S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 637–646 (2020) УДК 519.172.2, 519.174
DOI 10.33048/semi.2020.17.042 MSC 05C10, 05C15, 05C70

РАСКРАСКИ ВЕРШИН МУЛЬТИГРАФОВ С ЗАПРЕТАМИ НА РЕБРАХ

А. Н. ГЛЕБОВ, И. А. ПАВЛОВ, К. А. ХАДАЕВ

Abstract. We define and study a new class of vertex colourings of multigraphs, where some pairs of colours are forbidden on the edges of a multigraph. We say that a multigraph G is (properly) (m, r)-colourable if for any given sets of r forbidden pairs of colours on the edges of G where exists a (proper) vertex m-colouring of G that respects all forbidden pairs. We determine all (properly) (m, r)-colourable stars, all $(2, r)$-colourable multigraphs for each $r \geq 1$ and all (m, r)-colourable multighraphs, where r is large enough (close to m^2). We also introduce a list version of (m, r)-colourability and establish (for the case of improper colourings) that the list (m, r)-colourability of a multigraph is equivalent to its (m, r)-colourability.

Keywords: graph, multigraph, edge, colouring, list colouring, forbiddance.

1. Введение

В данной статье рассматривается специальный класс раскрасок вершин мультиграфов, при которых на каждом ребре мультиграфа задаётся один или несколько запретов, то есть пар цветов, которые объявляются запрещенными при окрашивании концов этого ребра. Несмотря на то, что тематика изучения таких ракскрасок являтся новой, она естественным образом продолжает исследования предписанных раскрасок вершин и рёбер графов, начатые в 1970-х годах. В некотором смысле указанный вид раскрасок можно считать "гибридным" по отношению к предписанным раскраскам вершин и рёбер графов.

Glebov, A.N., Pavlov, I.A., Khadaev, K.A., Vertex colourings of multigraphs with forbiddances on edges.

Работа поддержана РФФИ (проекты 18-01-00353 и 18-01-00747).

Поступила 3 ноября 2018 г., опубликована 24 апреля 2020 г.

Понятие предписанной раскраски графа впервые было введено в 1976 г. Визингом [6] и определялось как раскраска вершин графа с заданными предписаниями (наборами допустимых цветов) в каждой вершине графа. В 1979 г. Эрдеш, Рубин и Тэйлор опубликовали известную работу [1], посвященную свойствам предписанных расркасок графов и оценкам предписанного хроматического числа. В 1994 г. Томассеном [5] была доказана теорема о предписанной 5-раскрашиваемости планарных графов.

Наряду с предписанными раскрасками вершин, Диницем, Галвином [3], Каном [4] и другими авторами были определены и изучены предписанные раскраски ребер графов и мультиграфов. Наибольший интерес представляет гипотеза (первоначально высказанная в 1979 г. Диницем в отношении полных двудольных графов) о совпадении обычного и предписанного хроматического индексов графа и подтверждение этой гипотезы Галвином [3] для класса двудольных графов.

В 2008 г. Федером, Хеллом и Хуангом была опубликована первая и единственная на данный момент работа [2], где исследовались раскраски, при которых красятся вершины графа, однако предписания (запреты) задаются не в его вершинах, а на ребрах. Основным результатом статьи [2] является доказательство аналогов теоремы Брукса для таких раскрасок.

В данной работе мы подойдем к раскраскам указанного вида совсем с другой точки зрения. Будем стремиться для каждого заданного числа цветов m и заданного числа запретов r описать класс всех таких мультиграфов, вершины которых можно раскрасить в m цветов таким образом, чтобы удовлетворить всем запретам, при любом способе выбора r запретов на каждом ребре (класс (m,r)-раскрашиваемых мультиграфов). При этом мы будем отдельно рассматривать случаи произвольной (ограниченной только запретами), правильной и предписанной раскраски вершин мультиграфа.

В разделе 2 статьи приводятся основные определения и обозначения. В разделе 3 вводится понятие предписанной (m,r)-раскраски и доказывается, что в общем случае (без условия правильности) предписанная (m,r)-раскрашиваемость мультиграфа эквивалентна его (m,r)-раскрашиваемости. Раздел 4 посвящён изучению простейших свойств раскрасок с запретами на рёбрах и описанию классов (m,r)-раскрашиваемых мультиграфов при больших (порядка m^2) значениях r. В разделе 5 описаны все классы $(2,r)$-раскрашиваемых мультиграфов при различных значениях r.

Раскраска вершин графа с запретами на ребрах естественным образом возникает в следующей прикладной задаче. Пусть вершины графа — это работы некоторого проекта, а цвета вершин — это машины (или работники), выполняющие данные работы. Ребро между вершинами a и b означает связанность соответствующих работ, то есть что машины, выполняющие работы a и b, в процессе их выполнения должны взаимодействовать. Тогда запрет (x,y) на ребре ab означает, что машина x, выполняя работу a, в силу технологических ограничений, не может взаимодействовать с машиной y, выполняющей работу b. В таком случае существование правильной раскраски с запретами на ребрах означает, что можно распределить машины по работам таким образом, чтобы удовлетворить всем технологическим ограничениям.

