S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 647–660 (2020) УДК 517.946
DOI 10.33048/semi.2020.17.043 MSC 65N20, 47A52

НЕКОРРЕКТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

К.С. ФАЯЗОВ, Я.К. ХУДАЙБЕРГАНОВ

Abstract. In this paper, ill-posed boundary value problem is investigated for a system of partial differential equations of mixed type with two degenerate lines. To boundary value problems for equations of mixed type, problems from various fields of the natural sciences can be summarized: problems of laser physics, plasma modeling, and mathematical biology. In this paper, we prove theorems on the uniqueness and conditional stability of the solution of the problem under investigation on a set of correctness. The a priori estimate of the solution is obtained by the method of logarithmic convexity and spectral decomposition.

Keywords: boundary problem, system of equations of mixed type with degenerate lines, ill-posed problem, a priori estimate,estimate of conditional stability, uniqueness, set of correctness.

1. Введение

Исследование некорректных краевых задач для уравнений в частных производных смешанного и смешанно-составного типа является одним из важных направлений современной теории обратных и некорректных задач.

В начале двадцатых годов прошлого века Ф. Трикоми и далее С. Геллерстед начали исследования дифференциальных уравнений смешанного типа. Дальнейшее развитие данная теория получила в работах К. И. Бабенко, М. А. Лаврентьева, А. В. Бицадзе, А. М. Нахушева [5], М. В. Келдыша, С. П. Пулькина, В. П. Диденко, В. Н. Врагова [6], С. А. Терсенова, Ф. И. Франкль [7], А. Г. Кузьмина [2] и других.

Fayazov, K.S, Khudayberganov, Y.K., Ill-posed boundary value problem for mixed type system equations with two degenerate lines.

Поступила 16 июля 2019 г., опубликована 28 апреля 2020 г.

В дальнейших исследованиях параболические уравнения с меняющимся направлением времени стали рассматривать как частный случай уравнений смешанного типа. В работах Н. В. Кислова была доказана обобщенная разрешимость краевых задач для абстрактного уравнения. Большой вклад в исследование краевых задач для уравнений смешанного типа внесли А. И. Кожанов [3], И. Е. Егоров, С. Г. Пятков [17],[18], А. А. Керефов, И. С. Пулькин, К. Б. Сабитов [9] и другие.

Исследуемая в данной работе задача относится к классу некорректно поставленных задач математической физики, а именно в данной задаче отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных. Некорректные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений были рассмотрены в работах М. М. Лаврентьева [19], [20], H. Levine [8], С. Г Крейна [16], А. Л. Бухгейма [4], К. С. Фаязова, а для уравнений смешанного и смешанно-составного типа в работах К. С. Фаязова, К. С. Фаязова и И. О. Хажиева [10], [11], [12], К. С. Фаязова и Я. К. Худайберганова [13], [14].

Из этих работ следует, что краевые задачи для уравнений смешанного типа имеют практическое применение, они возникают при решении задач газовой динамики, безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в магнитной гидродинамике, в теории электронного рассеяния, в прогнозировании уровня грунтовых вод и в других областях физики и техники.

В работе [14] была рассмотрена краевая задача для системы уравнений. Первое уравнение — однородное уравнение с двумя линиями вырождения параболического типа, а второе уравнение — неоднородное уравнение параболического типа также с двумя линиями вырождения. Доказана условная корректность краевой задачи для этой системы методом интегральной энергии, а также построено приближенное решение задачи.

В данной работе рассматривается краевая задача для системы уравнений с двумя линиями вырождения, состоящая из неоднородного уравнения параболического типа и неоднородного уравнения эллиптико-гиперболического типа. Доказываются теоремы о единственности и условной устойчивости на множестве корректности, используя метод разложения по собственным функциям соответствующей спектральной задачи и метод логарифмической выпуклости.

Пусть пара функций $(u_1(x,y,t), u_2(x,y,t))$ является решением системы уравнений в частных производных смешанного типа

$$(1)\qquad \begin{cases} u_{1t}(x,y,t) = sgn(x)u_{1xx}(x,y,t) + sgn(y)u_{1yy}(x,y,t) + f(x,y,t) \\ u_{2tt}(x,y,t) = sgn(x)u_{2xx}(x,y,t) + sgn(y)u_{2yy}(x,y,t) + u_1(x,y,t) \end{cases}$$

в области $\Omega = \Omega_0 \times (0;T)$, где $\Omega_0 = \left\{(x,y) \in (-1;1)^2, x \neq 0, y \neq 0\right\}, T < \infty$.

Постановка задачи. Найти пару непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций $(u_1(x,y,t), u_2(x,y,t))$ удовлетворяющую систему уравнений (1) и следующим условиям:

начальным

$$(2)\qquad u_1(x,y,t)\left.\right|_{t=0} = \psi(x,y)\ ,\ \left.\frac{\partial^i u_2(x,y,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0} = \varphi_{i+1}(x,y), (x,y) \in [-1;1]^2,$$

граничным

$$(3)\quad \begin{gathered} u_j(x,y,t)\Big|_{\substack{x=-1\\x=+1}}=0,\ (y,t)\in[-1;1]\times[0;T],\\ u_j(x,y,t)\Big|_{\substack{y=-1\\y=+1}}=0,\ (x,t)\in[-1;1]\times[0;T], \end{gathered}$$

и условиям склеивания

$$(4)\quad \begin{gathered} \frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial x^i}\Big|_{x=-0}=\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial x^i}\Big|_{x=+0},\ (y,t)\in[-1;1]\times[0;T],\\ \frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial y^i}\Big|_{y=-0}=\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial y^i}\Big|_{y=+0},\ (x,t)\in[-1;1]\times[0;T], \end{gathered}$$

где ($i=\overline{0,1}$, $j=\overline{1,2}$) и $\varphi_{i+1}(x,y)$, $\psi(x,y), f(x,y,t)-$ заданные достаточно гладкие функции.

В данной работе доказана некорректность искомой задачи, получено представление решения, выведена априорная оценка решения, получены теоремы, доказывающие единственность и устойчивость на множестве корректности.

