

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 18, №1, стр. 27–42 (2021)

DOI 10.33048/semi.2021.18.003

УДК 519.17

MSC 05C25

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ГРАФОВ:
ГРАФЫ БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

А.А. МАХНЕВ, И.Н. БЕЛОУСОВ, Д.В. ПАДУЧИХ

ABSTRACT. Graph Γ_i for a distance-regular graph Γ of diameter 3 can be strongly regular for $i = 2$ or $i = 3$. Finding intersection array of graph Γ by the parameters of Γ_i is an inverse problem. Earlier direct and inverse problems have been solved by A.A. Makhnev, M.S. Nirova for $i = 3$ and by A.A. Makhnev and D.V. Paduchikh for $i = 2$. In this work it is considered the case when graph Γ_3 is strongly regular without triangles and $v \leq 100000$.

Keywords: distance regular graph, strongly regular graph without triangles.

ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a . Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a* и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Множество вершин графа Γ будем обозначать $V(\Gamma)$, а через $\bar{\Gamma}$ обозначим дополнение графа Γ .

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении

МАХНЕВ, А.А., БЕЛОУСОВ, И.Н., ПАДУЧИХ, Д.В., INVERSE PROBLEMS OF GRAPH THEORY: GRAPHS WITHOUT TRIANGLES.

© 2021 МАХНЕВ А.А., БЕЛОУСОВ И.Н., ПАДУЧИХ Д.В.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и ГФЕН Китая в рамках научного проекта № 20-51-53013.

Поступила 2 марта 2020 г., опубликована 21 января 2021 г.

$\Gamma_{i-1}(u)$ с $[w]$. Граф диаметра d называется *дистанционно регулярным* с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i (см. [1]). Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Далее, через $p_{i,j}^l(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y , находящихся на расстоянии l в графе Γ . В дистанционно регулярном графе Γ числа $p_{i,j}^l(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y , обозначаются $p_{i,j}^l$ и называются *числами пересечений* графа Γ (см. [1]). *Графом Тэйлора* называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$. *Сильно регулярным* графом с параметрами (v, k, λ, μ) называется регулярный граф степени k на v вершинах, в котором для двух различных вершин a, b выполнено

$$|V([a] \cap [b])| = \begin{cases} \lambda, & \text{при } a \in [b], \\ \mu, & \text{при } a \notin [b]. \end{cases}$$

Очевидно, что сильно регулярный граф с $\mu \neq 0$ является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{k, k - \lambda - 1; 1, \mu\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d . Для $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u, w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u, w) = i$. Граф $\Gamma_{i,j}$ определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u, w смежны в $\Gamma_{i,j}$ тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u, w) \in \{i, j\}$.

Алгеброй Бозе-Меснера M дистанционно регулярного графа Γ с собственными значениями $\theta_0 > \theta_1 > \dots > \theta_d$ называется вещественная матричная алгебра с базисом $\{A_i \mid i = 0, \dots, D\}$, где A_i — матрица смежности графа Γ_i при $i \in \{1, \dots, 10\}$ и A_0 — единичная матрица порядка $|V(\Gamma)|$. Алгебра M имеет и другой базис, состоящий из примитивных идемпотентов $\{E_0 = \frac{1}{v}J, E_1, \dots, E_D\}$, где $v = |V(\Gamma)|$ и E_i — ортогональная проекция на собственное подпространство отвечающее собственному значению θ_i . Матрица перехода P от базиса (A_0, A_1, \dots, A_D) к базису (E_0, E_1, \dots, E_D) называется *матрицей собственных значений* графа Γ . Дистанционно регулярный граф называется *формально самодуальным*, если для его матрицы собственных значений выполняется равенство $P^2 = |V(\Gamma)|A_0$.

Относительно покомпонентного умножения \circ выполняются равенства $E_i \circ E_j = \frac{1}{v} \sum_{k=0}^D q_{ij}^k E_k$. Числа q_{ij}^k называются *параметрами Крейна* и являются неотрицательными числами [1, теорема 2.3.2]. Граф Γ называется *Q-полиномиальным*, если существует упорядочение примитивных идемпотентов $E_0 = \frac{1}{v}J, E_1, \dots, E_D$, такое, что $q_{ij}^k = 0$ при $|j - k| > 1$.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α -частичной геометрией порядка (s, t)* , если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a , не лежащей на прямой L , найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s, t)$).

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$,

$k = s(t + 1)$, $\lambda = (s - 1) + (\alpha - 1)t$, $\mu = \alpha(t + 1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры, называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, t)$.

Прямой задачей в теории дистанционно регулярных графов является нахождение параметров симметричной структуры, отвечающей графу с данным массивом пересечений, по этому массиву. Обратной задачей является восстановление массива пересечений дистанционно регулярного графа по параметрам отвечающей ему симметричной структуры.

Например, в графе Тэйлора, содержащем треугольник, окрестность каждой вершины является сильно регулярным графом с $k = 2\mu$. Обратное, данному сильно регулярному графу Δ с параметрами (v, k, λ, μ) и $k = 2\mu$ отвечает граф Тэйлора с массивом пересечений $\{v, v - k - 1, 1; 1, v - k - 1, v\}$, в котором окрестность некоторой вершины изоморфна Δ . В этом случае прямая и обратная задачи имеют решение.

Обратная задача для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 с сильно регулярным графом Γ_3 решалась в [3]. Заметим, что в этом случае Γ имеет собственное значение равное -1 [1, предложение 4.2.17]. В [3, лемма 3] показано, что в дистанционно регулярном графе Γ диаметра 3 с собственным значением -1 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(b_0, b_1/c_2)$. Обратное для графа $\bar{\Gamma}_3$, являющегося псевдогеометрическим для $pG_\alpha(b_0, t)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{b_0, tc_2, b_0 - \alpha + 1; 1, c_2, \alpha\}$.

В настоящей работе обратная задача теории графов уточняется для графа Γ с сильно регулярным графом Γ_3 , не имеющем треугольников.

Предложение 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 и граф Γ_3 является сильно регулярным графом без треугольников. Тогда Γ_3 — граф с параметрами $(v, k, 0, \mu)$, неглавными собственными значениями r , $-(\mu + r)$, причем $k = (r + 1)\mu + r^2$, $r \neq 1$ и Γ имеет массив пересечений $\{(\mu + r - 1)k/\mu, c_2r, \mu + r; 1, c_2, (\mu + r - 1)(k/\mu - 1)\}$.

Основной результат статьи

Теорема 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 и Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников с параметрами $(v, (r+1)\mu+r^2, 0, \mu)$, $v \leq 100000$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) если $\mu = 1$ или $\mu = 4$, то граф не существует;
- (2) если $\mu = 2$, то Γ имеет массив пересечений $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$;
- (3) если $\mu = 6$, то Γ имеет массив пересечений $\{143, 126, 12; 1, 21, 132\}$, $\{415, 390, 16; 1, 39, 400\}$, $\{1253, 1216, 22; 1, 76, 1232\}$, $\{1924, 1881, 25; 1, 99, 1900\}$, $\{3509, 3024, 30; 1, 126, 3480\}$, $\{3509, 3456, 30; 1, 144, 3480\}$.
- (4) если $\mu \notin \{1, 2, 4, 6\}$, то Γ имеет массив пересечений из таблицы 1.

В ходе доказательства теоремы 1 возникла идея описать графы, удовлетворяющие ее условиям и имеющие нецелое собственное значение.

Теорема 2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 с нецелым собственным значением и Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$ (спектр $111^1, (1 + 2\sqrt{55})^{145}, -1^{407}, (1 - 2\sqrt{55})^{145}$), $\{230, 196, 21; 1, 28, 210\}$ (спектр $230^1,$

ТАБЛИЦА 1. Дистанционно регулярные графы Γ с сильно регулярным Γ_3 без треугольников с $\mu \notin \{1, 2, 4, 6\}$ и числом вершин не большим 100000

(μ, r, c_2)	срг	дрг
(15, 6, 27)	(1458, 141, 0, 15)	{188, 162, 21; 1, 27, 168}
(14, 7, 28)	(2002, 161, 0, 14)	{230, 196, 21; 1, 28, 210}
(28, 8, 44)	(3872, 316, 0, 28)	{395, 352, 36; 1, 44, 360}
(36, 9, 54)	(5832, 441, 0, 36)	{539, 486, 45; 1, 54, 495}
(45, 10, 65)	(8450, 595, 0, 45)	{714, 650, 55; 1, 65, 660}
(16, 12, 41)	(8075, 352, 0, 16)	{594, 492, 28; 1, 41, 567}
(66, 12, 90)	(16200, 1002, 0, 66)	{1169, 1080, 78; 1, 90, 1092}
(78, 13, 104)	(21632, 1261, 0, 78)	{1455, 1352, 91; 1, 104, 1365}
(91, 14, 119)	(28322, 1561, 0, 91)	{1784, 1666, 105; 1, 119, 1680}
(120, 16, 152)	(46208, 2296, 0, 120)	{2583, 2432, 136; 1, 152, 2448}
(34, 17, 68)	(24752, 901, 0, 34)	{1325, 1156, 51; 1, 68, 1275}
(136, 17, 170)	(57800, 2737, 0, 136)	{3059, 2890, 153; 1, 170, 2907}
(153, 18, 189)	(71442, 3231, 0, 153)	{3590, 3402, 171; 1, 189, 3420}
(90, 21, 134)	(67520, 2421, 0, 90)	{2959, 2814, 111; 1, 134, 2849}
(40, 25, 105)	(70930, 1665, 0, 40)	{2664, 2625, 65; 1, 105, 2600}

$(5 + 7\sqrt{65})/2^{253}, -1^{1495}, (5 - 7\sqrt{65})/2^{253}, \{335, 297, 21; 1, 33, 315\}$ (спектр $335^1, (2 + 3\sqrt{111})^{536}, -1^{2479}, (2 - 3\sqrt{111})^{536}$) или $\{2959, 2814, 111; 1, 134, 2849\}$. (спектр $2959^1, (5 + 2\sqrt{4431})^{5380}, -1^{56759}, (5 - 2\sqrt{4431})^{5380}$).