2. Основные определения и обозначения

В работе рассматриваются конечные неориентированные мультиграфы без петель. Через $G=(V,E)$ обозначается мультиграф с множеством вершин V и множеством рёбер E. Используются обозначения P_n, C_n и K_n для простой цепи, простого цикла и полного графа на n вершинах, соответственно. Через $K_{s,t}$ обозначается полный двудольный граф с долями размера s и t. *Звездой* с d лучами назыается граф $K_{1,d}$. Через nE обозначается мультиграф, состоящий из двух вершин и n параллельных рёбер.

Операцией подразбиения ребра xy в мультиграфе называется замена этого ребра на цепь xzy, гле z — новая вершина степени 2. Мультиграф H назвыается *подразбиением* мультиграфа G, если H получается из G последовательностью подразбиений рёбер. *Тета-графом* называется произвольное подразбиение мультиграфа $3E$, то есть мультиграф, состоящий из трёх цепей с заданной парой концевых вершин, не имеющих общих внутренних вершин.

Мультиграф называется *d-вырожденным*, если каждый его подграф содержит вершину степени не больше d. Таким образом, d-вырожденный мультиграф можно получить из одновершинного графа, последовательно добавляя вершины степени не больше d. *Ядром* связного мультиграфа G будем называть его максимальный по включению вершин и рёбер подграф степени не меньше 2, то есть подграф, полученный из G последовательным удалением всех висячих вершин. Ядро дерева будем считать пустым.

Раскраской вершин мультиграфа $G = (V, E)$ называется произвольное отображение $c : V \to C$, где C — множество цветов. Если $|C| = m$, то будем говорить, что задана *раскраска вершин в m цветов* или *m-раскраска.* В последнем случае по умолчанию будем считать, что $C = \{1, 2, \dots, m\}$. Раскраска c называется *правильной*, если $c(x) \neq c(y)$ для каждого ребра $e = xy \in E$. Мультиграф G называется *m-раскрашиваемым*, если существует правильная раскраска его вершин в m цветов. Через $\chi(G)$ обозначается *хроматическое число* мультиграфа G, то есть наименьшее натуральное m, для которого G является m-раскрашиваемым.

Говорят, что на множестве вершин мультиграфа G задано *предписание* L размера m, если для каждой вершины $v \in V$ задан список допустимых цветов $L(v) \subseteq C$ мощности m. Раскраска (правильная раскраска) вершин $c : V \to C$ называется *L-раскраской* (*правильной L-раскраской*), если $c(v) \in L(v)$ для каждой вершины $v \in V$. Мультиграф G называется *предписанно m-раскрашиваемым*, если для любого предписания L размера m, заданного на его вершинах, существует правильная L-раскраска вершин G. Через $\chi_\ell(G)$ обозначается *предписанное хроматическое число* мультиграфа G, то есть наименьшее натуральное m, для которого G является предписанно m-раскрашиваемым.

Запретом на ребре $e = xy$ мультиграфа G назовём произвольное отображение $f : \{x, y\} \to C$. Если порядок записи вершин xy для ребра e зафикисирован, то запрет f будем записывать в виде упорядоченной пары цветов $(f(x), f(y))$. Назовём запрет f *правильным*, если $f(x) \neq f(y)$, и *тождественным*, если $f(x) = f(y)$. Будем говорить, что раскраска $c : V \to C$ *согласована с запретом* f, если $(c(x), c(y)) \neq (f(x), f(y))$. Ясно, что правильная раскраска (по определению) согласована со всеми тождественными запретами. Будем говорить, что на множестве рёбер мультиграфа G задана *система запретов* (*правильная система запретов*) R размера r, если для каждого ребра $e \in E$ определён набор $R(e)$, состоящий из r запретов (r правильных запретов) для ребра e. Раскраску $c : V \to C$ назовём *согласованной с системой запретов* R, если она согласована со всеми запретами из этой системы (всего $r|E|$ запретов). Мультиграф G назовём *(правильно) (m, r)-раскрашиваемым*, если для любой (правильной) системы запретов R размера r, заданной на множестве его рёбер, существует (правильная) m-раскраска вершин $c : V \to \{1, 2, \dots, m\}$, согласованная с R. Через $F(m, r)$ и $F^{pr}(m, r)$ обозначим классы всех связных (m, r)-раскрашиваемых и правильно (m, r)-раскрашиваемых мультиграфов, соответственно. Из данных опеределений следует, что для любых m, r выполняются включения $F(m+1, r) \supseteq F(m, r) \supseteq F(m, r+1)$ и $F^{pr}(m+1, r) \supseteq F^{pr}(m, r) \supseteq F^{pr}(m, r+1)$.

