S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 769–776 (2020) УДК 515.162
DOI 10.33048/semi.2020.17.055 MSC 57M15

ИЗОТОПИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГРАФОВ

В.М. НЕЖИНСКИЙ

Abstract. We reduce the problem of isotopy classification of spatial framed graphs equipped with an additional structure – a skeleton and a marked point, to the classical problem of isotopy classification of tangles.

Keywords: spatial graph, skeleton, tangle, isotopy.

1. Введение

1.1. Объект изучения.

1.1.1. *Пространственный оснащённый граф.* Возьмём какое-нибудь гладкое двухмерноеподмногообразие пространства $\mathbb{R}^3$. Мы будем говорить, что это подмногообразие *снабжено структурой оснащённого графа,* если задано разбиение его на ручки, обладающее следующими свойстваими:
(i) число ручек конечно;
(ii) все ручки являются только ручками индексов нуль (то есть "дисками") или один (то есть "лентами");
(iii) ручки индекса нуль попарно не пересекаются, ручки индекса один попарно не пересекаются, ручки разных индексов пересекаются только по своим краям, при этом каждая ручка индекса один пересекается с объединением всех ручек индекса нуль по двум попарно не пересекающимся дугам.
Ясно, что *гладкое двухмерное подмногообразие пространства* $\mathbb{R}^3$ *может быть снабжено структурой оснащённого графа тогда и только тогда, когда оно компактно*, и что *эта структура не единственна.*

Nezhinskij, V.M., Isotopy invariants of spatial graphs.

Поступила 7 мая 2020 г., опубликована 10 июня 2020 г.

Подмногообразие, снабженное структурой оснащённого графа, мы будем называть *пространственным оснащённым графом*, само подмногообразие – *носителем* пространственного оснащённого графа, ручки индексов нуль – *оснащёнными вершинами*, ручки индексов один – *оснащёнными рёбрами.*

1.1.2. *Остов.* Пространственный оснащённый граф, носитель которого связен и односвязен, мы будем называть также *(пространственным оснащённым) деревом.* Для любого пространственного оснащённого графа его *подграфом* называется пространственный оснащённый граф, состоящий из каких-нибудь его (целых) ручек. *Остовом* пространственного оснащённого графа мы будем называть (какой-нибудь) его связный подграф, содержащий все его оснащённые вершины и являющийся деревом. Нетрудно видеть, что *пространственный оснащённый граф имеет остов тогда и только тогда, когда он связен.* (Замечу, что связные пространственные оснащённые графы, не являющиеся деревьями, имеют, как правило, несколько остовов.)

В этой работе мы ограничимся рассмотрением только *связных* пространственных оснащённых графов, так что все рассматриваемые ниже пространственные оснащённые графы остовы имеют.

1.1.3. *Отмеченная точка.* Пусть заданы пространственный оснащённый граф и его остов. Возьмём какие-нибудь оснащённое ребро, не содержащееся в остове, и пересекающуюся с ним оснащённую вершину. Выберем какую-нибудь дугу, по которой они пересекаются. В качестве *отмеченной точки* мы возьмём какую-нибудь точку, принадлежащую внутренности этой дуги.

1.1.4. *Полное оснащение.* Назовём пространственный оснащённый граф *пространственным полностью оснащённым графом*, если фиксированы какой-нибудь его остов и какая-нибудь отмеченная точка, выбранная, как в 1.1.3.

1.1.5. *Объект изучения.* Назовём пространственный оснащённый граф *ориентированным*, если его носитель ориентирован. Ориентированные пространственные полностью оснащённые графы и есть объект нашего изучения.

1.2. **Формулировка задачи.** Два ориентированных пространственных полностью оснащённых графа называются *изотопными*, если существует гладкая изотопия пространства $\mathbb{R}^3$, отображающая с сохранением ориентаций и с сохранением разбиений на ручки первый ориентированный пространственный полностью оснащённый граф на второй, остов первого графа на остов второго, отмеченную точку первого графа в отмеченную точку второго.

Наша задача – расклассифицировать ориентированные пространственные полностью оснащённые графы с точностью до изотопии.

1.3. **Исторические замечания.** Пространственные оснащённые графы – объекты не новые; они изучались, например, в работах [1, 5, 7]. Структура полного оснащения, насколько известно автору, ранее не определялась и не изучалась.

Результаты этой работы были анонсированы в [4].