Среди графов из заключения теоремы 1 выделены Q -полиномиальные графы.

Следствие 1. Если граф из заключения теоремы 1 является Q -полиномиальным, то он имеет массив пересечений $\{35, 27, 6; 1, 9, 30\}, \{188, 162, 21; 1, 27, 168\}, \{395, 352, 36; 1, 44, 360\}, \{539, 486, 45; 1, 54, 495\}, \{714, 650, 55; 1, 65, 660\}, \{1169, 1080, 78; 1, 90, 1092\}, \{1455, 1352, 91; 1, 104, 1365\}, \{1784, 1666, 105; 1, 119, 1680\}, \{2583, 2432, 136; 1, 152, 2448\}, \{3059, 2890, 153; 1, 170, 2907\}, \{3590, 3402, 171; 1, 189, 3420\}$.

Интересно, что любой из перечисленных графов Γ является формально самодуальным, в частности, $q_{33}^3 = 0$, более того граф Γ_2 сильно регулярен. Следующий результат классифицирует формально самодуальные дистанционно регулярные графы Γ , для которых Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников

Следствие 2. Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{(\mu + r - 1)k/\mu, c_2r, \mu + r; 1, c_2, (\mu + r - 1)(k/\mu - 1)\}$, $k = r^2 + \mu(r + 1)$ формально самодуален тогда и только тогда, когда $\mu = r(r - 1)/2$, $c_2 = (r + 3)r/2$ и Γ имеет массив пересечений

$$\{(r^2 + 2r - 1)(r + 2)/2, (r + 3)r^2/2, (r + 1)r/2; 1, (r + 3)r/2, (r + 2)(r + 1)r/2\},$$

где r не сравнимо с 3 по модулю 4.

Графы с массивами пересечений $\{15, 8, 4; 1, 4, 12\}$ и $\{20, 10, 6; 1, 5, 15\}$ удовлетворяют условиям теоремы 1, но не существуют (в обоих случаях $q_{13}^1 < 0$).

В [7] было доказано, что дистанционно регулярный граф диаметра 3 с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3 , причем Γ_3 граф без треугольников с $\mu = 6$ имеет массив пересечений $\{(r+5)((r+3)^2-3)/6, r(r+3)(r+8)/6, r+6; 1, (r+3)(r+8)/6, r(r+5)(r+6)/6\}$, $r = 4, 6, 10, 16, 19, 24, 28, 40, 46, 52, 58, 60, 70, 79$.

По [8] графы с массивами пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$ и $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ не существуют.

1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1

Всюду далее Γ — дистанционно регулярный диаметра с Γ_3 являющимся сильно регулярным графом без треугольников. По [3, лемма 3] $\bar{\Gamma}_3$ — псевдогеометрический граф $pG_\alpha(b_0, t)$, при некоторых натуральных α, b_0, t , и Γ имеет массив пересечений $\{b_0, tc_2, b_0 - \alpha + 1; 1, c_2, \alpha\}$.

По [4, глава 8] граф Γ_3 является либо

- (1) полным двудольным графом, либо
- (2) графом с $0 < \mu < k$, имеющим собственные значения $r, -(\mu + r)$ и $k = (r+1)\mu + r^2$, причем μ делит $r^2(r^2 - 1)$, $\mu + 2r$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$.

Рассмотрим случай 1. Предположим, что Γ_3 — полный двудольный граф. Тогда $\bar{\Gamma}_3$ — объединение двух изолированных клик, противоречие с тем, что Γ_3 связный граф как псевдогеометрический для $pG_\alpha(b_0, t)$. Итак, случай 1 невозможен.

Рассмотрим случай 2. Пусть Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников с параметрами $(v, k, 0, \mu)$ и собственными значениями $k = (r+1)\mu + r^2, r, -(\mu + r)$. Тогда $\bar{\Gamma}_3$ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(b_0, r)$. Число вершин во второй окрестности вершины графа Γ_3 с одной стороны равно $k(k-1)/\mu$, с другой, равно степени графа $\bar{\Gamma}_3$, т.е. $b_0(r+1)$. Значит, $b_0 = k(\mu + r - 1)/\mu$. Далее, из равенства $\mu(\Gamma_3) = v - 2k - \lambda$ (см., например [1, теорема 1.3.1]) имеем $\alpha(r+1) = k(k-1)/\mu + k + 1 - 2k$ и $\alpha = (\mu + r - 1)(k/\mu - 1)$. Из целочисленности α следует, что μ делит $r^2(r-1)$.

Осталось показать, что $r \neq 1$. При $r = 1$ граф Γ имеет массив $\{2\mu + 1, c_2, \mu + 1; 1, c_2, \mu + 1\}$ и в силу [1, предложение 4.1.6(i)] получим $c_2 = \mu + 1$. С другой стороны, по [1, теорема 5.4.1] должно выполняться одно из неравенств: либо $\mu + 1 \geq 3c_2/2$, либо $\mu + 1 \geq c_2 + b_2$, противоречие.

Предложение 1 доказано.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1, СЛУЧАИ $\mu \in \{1, 2, 4, 6\}$

По предложению 1 Γ имеет массив пересечений $\{(\mu + r - 1)k/\mu, c_2r, \mu + r; 1, c_2, (\mu + r - 1)(k/\mu - 1)\}$, Γ_3 — сильно регулярный граф с параметрами $(v, k, 0, \mu)$, где $v = 1 + k + k(k-1)/\mu$, $k = (r+1)\mu + r^2$, μ делит $r^2(r-1)$, где $r > 1$ — наибольшее неглавное собственное значение графа Γ_3 .

Для дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{b_0, b_1, b_2; c_1, c_2, c_3\}$ через L_1 обозначим трехдиагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_2 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_3 & a_3 \end{pmatrix},$$

и через $(u_0(\theta_j) = 1, u_1(\theta_j) = \frac{\theta_j}{b_0}, u_2(\theta_j), u_3(\theta_j))^T$ — правый собственный вектор, отвечающий собственному значению θ_j матрицы L_1 . Заметим, что по [1, 4.1B]

собственные значения графа Γ совпадают с собственными значениями матрицы L_1 . Из [1, теорема 4.1.4 (Биггс)] кратности собственных значений графа Γ вычисляются по формуле

$$(1) \quad m_j = \frac{v}{\sum_{i=0}^3 k_i u_i(\theta_j)^2},$$

где $k_i = k_{i-1} b_{i-1} / c_i$ — число вершин в i -ой окрестности вершины и $v = k_0 + k_1 + k_2 + k_3$ — число вершин графа.

Используя формулу (1) получаем кратности неглавных собственных значений графа Γ :

$$(2) \quad m_{1,3} = \frac{2(\mu r + r^2 + 2\mu + r)(\mu r + r^2 + \mu - r)(\mu r + r^2 + \mu)(\mu + r - 1)r}{f_1 \pm \sqrt{z}f_2},$$

$$(3) \quad m_2 = \frac{(\mu r + r^2 + 2\mu + r)(\mu r + r^2 + \mu)(\mu + r - 1)}{(\mu + 2r)\mu},$$