Заметим, что всякую правильную m-раскраску, согласованную с правильной системой запретов R размера r, можно рассматривать как обычную m-раскраску, согласованную с системой запретов R' размера $r + m$, где для каждого ребра $e \in E$ набор запретов $R'(e)$ получается из $R(e)$ добавлением всех тождественных запретов

(i,i), $i = 1,2,\ldots,m$. Отсюда следует, что для любых m,r выполняется вложение $F(m,r+m) \subseteq F^{pr}(m,r)$.

3. Предписанная (m,r)-раскрашиваемость

Понятия (m,r)-раскрашиваемости и правильной (m,r)-раскрашиваемости естественным образом обобщаются на случай предписанных раскрасок. Назовём мультиграф G *предписанно (правильно) (m,r)-раскрашиваемым*, если для любого предписания L размера m на множестве его вершин и для любой (правильной) системы запретов R размера r на множестве его рёбер, существует (правильная) L-раскраска вершин G, согласованная с R. Через $F_\ell(m,r)$ и $F_\ell^{pr}(m,r)$ обозначим классы всех связных предписанно (m,r)-раскрашиваемых и предписанно правильно (m,r)-раскрашиваемых мультиграфов, соответственно. Из данных определений следует, что для любых m,r выполняются включения $F_\ell(m,r) \subseteq F(m,r)$, $F_\ell^{pr}(m,r) \subseteq F^{pr}(m,r)$, $F_\ell(m+1,r) \supseteq F_\ell(m,r) \supseteq F_\ell(m,r+1)$ и $F_\ell^{pr}(m+1,r) \supseteq F_\ell^{pr}(m,r) \supseteq F_\ell^{pr}(m,r+1)$.

Следующая лемма показывает, что в общем случае (без условия правильности) предписанная (m,r)-раскрашиваемость мультиграфа эквивалентна его (m,r)-раскрашиваемости.

Лемма 1. *Мультиграф G является предписанно (m,r)-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда G является (m,r)-раскрашиваемым. Таким образом, при любых m,r классы $F_\ell(m,r)$ и $F(m,r)$ совпадают.*

Доказательство. Поскольку из предписанной (m,r)-раскрашиваемости следует (m,r)-раскрашиваемость, достаточно доказать, что произвольный (m,r)-раскрашиваемый мультиграф $G=(V,E)$ является предписанно (m,r)-раскрашиваемым. Пусть на множестве вершин G задано произвольное предписание L размера m, а на множестве рёбер G — произвольная система запретов R размера r. Без ограничения общности, можно считать, что для любого ребра $e = xy \in E$ и любого запрета $(\alpha,\beta) \in R(e)$ выполняются включения $\alpha \in L(x)$ и $\beta \in L(y)$ (в противном случае запрет (α,β) не налагает никаких ограничений на выбор цветов в вершинах x,y, и может быть заменен на любой запрет, удовлетворяющий указанным выше включениям).

Зададим для каждой вершины $v \in V$ произвольную биекцию $\pi_v : L(v) \to \{1,2,\ldots,m\}$, а для каждого ребра $e = xy \in E$ определим набор запретов $R'(e)$ размера r, заменяя в наборе $R(e)$ каждый запрет (α,β) на запрет $(\pi_x(\alpha),\pi_y(\beta))$. Из (m,r)-раскрашиваемости мультиграфа G следует, что существует (m,r)-раскраска $c' : V \to \{1,2,\ldots,m\}$ его вершин, согласованная с системой запретов R'. Определим раскраску c вершин G, полагая $c(v) = \pi_v^{-1}(c'(v))$ для каждой $v \in V$. Легко видеть, что c является L-раскраской вершин мультиграфа G, согласованной с системой запретов R. Таким образом, мультиграф G является предписанно (m,r)-раскрашиваемым. □

Учитывая лемму 1, далее мы будем рассматривать классы предписанно (m,r)-раскрашиваемых мультиграфов только в случае правильной (m,r)-раскраски.

4. Простейшие свойства (m,r)-раскрашиваемых мультиграфов

В этом разделе мы опишем некоторые простые случаи, когда мультиграф является (предписанно) (правильно) (m,r)-раскрашиваемым.

Лемма 2. *Пусть $m \geq 1$, $n \geq 1$, $r \geq 0$ — целые числа. Мультиграф nE является (m,r)-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда $nr < m^2$. Мультиграф nE является (предписанно) правильно (m,r)-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда $nr < m(m-1)$.*

Доказательство. Заметим, что при выборе пары цветов для вершин мультиграфа nE имеется всего m^2 вариантов в случае произвольной m-раскраски, и не менее

$m(m-1)$ вариантов в случае правильной m-раскраски. Поэтому если выполняется первое (второе) неравенство из леммы, то для любой системы из nr (правильных) запретов на ребрах мультиграфа, существует (правильная) раскраска. Если выполнено противоположное неравенство, то уже в случае непредписанной раскраски удается запретить все пары цветов, распределяя запреты между рёбрами произвольным образом (используя тот факт, что для непредписанной правильной раскраски имеется в точности $m(m-1)$ возможных пар цветов). □