2. Основные инварианты

2.1. **Лемма, нужная для определения основных инвариантов.** Через D^2 мы будем обозначать замкнутый круг с центром в точке (0,0) радиуса единица, расположенный в плоскости $\mathbb{R}^2$, через S^1 его граничную окружность, через D^3 замкнутый шар, расположенный в пространстве $\mathbb{R}^3$ с центром в точке (0,0,0) радиуса единица и через S^2 его граничную сферу. Далее, мы будем считать, что окружность S^1, круг D^2, сфера S^2 и шар D^3 стандартно ориентированы. Наконец, мы будем отождествлять плоскость $\mathbb{R}^2$ с подпространством $\mathbb{R}^2 \times 0$ пространства $\mathbb{R}^3$, круг D^2 с экватором шара D^3 и окружность S^1 с экватором сферы S^2.

Возьмём пространственный оснащённый граф. Заметим, что край любого его оснащённого ребра является объединением четырёх попарно не пересекающихся дуг: две дуги – это дуги, по которым оснащённое ребро пересекает объединение всех оснащённых вершин; остальные две – дополнения объединения этих дуг. Возьмём какое-нибудь оснащённое ребро этого пространственного оснащённого графа. Рассмотрим в этом оснащённом ребре какую-нибудь простую гладкую кривую, пересекающую его край только по своим концам, пересекающую трансверсально, разные концы кривой принадлежат внутренностям разных дуг; назовём эту кривую *осью* ручки, если её концы принадлежат внутренностям первых двух дуг, и назовём её *меридианом* ручки, если её концы принадлежат двум другим (открытым) дугам.

Для любого натурального числа n и любого целого числа i положим

$$v_{n,i} = (\cos\frac{2\pi(i-1)}{n},\ \sin\frac{2\pi(i-1)}{n}, 0).$$

Ясно, что: все точки $v_{n,i}$ лежат на окружности S^1; точки $v_{n,1}, v_{n,2}, \ldots, v_{n,n}$ попарно различны; для любых натуральных чисел n и m имеет место равенство $v_{n,1} = v_{m,1}$.

Рассмотрим ориентированный пространственный полностью оснащённый граф. В каждом оснащённом ребре, содержащемся в остове этого пространственного оснащённого графа, выберем какой-нибудь меридиан, и в каждом оснащённом ребре, не содержащемся в остове, выберем какую-нибудь ось; назовём ориентированный пространственный полностью оснащённый граф *специальным*, если:

(i) носителем его остова является (стандартно ориентированный) круг D^2,

(ii) точка $v_{1,1}$ является его отмеченной точкой,

(iii) точки $v_{2q,1}(= v_{1,1}), v_{2q,2}, \ldots, v_{2q,2q}$ являются всеми краевыми точками упомянутых выше меридианов и осей (где q – число оснащённых рёбер графа),

(iv) все упомянутые выше меридианы являются (метрическими) хордами круга D^2,

(v) внутренности всех упомянутых выше осей ручек содержатся в пространстве $\mathbb{R}^3 \setminus D^3$.

Лемма 1. *Любой ориентированный пространственный полностью оснащённый граф изотопен специальному ориентированному пространственному полностью оснащённому графу.*

Это простое прямое следствие двух замечаний. Во-первых, остов любого пространственного оснащённого графа диффеоморфен кругу D^2. Во-вторых, для любого ориентированного (двумерного) подмногообразия пространства $\mathbb{R}^3$, диффеоморфного кругу D^2, существует гладкая изотопия пространства $\mathbb{R}^3$, переводящая с сохранением ориентаци это подмногообразие на круг D^2. Для завершения доказательства остаётся доказать эти замечания; но первое замечание очевидно, второе – хорошо известно (см., например, [6]).

Замечу, что эта лемма является аналогом леммы 4.1.1 статьи [3].

2.2. **Комбинаторный инвариант.** Начнём с комбинаторной подготовки.

Пусть k и l – целые неотрицательные числа, такие что $k \geq 3$ и $k \geq l$. Рассмотрим последовательность $(1, 2, \ldots, k)$ и выберем из неё какую-нибудь l-членную подпоследовательность $(i_1, i_2, \ldots, i_l)$ с $i_1 = 1$. Далее, положим $m = k - l$ и обозначим через $(j_1, j_2, \ldots, j_m)$ подпоследовательность последовательности $(1, 2, \ldots, k)$, дополнительную к подпоследовательности $(i_1, i_2, \ldots, i_l)$. Наконец, предположим, что числа k и l (а потому и число m) чётные и разобъём каждую из этих подпоследовательностей на попарно непересекающиеся пары чисел. Последовательность $(1, 2, \ldots, k)$, её подпоследовательности $(i_1, i_2, \ldots, i_l)$ и $(j_1, j_2, \ldots, j_m)$ и разбиения этих подпоследовательностей на пары мы будем называть *схемой типа* (k, l), если разбиение на пары второй (m-членной) подпоследовательности обладает следующим дополнительным свойством: для любых двух пар чисел этого разбиения оба числа какой-нибудь из этих пар больше наименьшего и меньше наибольшего числа другой пары.