где

$$f_1 = c_2^2 \mu^2 r^3 - 2c_2 \mu^3 r^3 + \mu^4 r^3 - 4c_2 \mu^2 r^4 + 4\mu^3 r^4 - 2c_2 \mu r^5 + 6\mu^2 r^5 + 4\mu r^6 + r^7 + 3c_2^2 \mu^2 r^2 - 6c_2 \mu^3 r^2 + 3\mu^4 r^2 - 8c_2 \mu^2 r^3 + 8\mu^3 r^3 - 2c_2 \mu r^4 + 6\mu^2 r^4 - r^6 + 3c_2^2 \mu^2 r - 2c_2 \mu^3 r + 3\mu^4 r + 4c_2 \mu^2 r^2 + 4\mu^3 r^2 + 2c_2 \mu r^3 - 2\mu^2 r^3 - 4\mu r^4 - r^5 + c_2^2 \mu^2 + 2c_2 \mu^3 + \mu^4 + 8c_2 \mu^2 r + 2c_2 \mu r^2 - 2\mu^2 r^2 + r^4,$$

$$f_2 = c_2 \mu r^2 - \mu^2 r^2 - 2\mu r^3 - r^4 + 2c_2 \mu r - 2\mu^2 r - 2\mu r^2 + c_2 \mu + \mu^2 + 4\mu r + r^2,$$

$$z = c_2^2 \mu^2 r^2 - 2c_2 \mu^3 r^2 + \mu^4 r^2 - 4c_2 \mu^2 r^3 + 4\mu^3 r^3 - 2c_2 \mu r^4 + 6\mu^2 r^4 + 4\mu r^5 + r^6 + 2c_2^2 \mu^2 r - 4c_2 \mu^3 r + 2\mu^4 r - 4c_2 \mu^2 r^2 + 4\mu^3 r^2 - 4\mu r^4 - 2r^5 + c_2^2 \mu^2 + 2c_2 \mu^3 + \mu^4 + 8c_2 \mu^2 r + 2c_2 \mu r^2 - 2\mu^2 r^2 + r^4.$$

Лемма 2.1. *Параметр μ не равен 1.*

Доказательство. Пусть μ равно 1. Тогда $k = r^2 + r + 1$. С другой стороны Γ_3 — граф Мура диаметра 2 и $k \in \{2, 3, 7, 57\}$ (см., например, [1, теорема 6.7.1]). Отсюда $r \in \{2, 7\}$.

Пусть $r = 2$. Тогда Γ_3 — граф Хофмана-Синглтона, $v = 50$ и $k = 7$. Отсюда $\bar{\Gamma}_3$ — псевдогеометрический граф для $pG_{12}(14, 2)$ и Γ имеет массив пересечений $\{14, 2c_2, 3; 1, c_2, 12\}$. Из целочисленности кратности m_1 следует, что $c_2 = 5$ и Γ имеет массив пересечений $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$. Противоречие с [1, теорема 4.1.5] для $i = j = 3$.

Если Γ — граф с параметрами $(3250, 57, 0, 1)$, то $\bar{\Gamma}_3$ — псевдогеометрический граф для $pG_{392}(399, 7)$ и Γ имеет массив пересечений $\{399, 7c_2, 8; 1, c_2, 392\}$. Противоречие с [1, лемма 4.3.1], а именно, $k_3 a_3 = 57 \cdot 7$ — нечетное число. \square

В леммах 2.2–2.4 предполагается, что число v вершин в графе Γ не превосходит 100000.

Лемма 2.2. *Если $\mu = 2$, то Γ имеет массив пересечений $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$.*

Доказательство. Если $\mu = 2$, то $k = (r + 1)^2 + 1$ и Γ имеет массив пересечений $\{(r + 1)k/2, c_2 r, 2 + r; 1, c_2, (r + 1)(k/2 - 1)\}$. Тогда неглавные собственные значения равны $\theta_1 = r^3/4 - (c_2 - 2)r/2 + 3r^2/4 - c_2/2 + z/4$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = r^3/4 - (c_2 - 2)r/2 + 3r^2/4 - c_2/2 - z/4$.

Используя формулы (2) и (3), находим кратности неглавных собственных значений:

$$m_1 = 2(r^2 + 3r + 4)(r^2 + 2r + 2)(r^2 + r + 2)r / ((r^6 - 4c_2r^4 + 6r^5 + 4c_2^2r^2 - 16c_2r^3 + 17r^4 + 8c_2^2r - 28c_2r^2 + 32r^3 + 4c_2^2 + 40r^2 + 16c_2 + 32r + 16) + (r^3 - 2c_2r + 3r^2 - 2c_2 + 4r - 4)\sqrt{z}),$$

$$m_2 = (r^2 + 3r + 4)(r^2 + 2r + 2)/4,$$

$$m_3 = 2(r^2 + 3r + 4)(r^2 + 2r + 2)(r^2 + r + 2)r / ((r^6 - 4c_2r^4 + 6r^5 + 4c_2^2r^2 - 16c_2r^3 + 17r^4 + 8c_2^2r - 28c_2r^2 + 32r^3 + 4c_2^2 + 40r^2 + 16c_2 + 32r + 16) - (r^3 - 2c_2r + 3r^2 - 2c_2 + 4r - 4)\sqrt{z}), \text{ где } z = r^6 - 4c_2r^4 + 6r^5 + 4c_2^2r^2 - 16c_2r^3 + 17r^4 + 8c_2^2r - 28c_2r^2 + 32r^3 + 4c_2^2 + 40r^2 + 16c_2 + 32r + 16.$$

Если $m_1 = m_3$, то $r^3 - 2c_2r + 3r^2 - 2c_2 + 4r - 4 = 0$ и $2c_2(r + 1) = r^3 + 3r^2 + 4r - 4$. В этом случае $r + 1$ делит 6 и $r = 1, 2$ или 5, соответственно $c_2 = 1, 2$ или 18. Теперь Γ_3 имеет параметры $(16, 5, 0, 2)$, $(56, 10, 0, 2)$ или $(704, 37, 0, 2)$ и Γ имеет массив пересечений $\{5, 1, 3; 1, 1, 4\}$, $\{15, 4, 4; 1, 2, 12\}$ или $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$. В первом случае получим противоречие с [1, лемма 4.1.6(i)], а во втором с [1, предложение 5.4.4.].

Пусть число z является квадратом и $z = u^2 = (2(r + 1)c_2 - (r^3 + 3r^2 + 4r - 4))^2 + 16r(r^2 + 3r + 4)$.

Имеются следующие решения $u = (4r(r^2 + 3r + 4)/t + t)$ и $c_2 = [u - 2t + (r^3 + 3r^2 + 4r - 4)] / (2(r + 1))$. При подстановке этих выражений в формулы для кратностей m_1 и m_3 получим $m_1 = (r^2 + 3r + 4)(r^2 + 2r + 2)(r^2 + r + 2)r / (4r^3 + 12r^2 + t^2 + 16r)$ и $m_3 = (r^2 + 2r + 2)(r^2 + r + 2)t^2 / (4(4r^3 + 12r^2 + t^2 + 16r))$.

Первый массив, который удовлетворяет условиям целочисленности m_1, m_3 и c_2 , равен $\{578865, 571584, 106; 1, 5496, 578760\}$ ($r = 104, c_2 = 5496, t = 4576$).

Итак, Γ имеет массив пересечений $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$. Лемма доказана. \square

Лемма 2.3. *Параметр μ не равен 4.*

Доказательство. Если $\mu = 4$, то Γ имеет массив пересечений $\{(r+3)k/4, c_2r, 4+r; 1, c_2, (r+3)(k/4-1)\}$. Положим $r = 2w$ и $z^2 = 4w^6 - 8c_2w^4 + 28w^5 + 4c_2^2w^2 - 32c_2w^3 + 81w^4 + 4c_2^2w - 46c_2w^2 + 128w^3 + c_2^2 - 16c_2w + 120w^2 + 8c_2 + 64w + 16$. Тогда собственные значения равны $k = \theta_0 = 2w^3 + 7w^2 + 8w + 3$, $\theta_1 = w^3 - (c_2 - 4)w + 7/2w^2 - 1/2c_2 + 1/2z + 1$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = w^3 - (c_2 - 4)w + 7/2w^2 - 1/2c_2 - 1/2z + 1$.

Далее, кратности неглавных собственных значений равны $m_1 = 4(2w^2 + 5w + 4)(2w^2 + 3w + 2)(2w + 3)(w + 1)^2w / (8w^7 - 16c_2w^5 + 60w^6 + 8c_2^2w^3 - 72c_2w^4 + 190w^5 + 4zw^4 + 12c_2^2w^2 - 124c_2w^3 + 337w^4 - 4zc_2w^2 + 16zw^3 + 6c_2^2w - 78c_2w^2 + 368w^3 - 4zc_2w + 23zw^2 + c_2^2 + 248w^2 - zc_2 + 8zw + 8c_2 + 96w - 4z + 16)$,

$$m_2 = 1/2(2w^2 + 5w + 4)(2w + 3)(w + 1),$$

$$m_3 = 4(2w^2 + 5w + 4)(2w^2 + 3w + 2)(2w + 3)(w + 1)^2w / (8w^7 - 16c_2w^5 + 60w^6 + 8c_2^2w^3 - 72c_2w^4 + 190w^5 - 4zw^4 + 12c_2^2w^2 - 124c_2w^3 + 337w^4 + 4zc_2w^2 - 16zw^3 + 6c_2^2w - 78c_2w^2 + 368w^3 + 4zc_2w - 23zw^2 + c_2^2 + 248w^2 + zc_2 - 8zw + 8c_2 + 96w + 4z + 16).$$