Далее окажется полезным следующее простое понятие. Пусть $e = xy$ — ребро мультиграфа G, $\alpha \in C$ — некоторый цвет. Набор запретов $R(e)$ назовём *α-исключающим для вершины* x, если $R(e)$ содержит подмножество запретов $R_{\alpha,x} = \{(\alpha, i) \mid i = 1, 2, \ldots, m\}$ или подмножество правильных запретов $R^{pr}_{\alpha,x} = \{(\alpha, i) \mid i = 1, \ldots, \alpha-1, \alpha+1, \ldots, m\}$, если речь идёт о правильных раскрасках. В случае предписанных раскрасок понятие α-исключающего набора для x определяется аналогично, но $R_{\alpha,x} = \{(\alpha, i) \mid i \in L(y)\}$ и $R^{pr}_{\alpha,x} = \{(\alpha, i) \mid i \in L(y) \setminus \{\alpha\}\}$. Ясно, что если набор запретов $R(e)$ является α-исключающим для вершины x, то x не может быть окрашена в цвет α ни при какой (правильной) раскраске, согласованной с $R(e)$ (иначе не найдётся допустимого цвета для вершины y). Используя это элементарное соображение, легко доказывается

Лемма 3. *Звезда $K_{1,d}$ является (m, r)-раскрашиваемым графом (при $m \geq 1$, $r \geq 0$) если и только если $m > d \left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor$. Звезда $K_{1,d}$ является (предписанно) правильно (m, r)-раскрашиваемой (при $m \geq 2$, $r \geq 0$), если и только если $m > d \left\lfloor \frac{r}{m-1} \right\rfloor$.*

Доказательство. Пусть z — центральная вершина звезды. В случае произвольной m-раскраски для каждого ребра e существует не более $\left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor$ таких цветов α, что набор запретов $R(e)$ является α-исключающим для z. В случае правильной m раскраски существует не более $\left\lfloor \frac{r}{m-1} \right\rfloor$ таких цветов. Поэтому если первое (второе) неравенство из леммы выполняется, то для вершины z найдётся цвет, не исключенный ни на одном из инцидентных рёбер. Окрашивая z в этот цвет, мы сможем выбрать допустимые цвета и для всех висячих вершин звезды.

Если первое (второе) неравенство из леммы не выполняется, то уже в случае непредписанной раскраски можно задать запреты на ребрах таким образом, чтобы каждое ребро исключало в точности $\left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor$ цветов (соответственно, $\left\lfloor \frac{r}{m-1} \right\rfloor$ цветов) для z, и наборы исключённых цветов для разных рёбер не пересекались. В этом случае все цвета для вершины z являются исключенными. □

Замечание 1. *Необходимость выполнения неравенств из леммы 3 остаётся в силе для раскраски мультизвезды, то есть мультиграфа, состоящего из центральной вершины и d инцидентных ей рёбер (среди которых могут быть параллельные). Действительно, доказательство необходимости в лемме 3 никак не использует тот факт, что все концевые вершины звезды попарно различны.*

Следствие 1. *При $r \geq m \geq 1$ максимальная степень любого (m, r)-раскрашиваемого мультиграфа строго меньше $\frac{m}{\left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor}$. При $r \geq m-1 \geq 1$ максимальная степень любого (предписанно) правильно (m, r)-раскрашиваемого мультиграфа строго меньше $\frac{m}{\left\lfloor \frac{r}{m-1} \right\rfloor}$.*

Доказательство. Утверждение следует из леммы 3, замечания 1 и того факта, что в (предписанно) (правильно) (m, r)-раскрашиваемом мультиграфе мультизвезда с центром в вершине максимальной степени является (предписанно) (правильно) (m, r)-раскрашиваемой. □

Следующие две леммы показывают, что при фиксированном значении m и достаточно больших значениях r классы (m, r)-раскрашиваемых мультиграфов состоят из конечного числа мультиграфов ограниченного раземера.

Лемма 4. *Пусть $m \geq 1$, $r \geq 0$ — целые числа.*
(1) Если $r \geq m^2$, то $F(m, r) = \{P_1\}$;
(2) Если $m\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil \leq r < m^2$, то $F(m, r) = \{P_1, P_2\}$;
(3) Если $\left\lceil\frac{m^2}{2}\right\rceil \leq r < m\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$, то $F(m, r) = \{P_1, P_2, P_3\}$;
(4) Если $r < \left\lceil\frac{m^2}{2}\right\rceil$, то $F(m, r) \supseteq \{P_1, P_2, P_3, 2E\}$.

Доказательство. Поскольку любой связный мультиграф, отличный от P_1, содержит подграф $P_2 \simeq 1E$, из леммы 2 следует утверждение (1) и включение $F(m, r) \supseteq \{P_1, P_2\}$ в утверждении (2). Так как при $r \geq m\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$ выполняются неравенства $2r \geq m^2$ и $2\left\lfloor\frac{r}{m}\right\rfloor \geq 2\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil \geq m$, то из лемм 2 и 3 следует, что мультиграфы $2E$ и $K_{1,2}$ не принадлежат $F(m, r)$. Учитывая, что любой связный мультиграф, отличный от P_1 и P_2, содержит один из подграфов $2E$ или $K_{1,2}$, отсюда следует утверждение (2).