2. Представление решения

Пусть $\left\{\lambda^{(1)}_{k,l}\right\}_{k,l=1}^{\infty}, \left\{-\lambda^{(2)}_{k,l}\right\}_{k,l=1}^{\infty}, \left\{\lambda^{(3)}_{k,l}\right\}_{k,l=1}^{\infty}, \left\{-\lambda^{(4)}_{k,l}\right\}_{k,l=1}^{\infty}$ собственные значения и $\left\{\vartheta^{(j)}_{k,l}(x,y)\right\}_{k,l=1}^{\infty}, (j=\overline{1,4})$ собственные функции следующей спектральной задачи

$$(5)\quad sgn(x)\vartheta_{xx}(x,y)+sgn(y)\vartheta_{yy}(x,y)=\lambda\vartheta(x,y),\ (x,y)\in(-1;1)^2,\ x\neq 0, y\neq 0,$$

$$(6)\quad \begin{gathered} \vartheta(x,y)\Big|_{\substack{x=-1\\x=+1}}=0,\ \ y\in[-1;1],\\ \vartheta(x,y)\Big|_{\substack{y=-1\\y=+1}}=0,\ \ x\in[-1;1],\\ \frac{\partial^i\vartheta(x,y)}{\partial x^i}\Big|_{x=-0}=\frac{\partial^i\vartheta(x,y)}{\partial x^i}\Big|_{x=+0}, y\in[-1;1],\\ \frac{\partial^i\vartheta(x,y)}{\partial y^i}\Big|_{y=-0}=\frac{\partial^i\vartheta(x,y)}{\partial y^i}\Big|_{y=+0}, x\in[-1;1],\ i=0,1. \end{gathered}$$

Из результатов работы [18] следует, что задача (5)-(6) имеет неубывающую последовательность $\left\{\lambda^{(1)}_{k,l}\right\}_{k,l=1}^{\infty}, \left\{-\lambda^{(2)}_{k,l}\right\}_{k,l=1}^{\infty}, \left\{\lambda^{(3)}_{k,l}\right\}_{k,l=1}^{\infty}, \left\{-\lambda^{(4)}_{k,l}\right\}_{k,l=1}^{\infty}$ собственных значений и соответствующих им собственных функций $\left\{\vartheta^{(j)}_{k,l}(x,y)\right\}_{k,l=1}^{\infty}, (j=\overline{1,4})$.

Собственные функции представим в виде:

$$\begin{gathered} \vartheta^{(1)}_{k,l}(x,y)=X^{(1)}_k(x)\times Y^{(1)}_l(y),\ k,l\in N,\\ \vartheta^{(2)}_{k,l}(x,y)=X^{(1)}_k(x)\times Y^{(2)}_l(y),\ k,l\in N,\\ \vartheta^{(3)}_{k,l}(x,y)=X^{(2)}_k(x)\times Y^{(1)}_l(y),\ k,l\in N,\\ \vartheta^{(4)}_{k,l}(x,y)=X^{(2)}_k(x)\times Y^{(2)}_l(y),\ k,l\in N, \end{gathered}$$

где $\mu_k^2 + \sigma_l^2 = \lambda_{k,l}^{(1)}$,$\mu_k^2 - \sigma_l^2 = \lambda_{k,l}^{(2)}$, $-\mu_k^2 + \sigma_l^2 = \lambda_{k,l}^{(3)}$,$-\mu_k^2 - \sigma_l^2 = \lambda_{k,l}^{(4)}$,
если $\lambda_{k,l} > 0$

$$X_k^{(1)}(x) = \begin{cases} sh\mu_k(x-1)/ch\mu_k & ,0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \sin\mu_k(x+1)/\cos\mu_k \,, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \end{cases} k \in N,$$

$$Y_l^{(1)}(y) = \begin{cases} sh\sigma_l(y-1)/ch\sigma_l & ,0 \leqslant y \leqslant 1, \\ \sin\sigma_l(y+1)/\cos\sigma_l \,, & -1 \leqslant y \leqslant 0, \end{cases} l \in N,$$

а при $\lambda_{k,l} < 0$

$$X_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \sin\mu_k(x-1)/\cos\mu_k & ,0 \leqslant x \leqslant 1, \\ sh\mu_k(x+1)/ch\mu_k \,, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \end{cases} k, \in N,$$

$$Y_l^{(2)}(y) = \begin{cases} \sin\sigma_l(y-1)/\cos\sigma_l & ,0 \leqslant y \leqslant 1, \\ sh\sigma_l(y+1)/ch\sigma_l \,, & -1 \leqslant y \leqslant 0, \end{cases} l \in N.$$

В обоих случаях $\mu_k, \sigma_l - (k, l \in N)$ являются положительными корнями трансцендентного уравнения $tg\alpha = -th\alpha$. Пусть $\|u\|^2 = (u, u)$, где скалярное произведение $(u, v) = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} uv dx dy$. Кроме того

$$(sgn(x)sgn(y)\vartheta_{k,l}^{(p)}(x,y), \vartheta_{i,j}^{(q)}(x,y)) = 0, p \neq q, (p, q = \overline{1,4}), \forall k, l, i, j,$$

$$(sgn(x)sgn(y)\vartheta_{k,l}^{(m)}(x,y), \vartheta_{i,j}^{(m)}(x,y)) = \begin{cases} 1, \ k = i \wedge l = j \\ 0, \ k \neq i \wedge l \neq j \end{cases}, (m = 1, 4),$$

$$(sgn(x)sgn(y)\vartheta_{k,l}^{(m)}(x,y), \vartheta_{i,j}^{(m)}(x,y)) = \begin{cases} -1, \ k = i \wedge l = j \\ 0, \ k \neq i \wedge l \neq j \end{cases}, (m = 2, 3),$$

где $k, l, i, j \in N$.