Если $m_1 = m_3$, то $4zw^4 - 4zc_2w^2 + 16zw^3 - 4zc_2w + 23zw^2 - zc_2 + 8zw - 4z = 0$, поэтому $c_2(2w + 1)^2 = 4w^4 + 16w^3 + 23w^2 + 8w - 4$ и $2w + 1$ делит $16w^2 + 8w - 4$, противоречие. Значит, число $4w^6 - 8c_2w^4 + 28w^5 + 4c_2^2w^2 - 32c_2w^3 + 81w^4 + 4c_2^2w - 46c_2w^2 + 128w^3 + c_2^2 - 16c_2w + 120w^2 + 8c_2 + 64w + 16$ является квадратом. Тогда имеются следующие решения вида $(w, c_2), [m_1, m_2, m_3]$:

$$(1, 2), \left[\frac{77}{17}, 55, \frac{280}{17}\right], \quad (1, 5), [10, 55, 11], \quad (1, 9), \left[\frac{154}{9}, 55, \frac{35}{9}\right], \quad (2, 6), \left[\frac{264}{19}, 231, \frac{2016}{19}\right], \\ (2, 10), \left[\frac{504}{13}, 231, \frac{1056}{13}\right], \quad (2, 13), \left[\frac{1848}{25}, 231, \frac{1152}{25}\right], \quad (3, 12), \left[\frac{2146}{67}, 666, \frac{25056}{67}\right],$$

$$\begin{array}{lll}
(3, 17), [\frac{696}{7}, 666, \frac{2146}{7}], & (4, 20), [\frac{805}{13}, 1540, \frac{12650}{13}], & (4, 26), [\frac{6325}{31}, 1540, \frac{25760}{31}], \\
(4, 27), [\frac{14720}{57}, 1540, \frac{44275}{57}], & (4, 32), [\frac{8855}{13}, 1540, \frac{4600}{13}], & (5, 30), [\frac{15879}{149}, 3081, \frac{313560}{149}], \\
(5, 37), [\frac{15678}{43}, 3081, \frac{79395}{43}], & (6, 37), [\frac{25760}{263}, 5565, \frac{1075158}{263}], & (6, 42), [\frac{17066}{101}, 5565, \frac{405720}{101}], \\
(6, 50), [\frac{11270}{19}, 5565, \frac{68264}{19}], & (6, 59), [\frac{85330}{29}, 5565, \frac{36064}{29}], & (7, 56), [\frac{66308}{263}, 9316, \frac{1843072}{263}], \\
(7, 65), [\frac{65824}{73}, 9316, \frac{464156}{73}], & & (8, 72), [\frac{29799}{83}, 14706, \frac{948024}{83}], \\
(8, 82), [\frac{16929}{13}, 14706, \frac{136224}{13}], & & (8, 94), [\frac{566181}{65}, 14706, \frac{199584}{65}], \\
(9, 78), [\frac{128925}{629}, 22155, \frac{11284280}{629}], & & (9, 90), [\frac{201505}{409}, 22155, \frac{7219800}{409}], \\
(9, 101), [\frac{66850}{37}, 22155, \frac{604515}{37}], & & (10, 110), [\frac{162052}{247}, 32131, \frac{6456560}{247}], \\
(10, 122), [\frac{322828}{133}, 32131, \frac{3241040}{133}], & & (10, 137), [\frac{3727196}{181}, 32131, \frac{1122880}{181}], \\
(11, 103), [\frac{5817}{31}, 45150, \frac{1179189}{31}], & & (11, 132), [\frac{500262}{587}, 45150, \frac{21938400}{587}], \\
(11, 141), [\frac{383922}{197}, 45150, \frac{7146600}{197}], & & (11, 145), [\frac{498600}{157}, 45150, \frac{5502882}{157}], \\
(11, 153), [\frac{214398}{19}, 45150, \frac{511896}{19}].
\end{array}$$

Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{20, 10, 6; 1, 5, 15\}$ и Γ_3 имеет параметры $(77, 16, 0, 4)$. Противоречие с тем, что для этого графа $q_{13}^1 < 0$. \square

Лемма 2.4. Если $\mu = 6$, то Γ имеет массив пересечений $\{143, 126, 12; 1, 21, 132\}$, $\{415, 390, 16; 1, 39, 400\}$, $\{1253, 1216, 22; 1, 76, 1232\}$, $\{1924, 1881, 25; 1, 99, 1900\}$, $\{3509, 3024, 30; 1, 126, 3480\}$, $\{3509, 3456, 30; 1, 144, 3480\}$.

Доказательство. Если $\mu = 6$, то $k = (r + 3)^2 - 3$, $r - 1$ не делится на 4 и Γ имеет массив пересечений $\{(r + 5)k/6, c_2r, 6 + r; 1, c_2, (r + 5)(k/6 - 1)\}$. $z^2 = (36c_2^2 - 12c_2k + k^2)r^2 + 36c_2^2 - 60(c_2 - 1)k + 25k^2 + 2(36c_2^2 - 6(6c_2 - 1)k + 5k^2 + 108c_2)r + 792c_2 + 36$. Тогда неглавные собственные значения равны $\theta_1 = -1/12(6c_2 - k)r - 1/2c_2 + 5/12k + 1/12z - 1/2$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = -1/12(6c_2 - k)r - 1/2c_2 + 5/12k - 1/12z - 1/2$.

Далее, их кратности равны $m_1 = 2(kr + 5k + 6)(kr + k - 6)k(r + 5)r / ((36c_2^2r^3 - 12c_2kr^3 + k^2r^3 + 108c_2^2r^2 - 84c_2kr^2 + 11k^2r^2 - 6zc_2r^2 + zkr^2 + 108c_2^2r - 132c_2kr + 35k^2r + 216c_2r^2 + 12kr^2 - 12zc_2r + 6zkr + 36c_2^2 - 60c_2k + 25k^2 + 1008c_2r + 72kr - 6zc_2 + 5zk - 18zr + 792c_2 + 60k + 36r - 66z + 36)(k - 6))$,

$$m_2 = (kr + k - 6)k(r + 6)(r + 5) / (12(k - 6)(r + 3)),$$

$$m_3 = 2(kr + 5k + 6)(kr + k - 6)k(r + 5)r / ((36c_2^2r^3 - 12c_2kr^3 + k^2r^3 + 108c_2^2r^2 - 84c_2kr^2 + 11k^2r^2 + 6zc_2r^2 - zkr^2 + 108c_2^2r - 132c_2kr + 35k^2r + 216c_2r^2 + 12kr^2 + 12zc_2r - 6zkr + 36c_2^2 - 60c_2k + 25k^2 + 1008c_2r + 72kr + 6zc_2 - 5zk + 18zr + 792c_2 + 60k + 36r + 66z + 36)(k - 6)).$$

Если $m_1 = m_3$, то $-6zc_2r^2 + zkr^2 - 12zc_2r + 6zkr - 6zc_2 + 5zk - 18zr - 66z = 0$, поэтому $6c_2(r + 1)^2 = kr^2 + 6kr + 5k - 18r - 66$, $r + 1$ делит 48 и 6 делит $k(r^2 + 5)$.

По [9, лемма 4.1] имеем $(a_1 - c_2)(c_2 + b_1) = 2c_2a_3$, поэтому $((r + 5)k/6 - c_2(r + 1) - 1)(r + 1) = 2(r + 5)$ и $(r + 5)(k(r + 1)/6 - 2) = c_2(r + 1)^2 + (r + 1)$. Отсюда $r + 1$ делит $2(r + 5)$ и $(r + 1)$ делит 8.

Если $r = 3$, то $3k = 4c_2 + 5$, Γ имеет массив пересечений $\{4(4c_2 + 5)/3, 3c_2, 9; 1, c_2, 4((4c_2 + 5)/3 - 2)\}$. В этом случае $k = (r + 3)^2 - 3 = 33$, $8(33 \cdot 4/6 - 2) = 16c_2 + 4$ и $c_2 = (8 \cdot 20 - 4)/16$, противоречие

Если $r = 7$, то $k = 4c_2 + 2$, Γ имеет массив пересечений $\{8c_2 + 10, 7c_2, 13; 1, c_2, 8c_2 - 8\}$. В этом случае $k = (r + 3)^2 - 3 = 97$, $12(97 \cdot 12/6 - 2) = 64c_2 + 8$ и $c_2 = (12 \cdot 192 - 8)/64$, противоречие

Пусть $(36c_2^2 - 12c_2k + k^2)r^2 + 36c_2^2 - 60(c_2 - 1)k + 25k^2 + 2(36c_2^2 - 6(6c_2 - 1)k + 5k^2 + 108c_2)r + 792c_2 + 36$ является квадратом. Тогда имеются следующие решения вида $(r, c_2), [m_1, m_2, m_3]$:

(1, 6), $[\frac{65}{14}, \frac{65}{2}, \frac{13}{7}]$, (1, 12), $[\frac{65}{11}, \frac{65}{2}, \frac{13}{22}]$, (2, 5), [8, 77, 14] (число $(\mu+r-1)k/\mu = 7 \cdot 22/6$ не целое), (2, 7), $[\frac{616}{53}, 77, \frac{550}{53}]$, (3, 6), $[\frac{110}{9}, 154, \frac{385}{9}]$, (3, 7), $[\frac{77}{5}, 154, \frac{198}{5}]$, (3, 11), $[\frac{770}{23}, 154, \frac{495}{23}]$, (4, 6), $[\frac{138}{11}, 276, \frac{1127}{11}]$, (4, 11), $[\frac{1127}{29}, 276, \frac{2208}{29}]$, (4, 14), [69, 276, 46], (5, 12), $[\frac{1281}{31}, \frac{915}{2}, \frac{10675}{62}]$, (5, 19), $[\frac{1708}{11}, \frac{915}{2}, \frac{1281}{22}]$, (6, 15), $[\frac{1040}{17}, 715, \frac{5148}{17}]$, (6, 17), $[\frac{4212}{43}, 715, \frac{11440}{43}]$, (6, 21), [220, 715, 144], (7, 7), $[\frac{679}{47}, 1067, \frac{26675}{47}]$, (7, 25), $[\frac{1067}{3}, 1067, \frac{679}{3}]$, (8, 22), [118, 1534, 767] (число $(\mu+r-1)k/\mu = 13 \cdot 118/6$ не целое), (9, 24), $[\frac{3619}{34}, \frac{4277}{2}, \frac{20163}{17}]$, (9, 26), $[\frac{6721}{43}, \frac{4277}{2}, \frac{97713}{86}]$, (9, 34), $[\frac{47047}{58}, \frac{4277}{2}, \frac{13959}{29}]$, (10, 24), $[\frac{581}{8}, 2905, \frac{14027}{8}]$, (10, 33), $[\frac{28054}{79}, 2905, \frac{116200}{79}]$, (10, 39), [1162, 2905, 664], (11, 35), $[\frac{12545}{49}, 3860, \frac{110396}{49}]$, (11, 37), $[\frac{110396}{289}, 3860, \frac{614705}{289}]$, (12, 40), $[\frac{4144}{13}, 5032, \frac{39627}{13}]$, (12, 43), $[\frac{58275}{49}, 5032, \frac{281792}{49}]$, (12, 49), $[\frac{21312}{11}, 5032, \frac{15725}{11}]$, (12, 50), $[\frac{4403}{2}, 5032, \frac{2331}{2}]$, (13, 50), $[\frac{9867}{10}, \frac{12903}{2}, \frac{17204}{5}]$, (13, 56), $[\frac{5865}{2}, \frac{12903}{2}, 1495]$, (14, 51), $[\frac{13728}{29}, 8151, \frac{152152}{29}]$, (15, 43), $[\frac{2675}{23}, 10165, \frac{164673}{23}]$, (15, 54), $[\frac{1819}{5}, 10165, \frac{34561}{5}]$, (15, 57), $[\frac{34561}{61}, 10165, \frac{409275}{61}]$, (15, 69), $[\frac{34561}{7}, 10165, \frac{16371}{7}]$, (16, 54), $[\frac{6265}{29}, 12530, \frac{258476}{29}]$, (16, 67), $[\frac{64619}{51}, 12530, \frac{400960}{51}]$, (16, 76), [6265, 12530, 2864], (17, 70), $[\frac{52801}{67}, \frac{30569}{2}, \frac{1410541}{134}]$, (18, 51), $[\frac{24090}{239}, 18469, \frac{3290840}{239}]$, (18, 77), $[\frac{6424}{7}, 18469, \frac{90666}{7}]$, (18, 81), $[\frac{107310}{61}, 18469, \frac{738760}{61}]$, (18, 91), $[\frac{184690}{19}, 18469, \frac{78840}{19}]$, (19, 99), [11914, 22126, 4921], (20, 92), $[\frac{23144}{19}, 26300, \frac{361625}{19}]$, (21, 83), $[\frac{39537}{134}, \frac{62075}{2}, \frac{1599052}{67}]$, (21, 89), $[\frac{123004}{271}, \frac{62075}{2}, \frac{12849525}{542}]$, (21, 96), $[\frac{57109}{66}, \frac{62075}{2}, \frac{768775}{33}]$, (21, 100), $[\frac{109825}{79}, \frac{62075}{2}, \frac{3597867}{158}]$, (21, 108), $[\frac{30751}{6}, \frac{62075}{2}, \frac{57109}{3}]$, (21, 112), $[\frac{399763}{37}, \frac{62075}{2}, \frac{988425}{74}]$, (21, 116), $[\frac{1427725}{82}, \frac{62075}{2}, \frac{276759}{41}]$, (22, 85), $[\frac{13684}{57}, 36387, \frac{1617200}{57}]$, (22, 96), $[\frac{36387}{76}, 36387, \frac{2138125}{76}]$, (22, 113), $[\frac{777500}{251}, 36387, \frac{6404112}{251}]$, (22, 120), $[\frac{44473}{4}, 36387, \frac{69975}{76}]$, (22, 125), [145548, 254709, 54736], (23, 117), $[\frac{30285}{17}, 42399, \frac{541765}{17}]$, (24, 126), [2002, 49126, 37323], (24, 131), $[\frac{1146717}{289}, 49126, \frac{10218208}{289}]$, (24, 144), [29029, 49126, 10296].

Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $\{(143, 126, 12; 1, 21, 132)\}$, $\{415, 390, 16; 1, 39, 400\}$, $\{1253, 1216, 22; 1, 76, 1232\}$, $\{1924, 1881, 25; 1, 99, 1900\}$, $\{3509, 3024, 30; 1, 126, 3480\}$, $\{3509, 3456, 30; 1, 144, 3480\}$.

Но граф с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$ не существует по [8]. □

3. СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ С $\mu \notin \{1, 2, 4, 6\}$

В этом разделе предполагается, что Γ_3 — граф с параметрами $(v, k, 0, \mu)$ и собственными значениями $r, -(\mu+r), k = (r+1)\mu + r^2$, причем $\mu \notin \{1, 2, 4, 6\}$ и $v \leq 100000$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{(\mu+r-1)k/\mu, c_2r, \mu+r; 1, c_2, (\mu+r-1)(k/\mu-1)\}$.

Лемма 3.1. *Если $v \leq 266$, то графов нет.*

Доказательство. Если $v \leq 266$, то ввиду [10] граф Γ_3 имеет параметры (16, 5, 0, 2), (50, 7, 0, 1), (56, 10, 0, 2), (77, 16, 0, 4), (100, 22, 0, 6), (162, 21, 0, 3), (176, 25, 0, 4), (210, 33, 0, 6) или (266, 45, 0, 9).

В случае (162, 21, 0, 3) граф Γ имеет массив пересечений $\{35, 27, 6; 1, 9, 30\}$, противоречие с тем, что число ka_1 нечетно.

В случае $(266, 45, 0, 9)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{55, 3c_2, 12; 1, c_2, 44\}$, поэтому c_2 четно и делит $r^2(r-1) = 18$. Противоречие с тем, что кратность некоторого собственного значения графа Γ не целая. \square

Лемма 3.2. *Если $267 \leq v \leq 650$, то графов нет.*

Доказательство. Если $267 \leq v \leq 650$, то ввиду [10] граф Γ_3 имеет параметры $(352, 26, 0, 2)$, $(352, 36, 0, 4)$, $(392, 46, 0, 6)$, $(552, 76, 0, 12)$, $(638, 49, 0, 4)$, $(650, 55, 0, 5)$.

В случае $(552, 76, 0, 12)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{95, 4c_2, 16; 1, c_2, 80\}$, противоречие.

В случае $(638, 49, 0, 4)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{98, 5c_2, 9; 1, c_2, 90\}$, противоречие.

В случае $(650, 55, 0, 5)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{99, 5c_2, 10; 1, c_2, 90\}$, противоречие. \square

Лемма 3.3. *Если $651 \leq v \leq 1300$, то Γ имеет массив пересечений $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$.*

Доказательство. Если $651 \leq v \leq 1300$, то ввиду [10] граф Γ_3 имеет параметры $(667, 96, 0, 16)$, $(704, 37, 0, 2)$, $(784, 116, 0, 20)$, $(800, 85, 0, 10)$, $(1073, 64, 0, 4)$, $(1080, 78, 0, 6)$, $(1178, 99, 0, 9)$, $(1190, 145, 0, 20)$, $(1276, 50, 0, 2)$.

В случае $(667, 96, 0, 16)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{114, 4c_2, 20; 1, c_2, 95\}$, противоречие.

В случае $(784, 116, 0, 20)$ имеем $r = 4$ и $\mu = 20$ не делит $r^2(r-1)$, противоречие.

В случае $(800, 85, 0, 10)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$.

В случае $(1178, 99, 0, 9)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{154, 6c_2, 15; 1, c_2, 140\}$, противоречие.

В случае $(1190, 145, 0, 20)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{174, 5c_2, 25; 1, c_2, 150\}$, противоречие. \square

По [8] граф с массивом пересечений $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ не существует.

Лемма 3.4. *Если $v \leq 100000$, то Γ имеет массив пересечений из таблицы 2.*

Доказательство. Заметим, что $v = (r\mu + r^2 + 2\mu + r)(r\mu + r^2 + \mu - r)/\mu$. Поэтому $1 \leq r \leq 36$.