Так как $P_2 \simeq 1E$, $P_3 \simeq K_{1,2}$ и при $r < m\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$ выполняются неравенства $r < m^2$ и $2\left\lfloor\frac{r}{m}\right\rfloor < m$ (второе неравенство следует из того, что $\lfloor x\rfloor < \frac{m}{2}$ при $x < \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$), то из лемм 2 и 3 следует, что в условиях пункта (3) выполняется включение $F(m, r) \supseteq \{P_1, P_2, P_3\}$. Заметим, что любой связный мультиграф, не принадлежащий множеству $\{P_1, P_2, P_3\}$, содержит один из подграфов $2E$, $K_{1,3}$ или P_4. Поэтому для завершения доказательства утверждения (3) достаточно убедиться, что при $r \geq \left\lceil\frac{m^2}{2}\right\rceil$ ни один из указанных мультиграфов не принадлежит $F(m, r)$. Для $2E$ это следует из леммы 2 и неравенства $2r \geq m^2$. Для графа $K_{1,3}$, согласно лемме 3, необходимо убедиться в справедливости неравенства $3\left\lfloor\frac{r}{m}\right\rfloor \geq m$. Ввиду неравенства $r \geq \left\lceil\frac{m^2}{2}\right\rceil$ при чётном m получаем $3\left\lfloor\frac{r}{m}\right\rfloor \geq \frac{3m}{2} \geq m$, а при нечётном m имеем $r \geq \frac{m^2+1}{2}$, откуда $3\left\lfloor\frac{r}{m}\right\rfloor \geq 3\left\lfloor\frac{m}{2} + \frac{1}{2m}\right\rfloor$. Заметим, что при $m \geq 3$ правая часть последнего неравенства не меньше $3\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor = \frac{3(m-1)}{2} \geq m$, а при $m = 1$ получаем $3\left\lfloor\frac{m}{2} + \frac{1}{2m}\right\rfloor = 3 > m$.

Докажем, что при $r \geq \left\lceil\frac{m^2}{2}\right\rceil$ цепь P_4 не принадлежит классу $F(m, r)$. Пусть $P = abcd$ — данная цепь. Зададим на каждом из рёбер ab и dc произвольный набор из r запретов, содержащий множество пар цветов $T = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq m;\ 1 \leq j \leq \left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\}$. Это можно сделать, так как $|T| = m\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor \leq \left\lceil\frac{m^2}{2}\right\rceil \leq r$. Из определения множества T следует, что ни одна из вершин b, c не может быть окрашена ни в один из цветов $1, 2, \ldots, \left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor$. Зададим на ребре bc набор запретов, содержащий множество пар цветов $Z = \{(i, j) \mid \left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor + 1 \leq i \leq m;\ \left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor + 1 \leq j \leq m\}$. Тем самым мы исключим все остальные возможные комбинации цветов на вершинах b и c. Это можно сделать, так как $|Z| = \left(m - \left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\right)^2 = \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil^2 \leq \left\lceil\frac{m^2}{2}\right\rceil$. Последнее неравенство является очевидным при чётном m и следует из цепочки неравенств $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil^2 = \frac{(m+1)^2}{4} \leq \frac{m^2+1}{2} = \left\lceil\frac{m^2}{2}\right\rceil$ при нечётном m.

Остаётся доказать утверждение (4). Достаточно проверить, что $2E \in F(m, r)$ при $r < \left\lceil\frac{m^2}{2}\right\rceil$. Это следует из леммы 2. $\square$

Лемма 5. *Пусть $m \geq 2$, $r \geq 0$ — целые числа.*
(1) Если $r \geq m(m-1)$, то $F^{pr}(m, r) = F^{pr}_\ell(m, r) = \{P_1\}$;
(2) Если $(m-1)\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil \leq r < m(m-1)$, то $F^{pr}(m, r) = F^{pr}_\ell(m, r) = \{P_1, P_2\}$;
(3) Если $\frac{m(m-1)}{2} \leq r < (m-1)\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$, то $F^{pr}(m, r) = F^{pr}_\ell(m, r) = \{P_1, P_2, P_3\}$;
(4) Если $r < \frac{m(m-1)}{2}$, то $F^{pr}_\ell(m, r) \supseteq \{P_1, P_2, P_3, 2E\}$.

Доказательство. Поскольку любой связный мультиграф, отличный от P_1, содержит подграф $P_2 \simeq 1E$, из леммы 2 следует утверждение (1) и включение $F_\ell^{pr}(m,r) \supseteq \{P_1, P_2\}$ в утверждении (2). Так как при $r \geq (m-1)\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ выполняются неравенства $2r \geq m(m-1)$ и $2\left\lfloor \frac{r}{m-1} \right\rfloor \geq 2\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \geq m$, то из лемм 2 и 3 следует, что мультиграфы $2E$ и $K_{1,2}$ не принадлежат $F^{pr}(m,r)$, что влечет утверждение (2).