Представим спектральные проекторы $-P^{\pm}$ в следующем виде

$$P^{+}\phi = \sum_{k,l=1}^{\infty}\Big((sgn(x)sgn(y)\phi, \vartheta_{k,l}^{(1)})\vartheta_{k,l}^{(1)} + (sgn(x)sgn(y)\phi, \vartheta_{k,l}^{(4)})\vartheta_{k,l}^{(4)}\Big),$$

$$P^{-}\phi = -\sum_{k,l=1}^{\infty}\Big((sgn(x)sgn(y)\phi, \vartheta_{k,l}^{(2)})\vartheta_{k,l}^{(2)} + (sgn(x)sgn(y)\phi, \vartheta_{k,l}^{(3)})\vartheta_{k,l}^{(3)}\Big).$$

Аналогично как в [18]

$$(P^{+} - P^{-})\phi = \phi, \ (sgn(x)sgn(y)(P^{+} - P^{-})\phi, \phi) = \|\phi\|^2,$$

$$(sgn(x)sgn(y)(P^{+}, P^{-})\phi, \psi) =$$
$$= (sgn(x)sgn(y)\phi, (P^{+}, P^{-})\psi), \phi, \psi \in \mathrm{H}_0 = L_2(-1,1)^2,$$

$$\|\phi\|_0^2 = \sum_{k,l=1}^{\infty}\Bigg\{\Big|(sgn(x)sgn(y)\phi, \vartheta_{k,l}^{(1)}(x,y))\Big|^2 +$$
$$+\Big|(sgn(x)sgn(y)\phi, \vartheta_{k,l}^{(2)}(x,y))\Big|^2 + \Big|(sgn(x)sgn(y)\phi, \vartheta_{k,l}^{(3)}(x,y))\Big|^2 + \quad (7)$$
$$+\Big|(sgn(x)sgn(y)\phi, \vartheta_{k,l}^{(4)}(x,y))\Big|^2\Bigg\}.$$

Согласно работе [17] собственные функции задачи (5)-(6) образуют базис Рисса в H_0 и норма в пространстве $L_2(-1,1)^2$, определенная равенством (7), эквивалентна исходной.

Определение 1. *Под решением задачи (1)-(4) понимаем пару непрерывных в* $\bar{\Omega}$ *функций* $(u_1(x,y,t), u_2(x,y,t))$, *имеющих непрерывные производные, входящие в уравнение, удовлетворяющих системе уравнений (1) и условиям (2)-(4).*

Через M обозначим множества корректности определенные следующим образом

$$M=\left\{(u_1,u_2):\|u_1(x,y,T)\|_0^2+\int\limits_0^T\|u_2(x,y,t)\|_0^2\,dt\le m^2, m<\infty\right\}.$$

Если решение существует и принадлежит M, то оно имеет вид

$$\begin{aligned}u_1(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\Big(u_{1k,l}^{(1)}(t)\vartheta_{k,l}^{(1)}(x,y)+u_{1k,l}^{(4)}(t)\vartheta_{k,l}^{(4)}(x,y)\Big)+\\+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\Big(u_{1k,l}^{(2)}(t)\vartheta_{k,l}^{(2)}(x,y)+u_{1k,l}^{(3)}(t)\vartheta_{k,l}^{(3)}(x,y)\Big),\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}u_2(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\Big(u_{2k,l}^{(1)}(t)\vartheta_{k,l}^{(1)}(x,y)+u_{2k,l}^{(4)}(t)\vartheta_{k,l}^{(4)}(x,y)\Big)+\\+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\Big(u_{2k,l}^{(2)}(t)\vartheta_{k,l}^{(2)}(x,y)+u_{2k,l}^{(3)}(t)\vartheta_{k,l}^{(3)}(x,y)\Big),\end{aligned}\tag{9}$$

где

$$u_{1k,l}^{(i)}(t)=\psi_{k,l}^{(i)}e^{\lambda_{k,l}^{(i)}t}+\int\limits_0^t e^{\lambda_{k,l}^{(i)}(t-\tau)}f_{k,l}^{(i)}(\tau)d\tau,\ k,l\in N,(i=\overline{1,4}),$$

$$u_{2k,l}^{(j)}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{k,l}^{(j)}}}\displaystyle\int\limits_0^t u_{1k,l}^{(j)}(\tau)sh\sqrt{\lambda_{k,l}^{(j)}}(t-\tau)d\tau+\varphi_{1k,l}^{(j)}ch\sqrt{\lambda_{k,l}^{(j)}}t+\\+\dfrac{\varphi_{2k,l}^{(j)}sh\sqrt{\lambda_{k,l}^{(j)}}t}{\sqrt{\lambda_{k,l}^{(j)}}},\lambda_{k,l}^{(j)}>0,\ (j=\overline{1,3}),\\ \displaystyle\int\limits_0^t(t-\tau)u_{1k,l}^{(j)}(\tau)d\tau+\varphi_{2k,l}^{(j)}t+\varphi_{1k,l}^{(j)},\ \lambda_{k,l}^{(j)}=0,\ (j=2,3),\\ \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda_{k,l}^{(j)}}}\displaystyle\int\limits_0^t u_{1k,l}^{(j)}(\tau)\sin\sqrt{-\lambda_{k,l}^{(j)}}(t-\tau)d\tau+\varphi_{1k,l}^{(j)}\cos\sqrt{-\lambda_{k,l}^{(j)}}t+\\+\dfrac{\varphi_{2k,l}^{(j)}\sin\sqrt{-\lambda_{k,l}^{(j)}}t}{\sqrt{-\lambda_{k,l}^{(j)}}},\lambda_{k,l}^{(j)}<0,\ (j=\overline{2,4}),\ k,l\in N.\end{cases}$$

