

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 18, №1, стр. 9–26 (2021)
DOI 10.33048/semi.2021.18.002

УДК 519.21
MSC 60F17

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА ВЫХОДА ОБОБЩЕННОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗА НЕВОЗРАСТАЮЩУЮ ГРАНИЦУ

А.И. САХАНЕНКО, В.И. ВАХТЕЛЬ, Е.И. ПРОКОПЕНКО, А.Д. ШЕЛЕПОВА

ABSTRACT. We consider a compound renewal process, which is also known as a cumulative renewal process, or a continuous time random walk. We suppose that the jump size has zero mean and finite variance, whereas the renewal-time has a moment of order greater than $3/2$. We investigate the asymptotic behaviour of the probability that this process is staying above a moving non-increasing boundary up to time T which tends to infinity. Our main result is a generalization of a similar one for ordinary random walks obtained earlier by Denisov D., Sakhanenko A. and Wachtel V. in *Ann. Probab.*, 2018.

Keywords: compound renewal process, continuous time random walk, boundary crossing problems, moving boundaries, exit times.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Пусть $(X_1, v_1), (X_2, v_2), \dots$ — бесконечная последовательность независимых и одинаково распределенных пар случайных величин таких, что

$$(1) \quad \mathbf{E}X_1 = 0, \quad \mathbf{E}X_1^2 = 1 = \mathbf{E}v_1 \quad \text{и} \quad v_1 > 0 \quad \text{п.н.}$$

Положим $S_0 = V_0 = 0$ и

$$S_k = X_1 + \dots + X_k, \quad V_k = v_1 + \dots + v_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

SAKHANENKO, A.I., WACHTEL, V.I., PROKOPENKO, E.I., SHELEPOVA, A.D., ON THE ASYMPTOTICS OF THE DISTRIBUTION OF THE EXIT TIME BEYOND A NON-INCREASING BOUNDARY FOR A COMPOUND RENEWAL PROCESS.

© 2021 Саханенко А.И., Вахтель В.И., Прокопенко Е.И., Шелепова А.Д.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и DFG в рамках научного проекта №20-51-12007. Работа первого и третьего авторов по разделам 2 и 3 статьи проводилась также при частичной поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.3., проект № 0314-2019-0008.

Поступила 20 ноября 2020 г., опубликована 12 января 2021 г.

а при $t \geq 0$ введем в рассмотрение случайный процесс

$$S(t) = S_{N(t)}, \quad \text{где } N(t) = \max\{k \geq 0 : V_k \leq t\}.$$

Поскольку $N(t)$ — это функция восстановления, построенная по случайным величинам v_1, v_2, \dots , то процесс $S(t)$ обычно называют обобщенным процессом восстановления (см., например, [1]), хотя в иностранной (особенно физической) литературе его зовут также случайным блужданием с непрерывным временем (см., например, [2]).

Пусть теперь $g(t)$ — некоторая функция, определенная при $t \geq 0$. Введем в рассмотрение случайную величину

$$(2) \quad \tau := \inf\{t > 0 : S(t) \leq g(t)\} = \inf\{t > 0 : Z(t) := S(t) - g(t) \leq 0\},$$

равную первому моменту пересечения сверху вниз уровня $g(t)$ нашим непрерывным случайным блужданием. Основная цель настоящей работы — изучить асимптотику для вероятности

$$(3) \quad \mathbf{P}(\tau > T) = \mathbf{P}\left(\underline{Z}(T) := \inf_{0 < t \leq T} (S(t) - g(t)) \leq 0\right) \quad \text{при } T \rightarrow \infty,$$

в случае когда

$$(4) \quad g(t) = o(\sqrt{t}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

и, дополнительно,

$$(5) \quad \mathbf{P}(\tau > T) > 0 \quad \text{при всех } T > 0.$$

1.2. В частном случае, когда все $v_i \equiv 1$ не случайны, наш процесс $S(t) = S_{[t]} = X_1 + \dots + X_{[t]}$ превращается в обычное случайное блуждание. (Всюду в работе $[x]$ обозначает целую часть числа x .) А если $g(t) = g([t])$ кусочно-постоянна, то $\tau = \tilde{\tau}$ при

$$\tilde{\tau} = \inf\{k \geq 1 : S_k \leq g(k)\},$$

где инфимум берется по натуральным числам. Как следует из работы [3] в этом случае

$$(6) \quad \sqrt{n}\mathbf{P}(\tilde{\tau} > n) \sim \sqrt{2/\pi}\tilde{U}(n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где

$$\tilde{U}(t) = \mathbf{E}[S([t]) - g([t]); \tilde{\tau} > t]$$

является медленно меняющейся функцией при $t \rightarrow \infty$.