С помощью компьютерного перебора по $r \in \{2, 3, \dots, 36\}$ и по μ , пробегающем все делители $r^2(r-1)$, $\mu \leq r(r+1)$ получаем таблицу 2. \square

Для графов с массивами пересечений $\{35, 27, 6; 1, 9, 30\}$, $\{279, 245, 28; 1, 35, 252\}$, $\{335, 297, 21; 1, 33, 315\}$, $\{377, 297, 27; 1, 33, 351\}$, $\{483, 363, 22; 1, 33, 462\}$, $\{923, 847, 66; 1, 77, 858\}$, $\{935, 885, 36; 1, 59, 900\}$, $\{2159, 2025, 120; 1, 135, 2040\}$, $\{4179, 3971, 190; 1, 209, 3990\}$, $\{1819, 1617, 35; 1, 77, 1785\}$ число ka_1 нечетно. Поэтому указанные графы не существуют.

ТАБЛИЦА 2. Дистанционно регулярные графы Γ с сильно регулярным Γ_3 без треугольников и числом вершин не большим 100000

(μ, r, c_2)	срг	дрг
(1, 2, 5)	(50, 7, 0, 1)	{14, 10, 3; 1, 5, 12}
(3, 3, 9)	(162, 21, 0, 3)	{35, 27, 6; 1, 9, 30}
(6, 4, 14)	(392, 46, 0, 6)	{69, 56, 10; 1, 14, 60}
(2, 5, 18)	(704, 37, 0, 2)	{111, 90, 7; 1, 18, 105}
(10, 5, 20)	(800, 85, 0, 10)	{119, 100, 15; 1, 20, 105}
(6, 6, 21)	(1080, 78, 0, 6)	{143, 126, 12; 1, 21, 132}
(15, 6, 27)	(1458, 141, 0, 15)	{188, 162, 21; 1, 27, 168}
(14, 7, 28)	(2002, 161, 0, 14)	{230, 196, 21; 1, 28, 210}
(21, 7, 35)	(2450, 217, 0, 21)	{279, 245, 28; 1, 35, 252}
(28, 8, 44)	(3872, 316, 0, 28)	{395, 352, 36; 1, 44, 360}
(12, 9, 33)	(3552, 201, 0, 12)	{335, 297, 21; 1, 33, 315}
(18, 9, 33)	(4032, 261, 0, 18)	{377, 297, 27; 1, 33, 351}
(36, 9, 54)	(5832, 441, 0, 36)	{539, 486, 45; 1, 54, 495}
(6, 10, 39)	(4732, 166, 0, 6)	{415, 390, 16; 1, 39, 400}
(45, 10, 65)	(8450, 595, 0, 45)	{714, 650, 55; 1, 65, 660}
(11, 11, 33)	(6050, 253, 0, 11)	{483, 363, 22; 1, 33, 462}
(55, 11, 77)	(11858, 781, 0, 55)	{923, 847, 66; 1, 77, 858}
(16, 12, 41)	(8075, 352, 0, 16)	{594, 492, 28; 1, 41, 567}
(66, 12, 90)	(16200, 1002, 0, 66)	{1169, 1080, 78; 1, 90, 1092}
(78, 13, 104)	(21632, 1261, 0, 78)	{1455, 1352, 91; 1, 104, 1365}
(91, 14, 119)	(28322, 1561, 0, 91)	{1784, 1666, 105; 1, 119, 1680}
(21, 15, 59)	(15522, 561, 0, 21)	{935, 885, 36; 1, 59, 900}
(105, 15, 135)	(36450, 1905, 0, 105)	{2159, 2025, 120; 1, 135, 2040}
(6, 16, 76)	(21660, 358, 0, 6)	{1253, 1216, 22; 1, 76, 1232}
(120, 16, 152)	(46208, 2296, 0, 120)	{2583, 2432, 136; 1, 152, 2448}
(34, 17, 68)	(24752, 901, 0, 34)	{1325, 1156, 51; 1, 68, 1275}
(136, 17, 170)	(57800, 2737, 0, 136)	{3059, 2890, 153; 1, 170, 2907}
(153, 18, 189)	(71442, 3231, 0, 153)	{3590, 3402, 171; 1, 189, 3420}
(6, 19, 99)	(38962, 481, 0, 6)	{1924, 1881, 25; 1, 99, 1900}
(171, 19, 209)	(87362, 3781, 0, 171)	{4179, 3971, 190; 1, 209, 3990}
(14, 21, 77)	(40768, 749, 0, 14)	{1819, 1617, 35; 1, 77, 1785}
(90, 21, 134)	(67520, 2421, 0, 90)	{2959, 2814, 111; 1, 134, 2849}
(6, 24, 126)	(88452, 726, 0, 6)	{3509, 3024, 30; 1, 126, 3480}
(6, 24, 144)	(88452, 726, 0, 6)	{3509, 3456, 30; 1, 144, 3480}
(40, 25, 105)	(70930, 1665, 0, 40)	{2664, 2625, 65; 1, 105, 2600}

4. ГРАФЫ С НЕЦЕЛЫМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{(\mu+r-1)k/\mu, c_2r, \mu+r; 1, c_2, (\mu+r-1)(k/\mu-1)\}$ и одно из собственных значений Γ нецелое.

Лемма 4.1. *Выполняются следующие утверждения:*

$$(1) c_2 = \mu + (-2\mu + 2r(r-1)\mu + 2r(r-1)(r+1)\mu + r^2(r-1)(r+1))/((\mu(r+1)^2));$$

(2) $\mu(r+1)$ делит $-2\mu^2 + 2r(r-1)\mu$, $r+1$ делит $-2\mu + 2r(r-1)$ и $r+1$ делит $2\mu - 4$.

Доказательство. Кратность собственного значения θ_1 графа Γ равна

$$m_1 = 2(\mu r + r^2 + 2\mu + r)(\mu r + r^2 + \mu - r)(\mu r + r^2 + \mu)(\mu + r - 1)r / (c_2^2 \mu^2 r^3 - 2c_2 \mu^3 r^3 + \mu^4 r^3 - 4c_2 \mu^2 r^4 + 4\mu^3 r^4 - 2c_2 \mu r^5 + 6\mu^2 r^5 + 4\mu r^6 + r^7 + 3c_2^2 \mu^2 r^2 - 6c_2 \mu^3 r^2 + 3\mu^4 r^2 - 8c_2 \mu^2 r^3 + 8\mu^3 r^3 - 2c_2 \mu r^4 + 6\mu^2 r^4 - r^6 + 3c_2^2 \mu^2 r - 2c_2 \mu^3 r + 3\mu^4 r + 4c_2 \mu^2 r^2 + 4\mu^3 r^2 + 2c_2 \mu r^3 - 2\mu^2 r^3 - 4\mu r^4 - r^5 - zc_2 \mu r^2 + z\mu^2 r^2 + 2z\mu r^3 + zr^4 + c_2^2 \mu^2 + 2c_2 \mu^3 + \mu^4 + 8c_2 \mu^2 r + 2c_2 \mu r^2 - 2\mu^2 r^2 + r^4 - 2zc_2 \mu r + 2z\mu^2 r + 2z\mu r^2 - zc_2 \mu - z\mu^2 - 4z\mu r - zr^2),$$

где $z = (2(2\mu - 1)r^5 + r^6 - (2(c_2 + 2)\mu - 6\mu^2 - 1)r^4 + c_2^2 \mu^2 + 2c_2 \mu^3 + \mu^4 - 4(c_2 \mu^2 - \mu^3)r^3 - (2(c_2 - 2)\mu^3 - \mu^4 - (c_2^2 - 4c_2 - 2)\mu^2 - 2c_2 \mu)r^2 - 2(2c_2 \mu^3 - \mu^4 - (c_2^2 + 4c_2)\mu^2)r)^{1/2}$.

Поэтому одно из собственных значений Γ не целое, только в случае когда $-zc_2 \mu r^2 + z\mu^2 r^2 + 2z\mu r^3 + zr^4 - 2zc_2 \mu r + 2z\mu^2 r + 2z\mu r^2 - zc_2 \mu - z\mu^2 - 4z\mu r - zr^2 = 0$.

Отсюда, $c_2 = (\mu^2 r^2 + 2\mu r^3 + r^4 + 2\mu^2 r + 2\mu r^2 - \mu^2 - 4\mu r - r^2) / ((\mu(r+1))^2)$, т.е. $c_2 = \mu + (-2\mu + 2r(r-1)\mu + 2r(r-1)(r+1)\mu + r^2(r-1)(r+1)) / ((\mu(r+1))^2)$.