и

$$u_{ik,l}^{(j)}(t) = (sgn(x)sgn(y)u_i(x,y,t), \vartheta_{k,l}^{(j)}(x,y)), (j = 1,4),$$
$$u_{ik,l}^{(j)}(t) = -(sgn(x)sgn(y)u_i(x,y,t), \vartheta_{k,l}^{(j)}(x,y)), (j = 2,3),$$
$$\psi_{k,l}^{(j)} = (sgn(x)sgn(y)\psi(x,y), \vartheta_{k,l}^{(j)}(x,y)), (j = 1,4),$$
$$\psi_{k,l}^{(j)} = -(sgn(x)sgn(y)\psi(x,y), \vartheta_{k,l}^{(j)}(x,y)), \ (j = 2,3),$$
$$\varphi_{ik,l}^{(j)} = (sgn(x)sgn(y)\varphi_i(x,y), \vartheta_{k,l}^{(j)}(x,y)), (j = 1,4),$$
$$\varphi_{ik,l}^{(j)} = -(sgn(x)sgn(y)\varphi_i(x,y), \vartheta_{k,l}^{(j)}(x,y)), \ (j = 2,3), \ k,l \in N, \ (i = \overline{1,2}).$$

3. Априорная оценка

Лемма 1. *(см. стр. 54-55,* [20]*) Пусть $\varpi(t)$ решение уравнения*

$$\varpi_t(t) - \lambda\varpi(t) = 0$$

и удовлетворяет условию $\varpi(0) = p$, тогда для решения данного уравнения при $t \in [0;T]$ имеет место неравенство

$$\|\varpi(t)\|_0 \leqslant \|\varpi(0)\|_0^{\frac{T-t}{T}} \cdot \|\varpi(T)\|_0^{\frac{t}{T}},$$

где λ-некоторая константа.

Лемма 2. *Пусть $u_1(x,y,t)$ является решением уравнения*

$$u_{1t}(x,y,t) = sgn(x)u_{1xx}(x,y,t) + sgn(y)u_{1yy}(x,y,t) + f(x,y,t) \tag{10}$$

в области Ω и удовлетворяет соответствующим условиям (2)-(4). Тогда для $u_1(x,y,t)$ при $t \in (0;T)$ верно следующее неравенство

$$\|u_1(x,y,t)\|_0 \leqslant 2(\|u_1(x,y,0)\|_0 + \beta)^{1-\frac{t}{T}}(\|u_1(x,y,T)\|_0 + \beta)^{\frac{t}{T}} + \beta, \tag{11}$$

где $\beta = \left(\int\limits_0^T \|f(x,y,t)\|_0^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

Доказательство. $u_1(x,y,t)$ можно представить в виде

$$u_1(x,y,t) = \nu(x,y,t) + \omega(x,y,t),$$

где $\omega(x,y,t)-$ решение однородного уравнения

$$\omega_t(x,y,t) = sgn(x)\omega_{xx}(x,y,t) + sgn(y)\omega_{yy}(x,y,t),$$

$\nu(x,y,t)-$некоторое частное решение неоднородного уравнения

$$\nu_t(x,y,t) = sgn(x)\nu_{xx}(x,y,t) + sgn(y)\nu_{yy}(x,y,t) + f(x,y,t).$$

Причем функции $\nu(x,y,t)$, $\omega(x,y,t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\omega(x,y,t)\Big|_{\substack{x=-1\\x=+1}} = 0, \ \nu(x,y,t)\Big|_{\substack{x=-1\\x=+1}} = 0, \ (y,t) \in [-1;1] \times [0;T],$$
$$\omega(x,y,t)\Big|_{\substack{y=-1\\y=+1}} = 0, \ \nu(x,y,t)\Big|_{\substack{y=-1\\y=+1}} = 0, \ (x,t) \in [-1;1] \times [0;T],$$

а также условиям склеивания

$$\left.\frac{\partial^i\omega(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0}=\left.\frac{\partial^i\omega(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0},\ (y,t)\in[-1;1]\times[0;T],$$

$$\left.\frac{\partial^i\nu(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0}=\left.\frac{\partial^i\nu(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0},\ (y,t)\in[-1;1]\times[0;T],$$

$$\left.\frac{\partial^i\omega(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0}=\left.\frac{\partial^i\omega(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ (x,t)\in[-1;1]\times[0;T]\,,$$

$$\left.\frac{\partial^i\nu(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0}=\left.\frac{\partial^i\nu(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ (x,t)\in[-1;1]\times[0;T]\,,i=0,1\,.$$

Ищем решение в виде

$$\omega(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\omega_{k,l}^{(1)}(t)\vartheta_{k,l}^{(1)}(x,y)+\omega_{k,l}^{(2)}(t)\vartheta_{k,l}^{(2)}(x,y)+$$
$$+\omega_{k,l}^{(3)}(t)\vartheta_{k,l}^{(3)}(x,y)+\omega_{k,l}^{(4)}(t)\vartheta_{k,l}^{(4)}(x,y)\Big)\,,$$

$$\nu(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\nu_{k,l}^{(1)}(t)\vartheta_{k,l}^{(1)}(x,y)+\nu_{k,l}^{(2)}(t)\vartheta_{k,l}^{(2)}(x,y)+$$
$$+\nu_{k,l}^{(3)}(t)\vartheta_{k,l}^{(3)}(x,y)+\nu_{k,l}^{(4)}(t)\vartheta_{k,l}^{(4)}(x,y)\Big)\,,$$

Здесь $\omega_{k,l}^{(j)}(t)$ и $\nu_{k,l}^{(j)}(t),(j=\overline{1,4})$ при каждом $k,l\in N$ являются решениями следующих задач соответственно:

$$\begin{cases}\left(\nu_{k,l}^{(j)}(t)\right)_t-\lambda_{k,l}^{(j)}\nu_{k,l}^{(j)}(t)=f_{k,l}^{(j)}(t),\\ \nu_{k,l}^{(j)}(0)=-\int\limits_0^T e^{-\lambda_{k,l}^{(j)}\tau}f_{k,l}^{(j)}(\tau)d\tau,\lambda_{k,l}^{(j)}>0,(j=\overline{1,3}),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\nu_{k,l}^{(j)}(t)\right)_t-\lambda_{k,l}^{(j)}\nu_{k,l}^{(j)}(t)=f_{k,l}^{(j)}(t),\\ \nu_{k,l}^{(j)}(0)=0,\lambda_{k,l}^{(j)}\leqslant 0,(j=\overline{2,4}),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\omega_{k,l}^{(j)}(t)\right)_t-\lambda_{k,l}^{(j)}\omega_{k,l}^{(j)}(t)=0,\\ \omega_{k,l}^{(j)}(0)=\psi_{k,l}^{(j)}+\int\limits_0^T e^{-\lambda_{k,l}^{(j)}\tau}f_{k,l}^{(j)}(\tau)d\tau,\ \lambda_{k,l}^{(j)}>0,(j=\overline{1,3}),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\omega_{k,l}^{(j)}(t)\right)_t-\lambda_{k,l}^{(j)}\omega_{k,l}^{(j)}(t)=0,\\ \omega_{k,l}^{(j)}(0)=\psi_{k,l}^{(j)},\ \lambda_{k,l}^{(j)}\leqslant 0,(j=\overline{2,4}),\end{cases}$$

