta)d\eta \right) \right)^{-1},$$

$$\delta_1(t) = \min\{\beta c_{min}(t) - \frac{\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2}\|H(t)\|}{h_{min}(t)}, \beta æ_1, \beta æ_2/2\},$$

$$\gamma_{max} = \max_{\xi \in [0,T]} \int_{\xi}^{T} \min\{c_{min}(s), æ_1, æ_2/2\} ds. \tag{3.4}$$

Доказательство. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в теореме 1, получим аналог (2.11)

$$v^{-\omega_1/2}(t,y) \exp\left(-\frac{\omega_1}{2} \int_0^t \overline{\delta}(s) ds\right)$$

$$\geq v^{-\omega_1/2}(0,\varphi) - q_1 \omega_1 \int_0^{\infty} \frac{\|H(s)\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}(s)} \exp\left(-\frac{\omega_1}{2} \int_0^s \overline{\delta}(\eta) d\eta\right) ds, \tag{3.5}$$

где

$$\overline{\delta}(t) = \min\{\overline{c}_{min}(t) - \frac{\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2} \|H(t)\|}{h_{min}(t)}, æ_1, æ_2/2\},$$

$\overline{c}_{min}(t)$ – минимальное собственное значение матрицы

$$\overline{C}(t) = H^{-1/2}(t) \left(\tau \overline{C}_{11}(t) - \int_{t-\tau}^{t} \overline{C}_{12}(t,t-s) C_{22}^{-1}(t-s) \overline{C}_{12}^{*}(t,t-s) ds\right) H^{-1/2}(t),$$

где

$$\overline{C}_{11}(t) = -\frac{1}{\tau}\left(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)\overline{A}(t) + \overline{A}^{*}(t)H(t) + K(0)\right) - M(0),$$

$$\overline{C}_{12}(t,t-s) = -H(t)\overline{B}(t,t-s), \quad C_{22}(t-s) = M(t-s).$$

В силу определения $c_{min}(t)$ и $\overline{c}_{min}(t)$ имеем

$$|\overline{c}_{min(t)} - c_{min}(t)| \leq \|\overline{C}(t) - C(t)\| \leq \left(2\frac{\|H(t)\|}{h_{min}(t)} \|A_1(t)\| + \frac{\|H(t)\|^2}{h_{min}(t)}\right.$$

$$\left.\times \int_{t-\tau}^{t} \|M^{-1}(t-\eta)\| \left(2\|B(t,t-\eta)\| \|B_1(t,t-\eta)\| + \|B_1(t,t-\eta)\|^2\right) d\eta\right). \tag{3.6}$$

Введем обозначение

$$æ = \min\{æ_1, æ_2/2\}. \tag{3.7}$$

Из определения $\overline{\delta}(t)$ получим

$$\overline{\delta}(t) = \min\{\overline{c}_{min}(t) - \frac{\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2} \|H(t)\|}{h_{min}(t)}, æ\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overline{c}_{min}(t) - \frac{\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2} \|H(t)\|}{h_{min}(t)} + æ - |\overline{c}_{min}(t) - \frac{\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2} \|H(t)\|}{h_{min}(t)} - æ|\right).$$

Используя неравенство треугольника, имеем

$$\overline{\delta}(t) \geq \frac{1}{2}\left(c_{min}(t) - \frac{\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2} \|H(t)\|}{h_{min}(t)} + æ - |c_{min}(t) - \frac{\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2} \|H(t)\|}{h_{min}(t)} - æ|\right)$$

$$-|\overline{c}_{min}(t) - c_{min}(t)|$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\beta c_{min}(t) - \frac{\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2} \|H(t)\|}{h_{min}(t)} + \beta æ - |\beta c_{min}(t) - \frac{\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2} \|H(t)\|}{h_{min}(t)} - \beta æ|\right)$$

$$+\frac{1}{2}(1-\beta)\left(c_{min}(t) + æ - |c_{min}(t) - æ|\right) - |\overline{c}_{min}(t) - c_{min}(t)|.$$

В силу определения $\delta_1(t)$, (3.7) получим

$$\overline{\delta}(t) \geq \delta_1(t) + (1-\beta)\min\{c_{min}(t), æ_1, æ_2/2\} - |\overline{c}_{min}(t) - c_{min}(t)|.$$

Пусть $t \in [(i-1)T, iT)$, тогда имеем

$$\int_0^t \overline{\delta}(s)ds \geq \int_0^t \delta_1(s)ds + (1-\beta)\int_0^t \min\{c_{min}(s), æ_1, æ_2/2\}ds - \int_0^t |\overline{c}_{min}(s) - c_{min}(s)|ds$$

$$= \int_0^t \delta_1(s)ds + \sum_{j=1}^{i-1}\left((1-\beta)\gamma - \int_{(j-1)T}^{jT} |\overline{c}_{min}(s) - c_{min}(s)|ds\right)$$

$$+(1-\beta)\int_{(i-1)T}^{t} \min\{c_{min}(s), æ_1, æ_2/2\}ds - \int_{(i-1)T}^{t} |\overline{c}_{min}(s) - c_{min}(s)|ds.$$