Так как $P_2 \simeq 1E$, $P_3 \simeq K_{1,2}$ и при $r < (m-1)\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ выполняются неравенства $r < m(m-1)$ и $2\left\lfloor \frac{r}{m-1} \right\rfloor < m$ (они доказываются аналогично соответствующим неравенствам из доказательства леммы 4), то из лемм 2 и 3 следует, что в условиях пункта (3) выполняется включение $F_\ell^{pr}(m,r) \supseteq \{P_1, P_2, P_3\}$. Аналогично доказательству леммы 4, для завершения доказательства утверждения (3) достаточно убедиться, что при $r \geq \frac{m(m-1)}{2}$ ни один из мультиграфов $2E$, $K_{1,3}$ и P_4 не принадлежит $F^{pr}(m,r)$. Для $2E$ это следует из леммы 2 и неравенства $2r \geq m(m-1)$. Для графа $K_{1,3}$ это следует из леммы 3 и неравенства $3\left\lfloor \frac{r}{m-1} \right\rfloor \geq 3\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \geq m$, которое выполняется при $m \geq 2$.

Докажем, что при $r \geq \frac{m(m-1)}{2}$ цепь P_4 не принадлежит классу $F^{pr}(m,r)$. Пусть $P = abcd$ — данная цепь. Зададим на каждом из рёбер ab и dc произвольный набор из r правильных запретов, содержащий множество пар цветов $T' = \{(i,j) \mid 1 \leq i \leq m;\ 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor;\ i \neq j\}$. Это можно сделать, так как $|T'| = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor (m-1) \leq \frac{m(m-1)}{2} \leq r$. Из определения множества T' и правильности раскраски следует, что ни одна из вершин b, c не может быть окрашена ни в один из цветов $1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$. Зададим на ребре bc набор из правильных запретов, содержащий множество пар цветов $Z' = \{(i,j) \mid \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq m;\ \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1 \leq j \leq m;\ i \neq j\}$. Тем самым мы исключим все остальные возможные комбинации цветов на вершинах b и c. Это можно сделать, так как $|Z'| = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \left(\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil - 1\right) \leq \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m-1}{2} = \frac{m^2-1}{4} \leq \frac{m(m-1)}{2} \leq r$.

Для доказательства утверждения (4) достаточно проверить, что $2E \in F_\ell^{pr}(m,r)$ при $r < \frac{m(m-1)}{2}$. Это следует из леммы 2. □

В завершение этого раздела докажем ещё один простой, но полезный факт, относящийся к случаю, когда число запретов на каждом ребре относительно невелико.

Лемма 6. *Пусть мультиграф H получается из мультиграфа G добавлением новой вершины степени не больше d. Тогда если $dr < m$ и $G \in F(m,r)$, то $H \in F(m,r)$. Если $d(r+1) < m$ и мультиграф G принадлежит одному из классов $F^{pr}(m,r)$ или $F_\ell^{pr}(m,r)$, то и H принадлежит тому же классу. В частности, при $r < m$ операция добавления к мультиграфу висячей вершины сохраняет его (m,r)-раскрашиваемость, а при $r < m-1$ сохраняет (предписанную) правильную (m,r)-раскрашиваемость.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что при выполнении условий леммы любая (предписанная) (правильная) m-раскраска вершин мультиграфа G, согласованная с (правильной) системой запретов размера r, продолжается на новую вершину (в случае неправильной раскраски каждое инцидентное новой вершине ребро налагает не более r ограничений на выбор цвета для неё, а в случае правильной раскраски — не более $r+1$ ограничений). □

Из леммы 6 и следствия 1 немедленно получаем:

Следствие 2. *Всякий d-вырожденный мультиграф является (m,r)-раскрашиваемым, если $dr < m$, и предписанно правильно (m,r)-раскрашиваемым, если $d(r+1) < m$.*

Следствие 3. *Класс $F(m,r)$ содержит класс всех деревьев тогда и только тогда, когда $r < m$. Каждый из классов $F^{pr}(m,r)$ и $F_\ell^{pr}(m,r)$ содержит класс всех деревьев тогда и только тогда, когда $r < m-1$.*

5. Характеризация $(2, r)$-раскрашиваемых мультиграфов

В этом разделе мы опишем все классы $(2, r)$-раскрашиваемых мультиграфов при различных значениях r. Из лемм 2–5 следует, что $F(2, r) = \{P_1\}$ при $r \geq 4$; $F^{pr}(2, r) = F^{pr}_{\ell}(2, r) = \{P_1\}$ при $r \geq 2$, и $F(2, 3) = F(2, 2) = F^{pr}(2, 1) = F^{pr}_{\ell}(2, 1) = \{P_1, P_2\}$. Остаётся описать класс $F(2, 1)$.