где

$$\omega_{k,l}^{(j)}(t)=(sgn(x)sgn(y)\omega(x,y,t),\vartheta_{k,l}^{(j)}(x,y)),\ (j=1,4),$$
$$\omega_{k,l}^{(j)}(t)=-(sgn(x)sgn(y)\omega(x,y,t),\vartheta_{k,l}^{(j)}(x,y)),\ (j=2,3),$$
$$\nu_{k,l}^{(j)}(t)=(sgn(x)sgn(y)\nu(x,y,t),\vartheta_{k,l}^{(j)}(x,y)),\ (j=1,4),$$
$$\nu_{k,l}^{(j)}(t)=-(sgn(x)sgn(y)\nu(x,y,t),\vartheta_{k,l}^{(j)}(x,y)),\ (j=2,3).$$

Нетрудно заметить (см. стр. 56, [20]), что

$$\nu_{k,l}^{(j)}(t)=\begin{cases}-\int\limits_t^T e^{\lambda_{k,l}^{(j)}(t-\tau)}f_{k,l}^{(j)}(\tau)d\tau, \lambda_{k,l}^{(j)}>0, (j=\overline{1,3}),\\ \int\limits_0^t e^{\lambda_{k,l}^{(j)}(t-\tau)}f_{k,l}^{(j)}(\tau)d\tau,\ \ \lambda_{k,l}^{(j)}\le 0,\ k,l\in N, (j=\overline{2,4}).\end{cases}$$

и

$$\omega_{k,l}^{(j)}(t)=\begin{cases}\psi_{k,l}^{(j)}e^{\lambda_{k,l}^{(j)}t}+\int\limits_0^T e^{\lambda_{k,l}^{(j)}(t-\tau)}f_{k,l}^{(j)}(\tau)d\tau,\ \ \lambda_{k,l}^{(j)}>0, (j=\overline{1,3}),\\ \psi_{k,l}^{(j)}e^{\lambda_{k,l}^{(j)}t}, \lambda_{k,l}^{(j)}\le 0,\ \ k,l\in N, (j=\overline{2,4}).\end{cases}$$

Следовательно, для функции $\nu(x,y,t)$ верно неравенство

$$\|\nu(x,y,t)\|_0^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\left|\nu_{k,l}^{(1)}(t)\right|^2+\left|\nu_{k,l}^{(2)}(t)\right|^2+\left|\nu_{k,l}^{(3)}(t)\right|^2+\right.$$
$$\left.+\left|\nu_{k,l}^{(4)}(t)\right|^2\right)\leqslant\int\limits_0^T\|f(x,y,t)\|_0^2\,dt. \qquad (12)$$

Согласно Леммы 1 для функций $\omega_{k,l}^{(j)}(t)$, $(j=\overline{1,4})$ при каждом фиксированном $k,l\in N$ верны неравенства

$$\left|\omega_{k,l}^{(j)}(t)\right|^2\leqslant\left(\left|\omega_{k,l}^{(j)}(0)\right|^2\right)^{\frac{T-t}{T}}\cdot\left(\left|\omega_{k,l}^{(j)}(T)\right|^2\right)^{\frac{t}{T}}, j=\overline{1,4}. \qquad (13)$$

Согласно (7) имеем

$$\|\omega(x,y,t)\|_0^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\left|\omega_{k,l}^{(1)}(t)\right|^2+\left|\omega_{k,l}^{(2)}(t)\right|^2+\left|\omega_{k,l}^{(3)}(t)\right|^2+\left|\omega_{k,l}^{(4)}(t)\right|^2\right).$$

Суммируем неравенства (13) по k,l, $(k,l\in N)$ и с учетом неравенства Гельдера получим

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\left|\omega_{k,l}^{(1)}(t)\right|^2+\left|\omega_{k,l}^{(2)}(t)\right|^2+\left|\omega_{k,l}^{(3)}(t)\right|^2+\left|\omega_{k,l}^{(4)}(t)\right|^2\right)\leqslant$$
$$\leqslant 4\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\left|\omega_{k,l}^{(1)}(0)\right|^2+\left|\omega_{k,l}^{(2)}(0)\right|^2+\left|\omega_{k,l}^{(3)}(0)\right|^2+\left|\omega_{k,l}^{(4)}(0)\right|^2\right)\right)^{\frac{T-t}{T}}\times$$
$$\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\left|\omega_{k,l}^{(1)}(T)\right|^2+\left|\omega_{k,l}^{(2)}(T)\right|^2+\left|\omega_{k,l}^{(3)}(T)\right|^2+\left|\omega_{k,l}^{(4)}(T)\right|^2\right)\right)^{\frac{t}{T}}, 0<t<T$$

или

$$\|\omega(x,y,t)\|_0\leqslant 2(\|\omega(x,y,0)\|_0)^{1-\frac{t}{T}}\cdot(\|\omega(x,y,T)\|_0)^{\frac{t}{T}}, 0<t<T. \qquad (14)$$

Так как $\omega(x,y,t), = u_1(x,y,t) - \nu(x,y,t)$, то из неравенств (12), (14) имеем

$$\|u_1(x,y,t) - \nu(x,y,t)\|_0 \leqslant 2(\|u_1(x,y,0) - \nu(x,y,0)\|_0)^{1-\frac{t}{T}} \times$$
$$\times(\|u_1(x,y,T) - \nu(x,y,T)\|_0)^{\frac{t}{T}}.$$