В еще более частном случае, когда $g([t])$ является постоянной, асимптотика (6) была получена ранее (см., например, [4]), используя факторизационные тождества. Однако для непостоянных функций $g(t)$ метод факторизационных тождеств не применим. В работе [3] был представлен другой, более вероятностный метод, который оказался применим для непостоянных функций с условием (4), а также для неодинаково распределенных величин $\{X_k\}$, которые удовлетворяют условию Линдберга.

В данной статье мы ходим получить асимптотику $\mathbf{P}(\tau > t)$, используя некоторые модификации метода из работы [3].

1.3. Сформулируем наши основные результаты.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1), (4), (5) и

$$(7) \quad \mathbf{E}v_1^{\gamma_1} < \infty \quad \text{при некотором } \gamma_1 > 3/2.$$

Тогда для независимых и одинаково распределенных пар случайных величин $\{(X_i, v_i) : i = 1, 2, \dots\}$ справедливо неравенство:

$$(8) \quad \sqrt{T} \mathbf{P}(\tau > T) \leq U_+(T) \quad \text{при всех } T > 0,$$

где функция $U_+(T)$ медленно меняется при $T \rightarrow \infty$.

Положим

$$(9) \quad U_n := \mathbf{E}[S_n - g(V_n); \tau > V_n], \quad n = 1, 2, \dots$$

Теорема 2. Пусть выполнены все условия Теоремы 1. Тогда для любой монотонно невозрастающей функции $g(\cdot)$ имеет место следующая асимптотика

$$(10) \quad \sqrt{T} \mathbf{P}(\tau > T) \sim \sqrt{2/\pi} U(T) \quad \text{при } T \rightarrow \infty,$$

где

$$U(T) := U_{\lfloor T \rfloor} \geq U_1 > 0 \quad \text{при } T \geq 1$$

является монотонно неубывающей функцией, которая медленно меняется при $T \rightarrow \infty$.

Таким образом, в частном случае, когда все $v_i \equiv 1$, а невозрастающая функция $g(t) = g(\lfloor t \rfloor)$ кусочно-постоянна, из теоремы 2 вытекает утверждение (4), полученное ранее в работе [3].

Отметим, что теорема 2 вытекает из следующего полезного утверждения.

Теорема 3. Пусть выполнены все условия Теоремы 2. Тогда имеет место следующая асимптотика

$$(11) \quad \sqrt{n} \mathbf{P}(\tau > V_n) \sim \sqrt{2/\pi} U_n \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отметим еще, что

$$\mathbf{P}(\tau > V_n) > 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда } U_n > 0.$$

$$\mathbf{P}(\tau > T) > 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда } U(T) > 0.$$

Остальная часть работы посвящена доказательствам теорем 1 – 3. Условимся, что ниже мы предполагаем выполненными все условия теоремы 1 даже в случаях, когда это не оговорено. А вот выполнение дополнительных условий из теоремы 2 мы всегда будем тщательно оговаривать.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Условимся, что всюду далее в работе мы используем неслучайные действительные числа

$$T, t, u, x, y, h > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{и} \quad i, j, l, m, n = 1, 2, \dots$$

Отметим, что из условия (4) вытекает, что

$$(12) \quad G(T) := \sup_{0 \leq t \leq T} |g(t)| = o(\sqrt{T}) \quad \text{и} \quad \varkappa(T) := \sup_{t \geq T} \frac{G(t)}{\sqrt{t}} \downarrow 0$$

при $T \uparrow \infty$.