Заметим, что по лемме 6 операция добавления к мультиграфу висячей вершины сохраняет его принадлежность классу $F(2, 1)$. Поэтому задача описания связных $(2, 1)$-раскрашиваемых мультиграфов сводится к описанию их ядер, то есть связных мультиграфов с минимальной степенью не меньше 2.

Далее ключевое значение для нас будут иметь следующее понятие и лемма, которые обобщают понятие запрета на цепь произвольной длины. Пусть $P = v_0v_1 \ldots v_t$ — простая цепь, на ребрах которой задана система запретов R размера 1 (по одному запрету на каждом ребре). Упорядоченную пару цветов (α, β), где $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$, назовём *запретом* для концов цепи P, если не существует такой 2-раскраски c вершин P, согласованной с R, что $(c(v_0), c(v_t)) = (\alpha, \beta)$.

Лемма 7. *Для любой системы запретов R размера 1, заданной на ребрах цепи P, существует не более одного запрета для концов этой цепи. При этом для любых цветов $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$ существует такая система запретов R размера 1 на ребрах P, что пара (α, β) является (единственным) запретом для концов цепи P.*

Доказательство. Применим индукцию по длине t цепи P. Очевидно, что лемма верна при $t = 1$. Пусть $t > 1$ и утверждение леммы выполняется для подцепи $P' = v_0v_1 \ldots v_{t-1}$. Тогда при любой системе запретов R на ребрах P существует не более чем один запрет (α', β') для концов цепи P'. Пусть (γ, δ) —запрет на ребре $v_{t-1}v_t$. Если $\gamma = \beta'$, то, окрашивая вершину v_{t-1} в цвет $3 - \gamma$ и выбирая любые цвета $c(v_0), c(v_t) \in \{1, 2\}$, получаем, что раскраска вершин v_0, v_{t-1} и v_t продолжается на всю цепь P. Это означает, что для концов цепи P не существует запретов. Если $\gamma \neq \beta'$, то легко проверяется, что единственным запретом для концов цепи P является пара цветов (α', δ).

Далее рассмотрим произвольные цвета $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$. По индукционному предположению для рёбер цепи P' существует такая система запретов R', что пара цветов $(\alpha, 1)$ является запретом для концов P'. Задавая на ребре $v_{t-1}v_t$ запрет $(2, \beta)$, получаем такую систему запретов R на ребрах цепи P, что пара (α, β) является запретом для концов P. □

Следствие 4. *Любой цикл (в том числе длины 2, то есть изоморфный $2E$) является $(2, 1)$-раскрашиваемым графом. При этом для любой вершины v_0 цикла C и для любого цвета $\alpha \in \{1, 2\}$ существует такая система запретов R размера 1 на ребрах C, что цвет α является запрещённым в вершине v_0, то есть $c(v_0) \neq \alpha$ для любой 2-раскраски c вершин цикла C, согласованной с R.*

Доказательство. Разорвём цикл $C = (v_0v_1 \ldots v_kv_0)$ в вершине v_0, расщепляя её на две вершины, то есть рассмотрим цепь $P = v_0v_1 \ldots v_kv'_0$, где v'_0 — дубликат вершины v_0. По лемме 7 для любой системы запретов R размера 1 хотя бы одна пара цветов $(1, 1)$ или $(2, 2)$ не будет запрещенной для концов цепи P. Следовательно, существует 2-раскраска вершин цикла C, согласованная с R. С другой стороны, по лемме 7 для пары цветов (α, α) можно выбрать систему запретов на ребрах цепи P таким образом, чтобы эта пара оказалась запрещенной для концов P. В этом случае цвет α окажется запрещенным в вершине v_0 при окрашивании цикла C. □

Следствие 5. *Никакой связный мультиграф, содержащий два рёберно непересекающихся цикла, не является $(2, 1)$-раскрашиваемым.*

Доказательство. Пусть связный мультиграф G содержит реберно непересекающиеся циклы C_1 и C_2. Из связности G следует, что существует цепь P (возможно, одновершинная), соединяющая какую-то вершину v_1 цикла C_1 с вершиной v_2 цикла C_2. По следствию 4 на рёбрах цикла C_1 можно задать такую систему запретов R_1, чтобы цвет 1 был запрещён в вершине v_1, а на рёбрах цикла C_2 можно задать такую систему запретов R_2, чтобы цвет 2 был запрещён в v_2. Если $v_1 = v_2$ — общая вершина циклов C_1 и C_2, то сразу получаем, что для вершины v_1 нет допустимого цвета, а значит, мультиграф G не является $(2,1)$-раскрашиваемым. Если $v_1 \neq v_2$, то по лемме 7 на рёбрах цепи P можно задать такую систему запретов, что пара $(2,1)$ является запрещенной на концах P. Отсюда снова получаем, что мультиграф G не является $(2,1)$-раскрашиваемым. □