Отсюда, используя неравенство треугольника, имеем

$$\|u_1(x,y,t)\|_0 - \|\nu(x,y,t)\|_0 \leqslant 2(\|u_1(x,y,0)\|_0 + \|\nu(x,y,0)\|_0)^{1-\frac{t}{T}} \times$$
$$\times(\|u_1(x,y,T)\|_0 + \|\nu(x,y,T)\|_0)^{\frac{t}{T}}.$$

Заметим, что $\|\nu(x,y,t)\| \leqslant \beta = \left(\int\limits_0^T \|f(x,y,t)\|_0^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$, поэтому верно следующее неравенство

$$\|u_1(x,y,t)\|_0 \leqslant 2(\|u_1(x,y,0)\|_0 + \beta)^{1-\frac{t}{T}}(\|u_1(x,y,T)\|_0 + \beta)^{\frac{t}{T}} + \beta.$$

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *(см.*[10]*) Пусть $\upsilon(t)$ решение уравнения*

$$\upsilon''(t) - \lambda\upsilon(t) = f(t)$$

и удовлетворяет условиям $\upsilon(0) = p_1,\ \upsilon'(0) = p_2$, тогда для решения данного уравнения при $t \in (0,T)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_0^t \upsilon^2(\tau)d\tau \leq q(t)\big(Tp_1^2 + \alpha\big)^{1-p(t)}\left(\int\limits_0^T \upsilon^2(t)dt + \alpha\right)^{p(t)},$$

где λ-некоторая константа, $f(t)$- заданная функция,

$$\alpha = (2T^2+1)\int\limits_0^T f^2(t)dt + 2\left|\lambda p_1^2 - p_2^2\right| T + 2\left|p_1 p_2\right|,$$

$$p(t) = \frac{1-e^{-2t}}{1-e^{-2T}},\ q(t) = \exp\left(\frac{2T+1}{2}\frac{\left(1-e^{-2t}\right)T - \left(1-e^{-2T}\right)t}{1-e^{-2T}}\right).$$

Доказательство данной Леммы можно найти в (см.[10])

Лемма 4. *Пусть функция $u_2(x,y,t)$ является решением уравнения*

$$u_{2tt}(x,y,t) = sgn(x)u_{2xx}(x,y,t) + sgn(y)u_{2yy}(x,y,t) + u_1(x,y,t)$$

в области Ω и удовлетворяет соответствующим условиям (2)-(4). Тогда для функции $u_2(x,y,t)$ при $t \in (0;T)$ верно следующее неравенство

$$\int\limits_0^t \|u_2(x,y,\tau)\|_0^2 d\tau \leqslant 4\,q(t)\Big(T\,\|u_2(x,y,0)\|_0^2 + \alpha\Big)^{1-p(t)} \times$$
$$\times\left(\int\limits_0^T \|u_2(x,y,t)\|_0^2 dt + \alpha\right)^{p(t)},$$

где

$$\alpha=(2T^2+1)\int\limits_0^T\|u_1(x,y,t)\|_0^2\,dt+2T\,\|\varphi_1\|_1^2+\|\varphi_1\|_0^2+(2T+1)\,\|\varphi_2\|_0^2,$$

$$p(t)=\frac{1-e^{-2t}}{1-e^{-2T}},\ \ q(t)=\exp\left(\frac{2T+1}{2}\frac{\left(1-e^{-2t}\right)T-\left(1-e^{-2T}\right)t}{1-e^{-2T}}\right).$$

Доказательство. Согласно (7) имеем

$$\|u_2(x,y,t)\|_0^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\left|u_{2k,l}^{(1)}(t)\right|^2+\left|u_{2k,l}^{(4)}(t)\right|^2\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\left|u_{2k,l}^{(2)}(t)\right|^2+\left|u_{2k,l}^{(3)}(t)\right|^2\right).$$

Рассмотрим норму

$$\|\varphi(x,y)\|_1^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\lambda_{k,l}^{(1)}\left(\varphi_{k,l}^{(1)}\right)^2+\left|\lambda_{k,l}^{(4)}\right|\left(\varphi_{k,l}^{(4)}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left|\lambda_{k,l}^{(2)}\right|\left(\varphi_{k,l}^{(2)}\right)^2+\left|\lambda_{k,l}^{(3)}\right|\left(\varphi_{k,l}^{(3)}\right)^2\right).$$

Согласно Леммы 3 для функций $u_{2k,l}^{(j)}(t)\in W_2^2(0;T),(j=\overline{1,4})$ при каждом фиксированном $k,l\in N$ верны неравенства

$$\int\limits_0^t\left(u_{2k,l}^{(j)}(\tau)\right)^2d\tau\leqslant q(t)\left(T\left(\varphi_{1k,l}^{(j)}\right)^2+\alpha_{k,l}^{(j)}\right)^{1-p(t)}\times$$
$$\times\left(\int\limits_0^T\left(u_{2k,l}^{(j)}(t)\right)^2dt+\alpha_{k,l}^{(j)}\right)^{p(t)},(j=\overline{1,4}),\tag{15}$$

где

$$\alpha_{k,l}^{(j)}=(2T^2+1)\int\limits_0^T\left(u_{1k,l}^{(j)}(t)\right)^2dt+$$
$$+2\left|\lambda_{k,l}^{(j)}\left(\varphi_{1k,l}^{(j)}\right)^2-\left(\varphi_{2k,l}^{(j)}\right)^2\right|T+2\left|\varphi_{1k,l}^{(j)}\varphi_{2k,l}^{(j)}\right|,(j=\overline{1,4}).\tag{16}$$

Заметим, что из (16) легко вывести неравенства

$$\alpha_{k,l}^{(j)}\leqslant(2T^2+1)\int\limits_0^T\left(u_{1k,l}^{(j)}(t)\right)^2dt+(2T\lambda_{k,l}^{(j)}+1)\left(\varphi_{1k,l}^{(j)}\right)^2+(2T+1)\left(\varphi_{2k,l}^{(j)}\right)^2,(j=\overline{1,4}).$$