Определим теперь искомый инвариант.

Возьмём какой-нибудь ориентированный пространственный полностью оснащённый граф, обозначим через p число его оснащённых вершин и через q число его оснащённых рёбер. Выберем какой-нибудь специальный ориентированный пространственный полностью оснащённый граф, изотопный этому графу; что такой специальный граф найдётся – следует из леммы 1. (Заметим, что число оснащённых вершин и число оснащённых рёбер нового графа – те же, что и у исходного.) Рассмотрим последовательность точек $(v_{2q,1}, v_{2q,2}, \ldots, v_{2q,2q})$ окружности S^1 и выберем две её подпоследовательности следующим образом. Первая подпоследовательность $(v_{2q,i_1}, v_{2q,i_2}, \ldots, v_{2q,i_{2q-2p+2}})$ состоит из всех точек, являющихся концами осей оснащённых рёбер, не содержащихся в остове пространственного полностью оснащённого графа; ясно, что эта подпоследовательность начинается с точки $v_{2q,1}$. Разобъём все члены этой подпоследовательности на пары: две точки составляют пару, если они являются концами одной оси. Вторая подпоследовательность $(v_{2q,j_1}, v_{2q,j_2}, \ldots, v_{2q,j_{2p-2}})$ – дополнительная к первой. Её члены тоже разобъём на пары: две точки составляют пару, если они являются концами одного меридиана. Наш *комбинаторный инвариант пространственного полностью оснащённого ориентированного графа* – это схема типа $(2q, 2p-2)$, состоящая из: последовательности $(1, 2, \ldots, 2q)$; её подпоследовательностей $(i_1, i_2, \ldots, i_{2q-2p+2})$ и $(j_1, j_2, \ldots, j_{2p-2})$; разбиений подпоследовательностей $(i_1, i_2, \ldots, i_{2q-2p+2})$ и $(j_1, j_2, \ldots, j_{2p-2})$ на пары чисел, являющихся вторыми индексами пар точек $v_{2q,r}$, являющихся концами одной оси или одного меридиана соответственно. Что это действительно схема, то есть что для любых двух пар чисел второй подпоследовательности оба числа какой-нибудь из её пар больше наименьшего и меньше наибольшего числа другой её пары, – следует из того, что меридианы ручек, содержащихся в остове графа, то есть в диске D^2, попарно не пересекаются.

Нетрудно видеть, что имеет место лемма.

Лемма 2. *Если ориентированные пространственные полностью оснащённые графы изотопны, то их комбинаторные инварианты равны.*

2.3. **Числовые инварианты.** Возьмём ориентированный пространственный полностью оснащённый граф. Для каждого оснащённого ребра этого графа, не содержащегося в остове, построим простую замкнутую кривую, часть которой есть ось этого оснащённого ребра и оставшаяся часть содержится в остове, снабдим эту кривую какой-нибудь ориентацией и вычислим коэффициент зацепления этой кривой с кривой, полученной сдвигом её вдоль нормали с поверхности в положительном направлении. Наш *числовой инвариант ориентированного пространственного полностью оснащённого графа* и есть последовательность всех этих чисел.

Лемма 3. *Если ориентированные пространственные полностью оснащённые графы изотопны, то их числовые инварианты равны.*

Это устанавливается простой прямой проверкой.

Заметим, что определённые выше в этом подпункте числа не зависят ни от выбора отмеченной точки, ни от выбора ориентации носителя графа, ни от выбора упомянутых выше кривых и их ориентаций. Напротив, их упорядочение определяется заданием отмеченной точки и заданием ориентации носителя графа.

2.4. **Топологический инвариант.** Возьмём какой-нибудь ориентированный пространственный полностью оснащённый граф. Согласно лемме 1 существует изотопный ему специальный ориентированный пространственный полностью оснащённый граф. Удалим из пространства $\mathbb{R}^3$ внутренность шара D^3, от специального оснащённого графа оставим лишь оси ручек, не содержащихся в остове, и присоединим к пространству $\mathbb{R}^3 \setminus IntD^3$ беконечно удалённую точку. Изотопический класс полученного тенгла и есть наш *топологический инвариант исходного ориентированного пространственного полностью оснащённого графа.*

Лемма 4. *Если ориентированные пространственные полностью оснащённые графы изотопны, то их топологические инварианты равны.*

По поводу доказательства этой леммы см. ниже, параграф 4.