Поэтому $\mu(r+1)$ делит $-2\mu^2 + 2r(r-1)\mu$, $r+1$ делит $-2\mu + 2r(r-1)$, а значит, $r+1$ делит $2\mu - 4$. \square

Лемма 4.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $\mu = (y(r+1)+4)/2$ для некоторого $y \in \mathbb{N}$ или Γ имеет массив пересечений $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$;

(2) $r^2(r-1) = \mu x$ для некоторого $x \in \mathbb{N}$, $2r^2(r-1) = (y(r+1) + 4)x$ и $c_2 = \mu + 2(r-1) + (x-y-2)/(r+1)$;

(3) $x \equiv -1 \pmod{(r+1)/(r+1, 4)}$, $y \equiv -3 \pmod{(r+1)/(r+1, 4)}$ и $2r^2(r-1) = ((s(r+1) - 3(r+1, 4))(r+1) + 4(r+1, 4))(t(r+1) - (r+1, 4))/(r+1, 4)^2$.

Доказательство. По лемме 3.1 имеем $\mu = (y(r+1) + 4)/2$ для некоторого $y \in \mathbb{Z}$. Далее, $y > -4/(r+1)$, а значит, $y \geq -1$. Но при $y = -1$ имеем $\mu = 0$, противоречие, а при $y = 0$ параметр μ равен 2 и по лемме 2.2 граф Γ имеет массив пересечений $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$. Далее будем считать, что $y \in \mathbb{N}$.

Напомним, что из целочисленности c_3 следует делимость $r^2(r-1)$ на μ . Поэтому $r^2(r-1) = \mu x$ для некоторого $x \in \mathbb{N}$ и $2r^2(r-1) = (y(r+1) + 4)x$. Тогда $c_2 = (\mu + (-y(r+1) - 4 + 2r(r-1) + 2r(r-1)(r+1) + x(r+1)))/(r+1)^2$ и $c_2 = \mu + 2(r-1) + (x-y-2)/(r+1)$.

Из равенства $2r^2(r-1) = (y(r+1) + 4)x$ следует, что $x \equiv -1 \pmod{(r+1)/(r+1, 4)}$, $y \equiv -3 \pmod{(r+1)/(r+1, 4)}$ и $2r^2(r-1) = ((s(r+1) - 3(r+1, 4))(r+1) + 4(r+1, 4))(t(r+1) - (r+1, 4))/(r+1, 4)^2$. \square

Лемма 4.3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) число r нечетно;

(2) если $r = 4m + 1$, то Γ имеет массив пересечений: $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$, $\{335, 297, 21; 1, 33, 315\}$ или $\{2959, 2814, 111; 1, 134, 2849\}$.

Доказательство. Пусть $r = 2m$. Тогда $8m^2(2m-1) = ((s(2m+1) - 3)(2m+1) + 4)(t(2m+1) - 1)$ и $(8st - 16)m^3 + (12st - 12t - 4s + 8)m^2 + (6st - 4t - 4s + 6)m + st + t - s - 1 = 0$

При $st \geq 2$ левая часть уравнения положительна при $m > 0$, поэтому $s = t = 1$. Имеем

$-8m^3 + 4m^2 + 4m = 0$, $-2m^2 + m + 1 = 0$, $m = 1$. Отсюда $r = 2$, $x = 2$, $y = 0$, $\mu = 2$ и $c_2 = 4/3$, противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть $r = 4m + 1$. Тогда $x = t(2m+1) - 1$, $y = s(2m+1) - 3$.

Далее, $4(4m+1)^2m = ((s(2m+1)-3)(2m+1)+2)(t(2m+1)-1)$, $(8st-64)m^3 + (12st-12t-4s-32)m^2 + (6st-8t-4s+2)m + st-s-t+1 = 0$ и $8(st-8)m^3 + ((12t-4)(s-1)-36)m^2 + (2st+4(t-1)(s-2)-6)m + (t-1)(s-1) = 0$.

При $st \geq 8$ и $s > 1$ левая часть равенства положительна при $m > 0$. Поэтому либо $s = 1$ либо $st < 8$.

Пусть $s = 1$. Тогда $4(t-8)m^2 - 18m - (t+1) = 0$, $t = 8 + 9/(2m-1)$ и $m \in \{1, 2, 5\}$.

При $m = 1$ имеем $r = 5, x = 50, y = 0, \mu = 2, c_2 = 18$ и Γ имеет массив пересечений $\{111, 90, 7; 1, 18, 105\}$.

При $m = 2$ имеем $r = 9, t = 11, x = 54, y = 2, \mu = 12, c_2 = 33$ и Γ имеет массив пересечений $\{335, 297, 21; 1, 33, 315\}$.

При $m = 5$ имеем $r = 21, t = 9, x = 98, y = 8, \mu = 90, c_2 = 134$ и Γ имеет массив пересечений $\{2959, 2814, 111; 1, 134, 2849\}$.

Рассмотрим случай $st < 8$ и $s > 1$.

Тогда пара (s, t) принимает одно из следующих значений: $(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (7, 1)$.

Уравнение $8(st-8)m^3 + ((12t-4)(s-1)-36)m^2 + (2st+4(t-1)(s-2)-6)m + (t-1)(s-1) = 0$ имеет положительные целые решения только в случаях $(s, t) = (3, 2)$ и $(7, 1)$.

В случае $(s, t) = (3, 2)$ имеем $m = 1, r = 3, x = 5, y = 6$ и $x - y - 2$ не делится на $(r+1)$, противоречие.

В случае $(s, t) = (7, 1)$ имеем $m = 2, r = 9, x = 4, y = 32, \mu = 162, c_2 = 175$ и Γ имеет массив пересечений $\{1785, 1575, 171; 1, 175, 1615\}$, противоречие с тем, что $m_1 = 987/2$. \square

Лемма 4.4. *Если $r = 4m - 1$, то выполняются следующие утверждения:*

- (1) $x = tm - 1, y = sm - 3$ и $(x - y - 2)/(r + 1) = (t - s)/4 - \text{целое число}$;
- (2) $(st - 32)m^2 + (32 - s - 3t)m + t - 7 = 0$.
- (3) $t \geq 3$ и если $m \leq 2$, то Γ имеет массив пересечений $\{230, 196, 21; 1, 28, 210\}$.

Доказательство. Пусть $r = 4m - 1$. Тогда $x = tm - 1, y = sm - 3$.

Из целочисленности c_2 следует, что $(x - y - 2)/(r + 1) = (tm - sm)/(4m) = (t - s)/4 - \text{целое число}$.

Из равенства $2r^2(r - 1) = ((s(r + 1) - 3(r + 1, 4))(r + 1) + 4(r + 1, 4))(t(r + 1) - (r + 1, 4))/(r + 1, 4)^2$ следует $2(4m - 1)^2(4m - 2) = ((sm - 3)4m + 4)(tm - 1)$. Поэтому $(4st - 128)m^3 + (128 - 4s - 12t)m^2 + (4t - 28)m = 0$ и $(st - 32)m^2 + (32 - s - 3t)m + t - 7 = 0$.

Пусть $m = 1$. Тогда $st - 32 + 32 - s - 3t + t - 7 = 0, st - s - 2t - 7 = 0, s(t - 1) - 2(t - 1) - 9 = 0, (s - 2)(t - 1) = 9$. Поэтому $(s, t) \in \{(3, 10), (5, 4), (11, 2)\}$. Во всех случаях 4 не делит $t - s$.

Пусть $t = 1$. Тогда $(s - 32)m^2 + (29 - s)m - 6 = 0, sm(m - 1) - 32m^2 + 29(m - 1) + 23 = 0, (sm + 29)(m - 1) = 32m^2 - 23, m - 1$ делит 9 и $(s, m) \in \{(38, 2), (115, 4)\}$. В любом случае 4 не делит $t - s$.

Пусть $t = 2$. Тогда $(2s - 32)m^2 + (26 - s)m - 5 = 0, sm(2m - 1) - 32m^2 + 13(2m - 1) + 8 = 0, (sm + 13)(2m - 1) = 8(4m^2 - 1), sm + 13 = 2m + 1, m(s - 2) = -12$ и $(s, m) = (1, 12)$. В этом случае 4 не делит $t - s$.

Пусть $m = 2$. Тогда $4st - 32 \cdot 4 + 32 \cdot 2 - 2s - 6t + t - 7 = 0, 2s(2t - 1) - 3(2t - 1) + t - 74 = 0, (2s - 3)(2t - 1) = 74 - t$. Поэтому $(s, t) \in \{(38, 1), (3, 11), (2, 25)\}$. В первом

и третьем случаях 4 не делит $t - s$. При $(s, t) = (3, 11)$ имеем $r = 7, x = 21, y = 3, \mu = 14, c_2 = 28$ и Γ имеет массив пересечений $\{230, 196, 21; 1, 28, 210\}$. \square

Завершим доказательство теоремы 2. Из равенства $m^2st - 32m^2 + 32m - ms - 3mt + t - 32m^2 + 32m - 7 = 0$ следует $ms(mt - 1) - 3(mt - 1) + t - 32m^2 + 32m - 10 = 0$ и $(ms - 3)(mt - 1) = 32m^2 - 32m + 10 - t$.

Если t четно, то левая часть равенства $(ms - 3)(mt - 1) = 32m^2 - 32m + 10 - t$ нечетна, а правая четна, противоречие.