Суммируем неравенства (15) по k, l , $(k, l \in N)$ и с учетом неравенства Гельдера получим

$$\int\limits_0^t \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left| u_{2k,l}^{(1)}(\tau) \right|^2 + \left| u_{2k,l}^{(4)}(\tau) \right|^2 \right\} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1,}^{\infty} \left\{ \left| u_{2k,l}^{(2)}(\tau) \right|^2 + \left| u_{2k,l}^{(3)}(\tau) \right|^2 \right\} \right) d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 4q(t) \left(T \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left| u_{2k,l}^{(1)}(0) \right|^2 + \left| u_{2k,l}^{(4)}(0) \right|^2 \right\} + \right.$$

$$\left. + T \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left| u_{2k,l}^{(2)}(0) \right|^2 + \left| u_{2k,l}^{(3)}(0) \right|^2 \right\} + \alpha \right)^{1-p(t)} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^T \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left| u_{2k,l}^{(1)}(t) \right|^2 + \left| u_{2k,l}^{(4)}(t) \right|^2 \right\} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left| u_{2k,l}^{(2)}(t) \right|^2 + \left| u_{2k,l}^{(3)}(t) \right|^2 \right\} \right) dt + \alpha \right)^{p(t)}$$

или

$$\int\limits_0^t \|u_2(x,y,\tau)\|_0^2 d\tau \leqslant 4q(t) \Big(T \|u_2(x,y,0)\|_0^2 + \alpha \Big)^{1-p(t)} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^T \|u_2(x,y,t)\|_0^2 dt + \alpha \right)^{p(t)}.$$

Лемма 4 доказана. □

4. Единственность и условная устойчивость

Теорема 1. *Пусть решение задачи (1)-(4) существует и* $(u_1(x,y,t), u_2(x,y,t)) \in M$. *Тогда решение задачи(1)-(4) единственно.*

Доказательство. Пусть пары функций $(u_{1,1}(x,y,t), u_{1,2}(x,y,t))$, $(u_{2,1}(x,y,t), u_{2,2}(x,y,t))$ являются решениями задачи (1)-(4). Введем обозначение $U_1(x,y,t) = u_{1,1}(x,y,t) - u_{1,2}(x,y,t)$ и $U_2(x,y,t) = u_{2,1}(x,y,t) - u_{2,2}(x,y,t)$, тогда пара функций $(U_1(x,y,t), U_2(x,y,t))$ удовлетворяет условиям задачи (1)-(4) с $U_1(x,y,0) = 0$, $U_2(x,y,0) = 0$. Согласно лемме 2 и лемме 4 имеем $\|U_1(x,y,t)\|_0 = 0$ и$\|U_2(x,y,t)\|_0 = 0$. Отсюда при любых $(x,y,t) \in \Omega$ выполняются $u_{1,1}(x,y,t) \equiv u_{1,2}(x,y,t), u_{2,1}(x,y,t) \equiv u_{2,2}(x,y,t)$. Теорема 1 доказана. □

Пусть $U_{1\varepsilon}(x,y,t) = u_1(x,y,t) - u_{1\varepsilon}(x,y,t)$, $U_{2\varepsilon}(x,y,t) = u_2(x,y,t) - u_{2\varepsilon}(x,y,t)$, где пара функций $(u_1(x,y,t), u_2(x,y,t))$ является решением задачи (1)-(4) с точными данными, а пара функций $(u_{1\varepsilon}(x,y,t), u_{2\varepsilon}(x,y,t))$ решением задачи (1)-(4) с приближенными данными.

Теорема 2. *Пусть* $(u_1(x,y,t), u_2(x,y,t)) \in M$, $(u_{1\varepsilon}(x,y,t), u_{2\varepsilon}(x,y,t)) \in M$ *и* $\|\varphi_i(x,y) - \varphi_{i\varepsilon}(x,y)\|_0 \leq \varepsilon$, $\|\varphi_i(x,y) - \varphi_{i\varepsilon}(x,y)\|_1 \leq \varepsilon, (i = \overline{1,2})$, $\|\psi(x,y) - \psi_\varepsilon(x,y)\|_0 \leq \varepsilon$, $\|f(x,y,t) - f_\varepsilon(x,y,t)\|_0 \leq \varepsilon$. *Тогда для* $(U_{1\varepsilon}(x,y,t), U_{2\varepsilon}(x,y,t))$ *при любым* $t \in (0;T)$ *верна оценка*

$$\|U_{1\varepsilon}(x,y,t)\|_0 \leq 2\Big(\varepsilon + \varepsilon\sqrt{T}\Big)^{1-\frac{t}{T}} \cdot \Big(2m + \sqrt{T}\varepsilon\Big)^{\frac{t}{T}} + \varepsilon\sqrt{T},$$

$$\int\limits_0^t \|U_{2\varepsilon}(x,y,\tau)\|_0^2 d\tau \leq 4q(t)\big\{T\varepsilon^2 + \alpha_\varepsilon\big\}^{1-p(t)}\big\{4m^2 + \alpha_\varepsilon\big\}^{p(t)},$$

где

$$\alpha_\varepsilon = (2T^2+1)\int\limits_0^T \left(2\Big(\varepsilon + \varepsilon\sqrt{T}\Big)^{1-\frac{t}{T}} \cdot \Big(2m + \sqrt{T}\varepsilon\Big)^{\frac{t}{T}} + \varepsilon\sqrt{T}\right)^2 dt + (4T+2)\,\varepsilon^2.$$

Доказательство. Пусть пара функций $(U_{1\varepsilon}(x,y,t), U_{2\varepsilon}(x,y,t))$ в Ω удовлетворяет условиям (2)-(4) , где

$$U_{1\varepsilon}(x,y,0) = \psi(x,y) - \psi_\varepsilon(x,y),$$
$$U_{2\varepsilon}(x,y,0) = \varphi_1(x,y) - \varphi_{1\varepsilon}(x,y),$$
$$U_{2\varepsilon t}(x,y,0) = \varphi_2(x,y) - \varphi_{2\varepsilon}(x,y),\ (x,y) \in [-1;1].$$