3. Основная теорема

Теорема 1. *Два ориентированных пространственных полностью оснащённых графа изотопны тогда и только тогда, когда их комбинаторные, числовые и топологические инварианты равны.*

Необходимость следует из лемм 2, 3 и 4. По поводу доказательства достаточности см. параграф 4.

4. Пропущенные доказательства.

В предыдущем параграфе остались недоказанными лемма 4 и достаточная часть основной теоремы. В этом параграфе будет сформулирована и доказана лемма, прямым очевидным следствием которой они являются.

Пусть даны два специальных ориентированных пространственных полностью оснащённых графа и предположим, что они изотопны. Обозначим через q

число оснащённых рёбер какого-нибудь (а, значит, и любого) из них. Изотопию первого пространственного графа на второй мы будем называть *специальной*, если в процессе изотопии шар D^3, его граничная сфера S^2, его экваториальное сечение D^2 и меридианы ручек, содержащихся в круге D^2, отображаются на себя. (Заметим, что, как следует из этого определения, при специальной изотопии точки $v_{2q,1}, v_{2q,2}, \dots, v_{2q,2q}$ остаются на месте.) Если специальная изотопия существует, то мы будем говорить, что первый специальный ориентированный пространственный полностью оснащённый граф *специально изотопен* второму.

Нетрудно видеть, что *специальная изотопность есть отношение эквивалентности.*

Лемма 5. *Если два специальных ориентированных пространственных полностью оснащённых графа изотопны, то они специально изотопны.*

Доказательство. Возьмём какие-нибудь два специальных ориентированных пространственных полностью оснащённых графа и занумеруем их числами 1 и 2. Предположим, что эти пространственные графы изотопны, и пусть

$$\phi : \mathbb{R}^3 \times I \to \mathbb{R}^3$$

– какая-нибудь изотопия первого пространственного графа на второй. Наша цель – отправляясь от этой изотопии построить изотопию *специальную*.

Сначала заменим изотопию ϕ изотопией ϕ_1, обладающей следующим дополнительным свойством:

$$\phi_1((0,0),1) = (0,0)$$

(где $(0,0) \in D^2(\subset \mathbb{R}^3)$). Для этого достаточно взять прямолинейный путь в $IntD^2$, соединяющий точку $\phi((0,0),1)$ с точкой $(0,0)$, построить изотопию круга D^2, неподвижную на его крае, отображающую в процессе изотопии меридиан каждой ручки, содержащейся в круге D^2, на себя и переводящую точку $\phi((0,0),1)$ в точку $(0,0)$ вдоль этого пути, и продолжить построенную изотопию до изотопии всего пространства $\mathbb{R}^3$, неподвижную на $\mathbb{R}^3 \setminus IntD^3$. (Существование такой изотопии очевидно и следует из теоремы Тома о продолжении изотопии.)

Наш следующий шаг состоит в замене изотопии ϕ_1 изотопией ϕ_2, такой что

$$\phi_2((0,0),t) = (0,0)$$

для любого $t \in I$. Мы полагаем $\phi_2(x,t) = \phi_1(x,t) - \phi_1((0,0),t)$ (для $x \in \mathbb{R}^3$ и $t \in I$).

Далее, построим изотопию ϕ_3 первого пространственного графа на второй, обладающую для любого $t \in I$ следующими свойствами:
(i) $\phi_3((0,0),t) = (0,0)$;
(ii) существует плоскость $R_t \subset \mathbb{R}^3$, содержащая точку $(0,0,0)$, такая что

$$\phi_3(D^2 \times t) = R_t \cap D^3$$

и что отображение

$$D^2 \times t \to R_t, \quad (x,t) \mapsto \phi_3(x,t),$$

продолжимо до (линейного) изометрического отображения плоскости $\mathbb{R}^2 \times t$ на плоскость R_t.

Поскольку изотопия, обладающая свойством (i), уже построена, существование изотопии, удовлетворяющей ещё и свойству (ii), очевидно и проверяется стандартно (ср., например, [2, глава 4, доказательство теоремы 5.3]).