Следствие 6. *Любой тета-граф является* $(2,1)$*-раскрашиваемым.*

Доказательство. По лемме 7 каждая из трёх цепей, составляющих тета-граф, задаёт не более одного запрета на выбор пары цветов на концах цепи. Следовательно, существует такая пара цветов, что все три цепи являются $(2,1)$-раскрашиваемыми. □

Следствие 7. *Никакое подразбиение графа* K_4 *не является* $(2,1)$*-раскрашиваемым.*

Доказательство. Пусть a, b, c, d — вершины исходного графа K_4. По лемме 7 существует такая система запретов R, что пара цветов $(1,1)$ является запрещённой для концов каждой из цепей $a \dots b$ и $c \dots d$, а пара $(2,2)$ запрещена для концов каждой из цепей $a \dots c$, $a \dots d$, $b \dots c$ и $b \dots d$. Ясно, что никакая 2-раскраска вершин графа не согласуется с такой системой запретов R. □

Теорема 1. *Связный мультиграф G является* $(2,1)$*-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда G является деревом, либо содержит в качестве ядра цикл или тета-граф. В частности, число рёбер любого связного n-вершинного* $(2,1)$*-раскрашиваемого мультиграфа не превосходит* $n+1$.

Доказательство. Если G содержит не более n рёбер, то G является деревом, либо содержит ровно один цикл, который служит его ядром. В каждом из этих случаев G является $(2,1)$-раскрашиваемым по лемме 6 и следствиям 3 и 4. Если ядром G служит тета-граф, то G является $(2,1)$-раскрашиваемым по лемме 6 и следствию 6. Остаётся доказать, что если G содержит не менее чем $n+2$ ребра, либо в точности $n+1$ ребро, но ядром G не является тета-граф, то G не может быть $(2,1)$-раскрашиваемым мультиграфом.

Пусть T — остовное дерево в G. Если число рёбер мультиграфа G равно $n+1$, то G содержит в точности два ребра e_1, e_2, не принадлежащие T. Для каждого $i = 1, 2$ обозначим через C_i единственный цикл в мультиграфе $T \cup \{e_i\}$. Если циклы C_1 и C_2 имеют хотя бы одно общее ребро, то ядром G служит тета-граф. В противном случае G не является $(2,1)$-раскрашиваемым мультиграфом по следствию 5.

Пусть мультиграф G содержит не менее чем $n+2$ ребра. Тогда в G имеются по крайней мере три ребра e_1, e_2, e_3, не принадлежащие T. Если G является $(2,1)$-раскрашиваемым, то таким же является и его подграф $T \cup \{e_1, e_2\}$, а значит, по доказанному, ядром $T \cup \{e_1, e_2\}$ служит тета-граф Θ. Обозначим через C_3 единственный цикл в мультиграфе $T \cup \{e_3\}$. Если подграфы C_3 и Θ не имеют общих рёбер, то в G содержатся два реберно непересекающихся цикла, что противоречит следствию 5. В противном случае подграфы C_3 и Θ имеют хотя бы две общие вершины, при этом в C_3 содержится ребро e_3 не принадлежащее Θ. Отсюда следует, что в C_3 имеется подцепь P, содержащая ребро e_3, концевые вершины которой принадлежат подграфу Θ, а все внутренние вершины P не принадлежат Θ. Если концевые вершины P принадлежат одной и той же цепи в Θ, то G содержит два реберно непересекающихся цикла. Значит, P соединяет внутренние вершины двух различных цепей в Θ. В этом соучае G содержит подразбиение графа K_4, что противоречит следствию 7. $\square$

References

[1] P. Erdos, A.L. Rubin, H. Taylor, *Choosability in graphs*, Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Arcata, Congressus Numerantium, 1979), **26** (1979), 125–157. MR0593902

[2] T. Feder, P. Hell, J. Huang, *Brooks Type Theorems for Pair-List Colourings and List Homomorphisms*, SIAM J. Discrete Math., **22** (2008), 1–14. Zbl 1156.05019

[3] F. Galvin, *The list chromatic index of a bipartite multigraph*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **63** (1995), 153–158. Zbl 0826.05026

[4] J. Kahn, *Asymptotics of the list chromatic index for multigraphs*, Random Structures & Algorithms, **17(2)** (2000), 117–156. Zbl 0956.05038

[5] C. Thomassen, *Every planar graph is 5-choosable*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **62** (1994), 180–181. Zbl 0805.05023

[6] V.G. Vizing, *Colouring vertices of a graph with prescribd colours*, Metody diskretnogo analiza v teorii kodov i shem: sborn. nauchn. trudov, Sobolev institute of mathematics: Novosibirsk, **29** (1976), 3–10. MR0498216

Aleksey Nikolaevich Glebov
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: angle@math.nsc.ru

Pavlov Ivan Alekseevich
Novosibirsk State University,
2, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: jediananas@yandex.ru

Khadaev Konstantin Alekseevich
Higher School of Economics,
20, Myasnitskaya str.,
Moscow, 101000, Russia
E-mail address: khadaev98@gmail.com