Пусть t нечетно. Если m делится на 4, то из равенства $(ms - 3)(mt - 1) = 32m^2 - 32m + 10 - t$ следует, что t сравнимо с 3 по модулю 4. Если же m сравнимо с 2 по модулю 4, то $t + 2s - 1$ делится на 4, поэтому снова t сравнимо с 3 по модулю 4. Теперь либо $t = 3, s = 11$ и $m^2 + 12m - 4 = 0$, либо $t = 3, s = 7$ и $11m^2 - 16m + 4 = 0$, либо $t = 7, s = 3$ и $11m^2 - 8m = 0$, либо $t = 7, s = 7$ и $17m^2 - 4m = 0$, либо $t = 11, s = 3$ и $m^2 - 4m + 4 = 0$. В любом случае либо имеем противоречие, либо $m = 2$ и по лемме 3.4 граф Γ имеет массив пересечений $\{230, 196, 21; 1, 28, 210\}$.

Теорема 2 доказана.

5. ФОРМАЛЬНО САМОДУАЛЬНЫЕ ГРАФЫ

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 и Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников.

Лемма 5.1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с целыми собственными значениями и массивом пересечений $\{(\mu + r - 1)k/\mu, c_2r, \mu + r; 1, c_2, (\mu + r - 1)(k/\mu - 1)\}$, $k = r^2 + \mu(r + 1)$. Тогда

$$(4) \quad c_2 = -(\mu^2r + 2\mu r^2 + r^3 + \mu^2 - r^2 - t)t/((\mu^2 + 2\mu r - rt - t)\mu)$$

для некоторого $t \in \mathbb{Z}/\{0\}$, делящегося на μ .

Доказательство. Одно из собственных значений графа Γ имеет вид

$$\theta = -1/2(c_2\mu r - \mu^2r - 2\mu r^2 - r^3 + c_2\mu - \mu^2 + r^2 + 2\mu - \sqrt{z})/\mu,$$

где $z = c_2^2\mu^2r^2 - 2c_2\mu^3r^2 + \mu^4r^2 - 4c_2\mu^2r^3 + 4\mu^3r^3 - 2c_2\mu r^4 + 6\mu^2r^4 + 4\mu r^5 + r^6 + 2c_2^2\mu^2r - 4c_2\mu^3r + 2\mu^4r - 4c_2\mu^2r^2 + 4\mu^3r^2 - 4\mu r^4 - 2r^5 + c_2^2\mu^2 + 2c_2\mu^3 + \mu^4 + 8c_2\mu^2r + 2c_2\mu r^2 - 2\mu^2r^2 + r^4$.

Преобразуем данное выражение $\mu^2(r + 1)^2c_2^2 - 2\mu(\mu^2r^2 + 2\mu r^3 + r^4 + 2\mu^2r + 2\mu r^2 - \mu^2 - 4\mu r - r^2)c_2 + (\mu r + r^2 + \mu - r)^2(\mu + r)^2$.

Заметим, что $(\mu r + r^2 + \mu - r)(\mu + r)(r + 1) = \mu^2r^2 + 2\mu r^3 + r^4 + 2\mu^2r + 2\mu r^2 + \mu^2 - r^2$. Поэтому

$$z = (\mu(r + 1)c_2 - (\mu r + r^2 + \mu - r)(\mu + r))^2 + 4(\mu + 2r)\mu^2c_2.$$

По условию z является квадратом целого числа и, решая диофантово уравнение $x^2 - y^2 = 4N$, имеем

$\mu(r + 1)c_2 - (\mu r + r^2 + \mu - r)(\mu + r) = (\mu + 2r)\mu^2c_2/t - t$ для некоторого $t \in \mathbb{Z}/\{0\}$.

Отсюда

$$(5) \quad c_2 = (\mu^2r + 2\mu r^2 + r^3 + \mu^2 - r^2 + t)t/((\mu^2 + 2\mu r + rt + t)\mu)$$

для некоторого $t \in \mathbb{Z}/\{0\}$.

Далее, $t^2 = u\mu$ для некоторого целого положительного числа u . Умножив числитель и знаменатель правой части равенства 5 на u получим $c_2 = (\mu t^2 r + 2t^2 r^2 + ur^3 + \mu t^2 - ur^2 + tu)/((\mu^2 + 2\mu r + rt + t)t)$.

Напомним, что $r^2(r-1) = x\mu$ для некоторого целого положительного числа x . Поэтому $c_2 = (\mu tr + 2tr^2 + tx + \mu t + u)/(\mu^2 + 2\mu r + rt + t)$. Отсюда t делит u^2 и, с учетом равенства $t^2 = u\mu$, имеем $t = y\mu$ и $u = y^2\mu$ для некоторого натурального числа y . □

Лемма 5.2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{(\mu+r-1)k/\mu, c_2r, \mu+r; 1, c_2, (\mu+r-1)(k/\mu-1)\}$, $k = r^2 + \mu(r+1)$ и целыми собственными значениями. Если Γ формально самодуален, то $\mu = r(r-1)/2$, $c_2 = (r+3)r/2$ и Γ имеет массив пересечений

$$\{(r^2 + 2r - 1)(r + 2)/2, (r + 3)r^2/2, (r + 1)r/2; 1, (r + 3)r/2, (r + 2)(r + 1)r/2\},$$

где r не сравнимо с 3 по модулю 4.

Доказательство. Заметим, что кратность собственного значения θ_2 графа Γ равна $m_2 = (\mu r + r^2 + 2\mu + r)(\mu r + r^2 + \mu)(\mu + r - 1)/((\mu + 2r)\mu)$, а $k_2 = (\mu r + r^2 + \mu)(\mu + r - 1)r/\mu$. Так как Γ формально самодуален, то $m_2 = k_2$ и $\mu = r(r-1)/2$.

В силу того, что $k_1 \neq k_3$ граф Γ имеет целые собственные значения и по лемме 5.1 $c_2 = -2(r^5 + 3r^4 - r^3 - 3r^2 - 4t)t/((r^4 + 2r^3 - 3r^2 - 4rt - 4t)(r-1)r)$.

Из равенства $k_1 = m_1$ имеем $t = -(r+3)(r-1)r^2/4$ или $(r+3)^2(r-1)r^2/(4(r+1))$.

В первом случае имеем $c_2 = (r+3)r/2$.

Во втором случае $c_2 = (r+3)^2(r-1)r/(2(r+1)^2)$, следовательно $(r+1)^2$ делит $4(r-1)$, противоречие.

Если r сравнимо с 3 по модулю 4, то число b_{0a_1} нечетно, противоречие. Лемма доказана. □

Следствие 2 доказано.

REFERENCES

- [1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1989. Zbl 0747.05073
- [2] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, *Inverse problems in the theory of distance-regular graphs*, Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1, **307** (2019), S88–S98. Zbl 1441.05247
- [3] A.A. Makhnev, M.S. Nirova, *On distance-regular Shilla graphs*, Math. Notes, **103:5** (2018), 780–792. Zbl 1394.05027
- [4] P. Cameron, J.H. van Lint, *Designs, graphs, codes and their links*, London Math. Soc. Student Texts **22**, Cambr. Univ. Press., Cambridge etc., 1991. Zbl 0743.05004
- [5] A. Neumaier, *Strongly regular graphs with smallest eigenvalue $-m$* , Arch. Math., **33** (1979), 392–400. Zbl 0407.05043
- [6] A.J. Hoffman, R.R. Singleton, *On Moore graphs with diameters 2 and 3*, IBM J. Res. Dev., **4**, 1960, 497–504. Zbl 0096.38102
- [7] M.S. Nirova, *On distance-regular graphs Γ with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3* , Sib. Electron. Math. Izv., **15** 2018, 175–185. Zbl 1430.05029
- [8] A.A. Makhnev, M.M. Isakova, M.S. Nirova, *Distance-regular graphs with intersection arrays $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $\{74, 54, 15; 1, 9, 60\}$ and $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ do not exist*, Sib. Electron. Math. Izv., **16** (2019), 1254–1259. Zbl 1425.05072

- [9] S. Bang, J. Koolen, *Distance-regular graphs of diameter 3 having eigenvalue -1* , Linear Algebra Appl., **531** (2017), 38–53. Zbl 1370.05130
- [10] A.E. Brouwer, *A table of parameters of strongly regular graphs*, homepage, <https://www.win.tue.nl/~aeb/graphs/srg/srgtab.html>

ALEXANDR ALEXEEVICH MAKHNEV
URAL FEDERAL UNIVERSITY,
N.N. KRASOVSKY INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,
16, S. KOVALEVSKOY STR.,
EKATERINBURG, 620990, RUSSIA
Email address: makhnev@imm.uran.ru

IVAN NIKOLAEVICH BELOUSOV
URAL FEDERAL UNIVERSITY,
N.N. KRASOVSKY INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,
16, S. KOVALEVSKOY STR.,
EKATERINBURG, 620990, RUSSIA
Email address: i_belousov@mail.ru

DMITRII VIKTOROVICH PADUCHIKH
N.N. KRASOVSKY INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,
16, S. KOVALEVSKOY STR.,
620990, EKATERINBURG, RUSSIA
Email address: dpaduchikh@gmail.com