Отсюда в силу (3.2) и (3.6) следует неравенство

$$\int_0^t \overline{\delta}(s)ds \geq \int_0^t \delta_1(s)ds - (1-\beta)\int_t^{iT} \min\{c_{min}(s), æ_1, æ_2/2\}ds.$$

Учитывая определения γ_{max} из (3.4) и T-периодичность $c_{min}(s)$, имеем

$$\int_0^t \overline{\delta}(s)ds \geq \int_0^t \delta_1(s)ds - (1-\beta)\gamma_{max},$$

следовательно, из (3.5) получим

$$v^{-\omega_1/2}(t,y)\exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int_0^t \delta_1(s)ds + \frac{(1-\beta)\gamma_{max}\omega_1}{2}\right)$$

$$\geq v^{-\omega_1/2}(0,\varphi) - q_1\omega_1\int_0^\infty \frac{\|H(s)\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}(s)}\exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int_0^s \delta_1(\eta)d\eta + \frac{(1-\beta)\gamma_{max}\omega_1}{2}\right)ds.$$

Повторяя рассуждения, аналогичные рассуждениям в теореме 1 после (2.11), мы получим оценку (3.3).

□

References

[1] A.D. Myshkis, *Linear differential equations with retarded argument*, Nauka, Moscow, 1972. (1951 Zbl 0043.30904)

[2] N.N. Krasovskii, *Stability of motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay*, Stanford University Press, Stanford, 1963. Zbl 0109.06001

[3] L.E. El'sgol'ts, S.B. Norkin, *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, Academic Press, New York, 1973. Zbl 0287.34073

[4] J. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1977. Zbl 0352.34001

[5] D.G. Korenevskiĭ, *Stability of dynamical systems under random perturbations of parameters. Algebraic criteria*, Naukova Dumka, Kiev, 1989. Zbl 0769.93081

[6] N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina, *Introduction to the theory of linear functional differential equations*, Advanced Series in Mathematical Science and Engineering, **3**, World Federation Publ. Comp., Atlanta, GA, 1995. Zbl 0867.34051

[7] Yu.F. Dolgiĭ, *Stability of Periodic Differential-Difference Equations*, Izd. Ural. Gos. Univ., Ekaterinburg, 1996.

[8] V.B. Kolmanovskiĭ, A.D. Myshkis, *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*, Mathematics and its Applications, **463**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999. Zbl 0917.34001

[9] K. Gu, V.L. Kharitonov, J. Chen, *Stability of time-delay systems*, Birkhauser, Boston, 2003. Zbl 1039.34067

[10] R.P. Agarwal, L. Berezansky, E. Braverman, A. Domoshnitsky, *Nonoscillation theory of functional differential equations with applications*, Springer, Berlin, 2012. Zbl 1253.34002

[11] M.I. Gil', *Stability of neutral functional differential equations*, Atlantis Studies in Differential Equations, **3**, Atlantis Press, Amsterdam, 2014. Zbl 1315.34002

[12] G.V. Demidenko, I.I. Matveeva, *Asymptotic properties of solutions to delay differential equations*, Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform., **5**:3 (2005), 20–28. Zbl 1249.34211

[13] G.V. Demidenko, I.I. Matveeva, *Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms*, Siberian Math. J., **48**:5 (2007), 824–836. Zbl 1164.34529

[14] G.V. Demidenko, *Stability of solutions to linear differential equations of neutral type*, J. Anal. Appl., **7**:3 (2009), 119–130. Zbl 1201.34116

[15] I.I. Matveeva, *Estimates of solutions to a class of systems of nonlinear delay differential equations*, J. Appl. Industr. Math., **7**:4 (2013), 557–566. Zbl 1340.34270

[16] G.V. Demidenko, I.I. Matveeva, *On estimates of solutions to systems of differential equations of neutral type with periodic coefficients*, Sib. Math. J., **55**:5 (2014), 866–881. Zbl 1315.34077

[17] G.V. Demidenko, I.I. Matveeva, *Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., **2015**:83 (2015), 1–22. Zbl 1349.34296

[18] G.V. Demidenko, I.I. Matveeva, *Exponential stability of solutions to nonlinear time-delay systems of neutral type*, Electron. J. Diff. Equ., **2016**:19 (2016), 1–20. Zbl 1329.34116

[19] I.I. Matveeva, *On exponential stability of solutions to periodic neutral-type systems*, Sib. Math. J., **58**:2 (2017), 264–270. Zbl 1376.34062

[20] G.V. Demidenko, I.I. Matveeva, M.A. Skvortsova, *Estimates for solutions to neutral differential equations with periodic coefficients of linear terms*, Sib. Math. J., **60**:5 (2019), 828–841. Zbl 1440.34075

[21] I.I. Matveeva, *Exponential stability of solutions to nonlinear time-varying delay systems of neutral type equations with periodic coefficients*, Electron. J. Diff. Equ., **2020**:20 (2020), 1–12. Zbl 1440.34076

[22] I.I. Matveeva, *Estimates for exponential decay of solutions to one class of nonlinear systems of neutral type with periodic coefficients*, Comput. Math. Math. Phys., **60**:4 (2020), 601–609. Zbl 07264878

[23] T. Yskak, *Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay*, Funct. Differential Equations, **25**:1–2 (2018), 97–108. MR3805049

Yskak Timur
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Novosibirsk State University
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: istima92@mail.ru