Согласно Теореме 2

$$\|U_{1\varepsilon}(x,y,0)\|_0 = \|\psi(x,y) - \psi_\varepsilon(x,y)\|_0 \leqslant \varepsilon,$$
$$\|U_{2\varepsilon}(x,y,0)\|_0 = \|\varphi_1(x,y) - \varphi_{1\varepsilon}(x,y)\|_0 \leqslant \varepsilon,$$
$$\|U_{2\varepsilon t}(x,y,0)\|_0 = \|\varphi_2(x,y) - \varphi_{2\varepsilon}(x,y)\|_0 \leqslant \varepsilon,$$
$$\|U_{1\varepsilon}(x,y,T)\|_0 \leqslant 2m,$$
$$\int\limits_0^T \|U_{2\varepsilon}(x,y,t)\|_0^2\, dt \leq 4m^2,$$

окончательно имеем

$$\|U_{1\varepsilon}(x,y,t)\|_0 \leqslant 2\Big(\varepsilon + \varepsilon\sqrt{T}\Big)^{1-\frac{t}{T}} \cdot \Big(2m + \sqrt{T}\varepsilon\Big)^{\frac{t}{T}} + \varepsilon\sqrt{T},$$

$$\int\limits_0^t \|U_{2\varepsilon}(x,y,\tau)\|_0^2 d\tau \leqslant 4q(t)\big\{T\varepsilon^2 + \alpha_\varepsilon\big\}^{1-p(t)}\big\{4m^2 + \alpha_\varepsilon\big\}^{p(t)}.$$

Теорема 2 доказана. □

References

[1] A.A. Gimaltdinova, *Dirichlet problem for a mixed type equation with two perpendicular transition lines in a rectangular area*, Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, **19**:4 (2015), 634–649. Zbl 1413.35329

[2] A.G. Kuzmin, *Nonclassical equations of mixed type and their applications to gas dynamics*, Izdatel'stvo Leningradskogo Universiteta, Leningrad, 1990. Zbl 0745.35026

[3] A.I. Kozhanov, *Composite Type Equations and Inverse Problems*, Inverse and Ill-Posed Problems Series. Utrecht: VSP, 1999. Zbl 0969.35002

[4] A.L. Bukhgeim, *Ill-posed problems, number theory and imaging*, Sib. Math. J., **33**:3 (1992), 389–402. Zbl 0787.34020

[5] A.M. Nakhushev, *Equations of mathematical biology*, Vyssh. Shkola, Moscva, 1995. Zbl 0991.35500

[6] V.N. Vragov, *On the theory of boundary value problems for equations of mixed type in the space*, Diff. equations, **13**:6 (1977), 1098–1105. MR0481610, Zbl 0358.35053

[7] F.I. Frankl, *Selected Works on Gas Dynamics*, Nauka, Moscow, 1973. MR0392454

[8] H.A. Levine, *Logarithmic convexity, first order differential inequalities and some applications*, Tranc. of AMS, **152** (1970), 299–320. Zbl 0212.12001

[9] K.B. Sabitov, *On the theory of the Frankl problem for equations of mixed type*, Izv. Math., **81**:1 (2017), 99–136. Zbl 1367.35095

[10] K.S. Fayazov, I.O. Khazhiev, *Conditional stability of a boundary value problem for a system abstract differential equations of the second order with operator coefficients*, Uzbek Mathematical Journal, **2017**:2 (2017), 145–155.

[11] K.S. Fayazov, I.O. Khazhiev, *An incorrect initial-boundary value problem for a system of equations of parabolic type with a changing time direction*, Computational technologies, RAS, **2017**:3 (2017), 103–114.

[12] K.S. Fayazov, I.O. Khazhiev, *The conditional correctness of a boundary value problem for a composite fourth order differential equation*, Russ. Math., **59**:4 (2015), 54–62. Zbl 06468685

[13] K.S. Fayazov, Y.K. Khudayberganov, *Ill-posed boundary value problem for a mixed type equation with two degenerate lines*, Uzbek Mathematical Journal, **2018**:2 (2018), 32–42.

[14] K.S. Fayazov, Y.K. Khudayberganov, *Ill-posed boundary-value problem for a system of partial differential equations with two degenerate lines*, Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, **12**:3 (2019), 392–401.

[15] L. Bers, *Mathematical problems of subsonic and transonic gas dynamics*, IL, Moscow, 1961. (John Wiley & Sons, New York, 1958.) Zbl 0083.20501

[16] S.G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach space*, Nauka, Moscow, 1967. MR0247239, Zbl 0172.41903

[17] S.G. Pyatkov, *Solvability of boundary value problems for a second-order equation of mixed type*, Nonclassical partial differential equations, Collect. Sci. Works, Novosibirsk, (1988), 77–90. Zbl 0825.35083

[18] S.G. Pyatkov, *Properties of Eigen functions of a certain spectral problem and their applications*, Some Applications of Functional Analysis to Equations of Mathematical Physics, Inst. Mat., Novosibirsk, (1986), 65–84 (In Russian).

[19] M.M. Lavrent'ev, L.Y. Saveliev, *Theory of operators and ill-posed problems*, 2 nd ed., Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2010. (VSP, Leiden, 2006, MR2224438)

[20] M.M. Lavrent'ev, *Conditionally well-posed problems for differential equations*, NGU, Novosibirsk, 1973. (In Russian).

[21] N.A. Larkin, V.A. Novikov, N.N. Yanenko, *Nonlinear Equations of Variable Type*, Nauka, Novosibirsk, 1983. Zbl 0553.35001

Kudratillo Sadridinovich Fayazov
Turin Polytechnic University in Tashkent,
17, Kichik Khalka Yuli str.,
Tashkent, 100195, Uzbekistan
E-mail address: kudratillo52@mail.ru

Khudayberganov Yashin Kamilovich
National University of Uzbekistan,
4, Universitet str.,
Tashkent, 100174, Uzbekistan
E-mail address: Komilyashin89@mail.ru