Обозначим через ϕ_4 изотопию, обладающую для любого $t \in I$, помимо свойств (i)–(ii) (с заменой ϕ_3 на ϕ_4), ещё и свойством:
(iii) $\phi_4(D^3 \times t) = D^3$, отображение

$$D^3 \times t \to \mathbb{R}^3, \quad (x,t) \mapsto \phi_4(x,t),$$

продолжимо до сохраняющего ориентацию ортогонального преобразования пространства $\mathbb{R}^3$.
Что такая изотопия существует – очевидно.

Простые стандартные рассуждения показывают, что изотопию ϕ_4 можно „подправить“ так, чтобы новая изотопия ϕ_5 обладала следующими дополнительными свойствами:

$$\phi_5(x,t) = x \quad \text{при } t \in [0,1/4),$$
$$\phi_5(x,t) = \phi_4(x,1) \quad \text{при } t \in (3/4,1]$$

для $x \in \mathbb{R}^3$.

Зададим отображение

$$\psi : \mathbb{R}^3 \times I \to \mathbb{R}^3$$

свойствами:
(a) $\psi(x,t) = \phi_5(x,t)$ при $x \in D^3$ и $t \in I$;
(b) для любого $t \in I$ отображение

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \psi(x,t)$$

является (сохраняющим ориентацию) ортогональным преобразованием.
Что отображение ψ свойствами (a) и (b) определяется корректно и определяется однозначно – очевидно. Заметим, что, как показывает прямая простая проверка, отображение ψ обладает ещё следующими свойствами:
(i) оно является изотопией второго пространственного графа на себя;
(ii) для любых $x \in \mathbb{R}^3$ и $t \in [0,1/4) \cup (3/4,1]$ имеет место равенство $\psi(x,t) = x$.

Определим отображение

$$\phi_6 : \mathbb{R}^3 \times I \to \mathbb{R}^3$$

формулой

$$\phi_6(x,t) = \begin{cases} \phi_5(x,2t) & \text{при } 0 \le t \le 1/2, \\ \psi(\phi_5(x,1), 2-2t) & \text{при } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

(для $x \in \mathbb{R}^3$). Простая прямая проверка показывает, что отображение ϕ_6 является изотопией первого пространственного графа на второй.

Теперь „подправим“ изотопию ϕ_6 до изотопии ϕ_7, такой что

$$\phi_7((0,0),t) = (0,0),$$
$$\phi_7(D^2 \times t) = D^2$$

и что

$$\phi_7(x,t) = x \quad \text{при} \quad x \in S^2$$

(для любого $t \in I$).
Это сделать можно, поскольку, как нетрудно видеть, препятствие к искомой

правке изотопии лежит в группе $\pi_1(SO_3)$, а изотопия ϕ_6 была определена так (см. предыдущий абзац), что это препятствие равно нулю.

Наконец, из изотопии ϕ_7 получим искомую изотопию, заменив на круге D^2 изотопию на неподвижную и продолжив эту изотопию до специальной изотопии первого пространственного графа на второй.

□

Замечу, что наша лемма 5 является аналогом леммы 4.1.2 работы [3] и что схема доказательства та же.

References

[1] M.N. Gusarov, *Variations of knotted graphs. The geometric technique of n-equivalence*, Algebra i Analiz, **12**:4 (2000), 79–125; St. Petersburg Math. J., **12**:4 (2001), 569–604. Zbl 0981.57006

[2] M.W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate texts in Mathematics, **33**, Springer-Verlag, 1976. Zbl 0356.57001

[3] V.M. Nezhinskij, *Spatial graphs, tangles and plane trees*, Algebra i Analiz, **31**:6 (2019), 197-207.

[4] V.M. Nezhinskij, *Isotopy invariants of spatial framed graphs*, V sbornike: Nekotorije aktual'nije problemi sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovanija. Herzenovskije chtenja - 2020. Materiali nauchnoj konferencii, (2020), in print.

[5] V.M. Nezhinskij, Yu.V. Maslova, *Framings of spatial graphs*, J. Math. Sci., **236**: 5 (2019), 527-531.

[6] R.S. Palais, *Extending diffeomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc., **11** (1960), 274-277. Zbl 0095.16502

[7] Turaev V.G., *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, de Gruyter Studies in Mathematics, 18, Walter de Gruyter, Berlin, 1994. Zbl 0812.57003

Vladimir Mikhajlovich Nezhinskij
St.-Petersburg State University,
7-9, Universitetskaja nab.,
St.-Petersburg, 199034, Russia
Herzen State Pedagogical University of Russia,
48, nab. r. Mojki,
St.-Petersburg, 191186, Russia
E-mail address: iiinezhin@pdmi.ras.ru