2.1. Свойства величин U_n . Напомним, что величины $Z(\cdot)$, $\underline{Z}(\cdot)$ и $\tau > 0$ определены в (2) и (3). Положим

$$\beta := \inf\{n > 0 : \underline{Z}(V_n) \leq 0\} = \inf\{n > 0 : \tau \leq V_n\}, \quad Z_n := S_n - g(V_n) = Z(V_n),$$

и заметим, что ввиду (9)

$$U(V_n) = U_n = \mathbf{E}[Z_n^*] \quad \text{при} \quad Z_n^* := Z_n \mathbf{I}\{\beta > n\} = Z_n \mathbf{I}\{\tau > V_n\}.$$

Нетрудно понять, что последовательность троек

$$(13) \quad \mathcal{M} := \{(V_k, Z(V_k), \underline{Z}(V_k)) : k = 1, 2, \dots\}$$

образует цепь Маркова, а β — момент останковки этой цепи.

Лемма 1. Пусть α — момент останковки цепи Маркова \mathcal{M} такой, что $1 \leq \alpha \leq n$. Тогда при выполнении условий теоремы 1

$$(14) \quad \mathbf{E}Z_\alpha^* - \mathbf{E}Z_n^* = \mathbf{E}[Z_\beta; \alpha < \beta \leq n] + \mathbf{E}[g(V_{\beta \wedge n}) - g(V_\alpha); \alpha < \beta \wedge n].$$

Кроме того,

$$(15) \quad \mathbf{E}Z_\alpha^* - \mathbf{E}Z_n^* \geq \mathbf{E}[X_\beta; \alpha < \beta \leq n] - 2\mathbf{E}[G(V_{\beta \wedge n}); \alpha < \beta \wedge n].$$

Доказательство. Повторяя вывод леммы 20 в [3, стр 3330] при $\nu := \alpha$ и $T_g := \beta$, мы получим следующее равенство

$$(16) \quad \mathbf{E}[Z_\alpha^*] = -\mathbf{E}[S_\beta; \beta \leq \alpha] - \mathbf{E}[g(V_\alpha); \beta > \alpha].$$

Введем события

$$A_1 := \{\alpha < \beta \leq n\} \quad \text{и} \quad A_2 := \{\alpha < n < \beta\}.$$

Ясно, что

$$(17) \quad \{\alpha < \beta \wedge n\} = \{\alpha < \beta, \alpha < n\} = A_1 \cup A_2.$$

Из (16) мы получаем, что

$$(18) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}Z_\alpha^* + \mathbf{E}[S_\beta; \beta \leq \alpha] &= -\mathbf{E}[g(V_\alpha); \alpha < \beta] \\ &= -\mathbf{E}[g(V_\alpha); A_2] - \mathbf{E}[g(V_n); \alpha = n < \beta] - \mathbf{E}[g(V_\alpha); A_1]. \end{aligned}$$

А при $\alpha = n$ мы имеем из (18), что

$$(19) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}Z_n^* + \mathbf{E}[S_\beta; \beta \leq n] &= -\mathbf{E}[g(V_n); \beta > n] \\ &= -\mathbf{E}[g(V_n); A_2] - \mathbf{E}[g(V_n); \alpha = n < \beta]. \end{aligned}$$

Вычитая теперь (19) из (18) мы находим, что

$$(20) \quad \mathbf{E}Z_\alpha^* - \mathbf{E}Z_n^* = \mathbf{E}[S_\beta - g(V_\alpha); A_1] + \mathbf{E}[g(V_n) - g(V_\alpha); A_2].$$

Ввиду (17), нетрудно заметить, что (20) можно переписать в виде (14).

Далее, по определению величины β

$$S_\beta = S_{\beta-1} + X_\beta > g(V_{\beta-1}) + X_\beta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_\beta - g(V_\alpha); A_1] &\geq \mathbf{E}[g(V_{\beta-1}) - g(V_\alpha) + X_\beta; A_1] \\ &\geq \mathbf{E}[X_\beta; A_1] - 2\mathbf{E}[G(V_n); A_1], \end{aligned}$$

где еще было использовано определение величины $G(\cdot)$ из (12). Аналогично,

$$\mathbf{E}[g(V_n) - g(V_\alpha); A_2] \geq -2\mathbf{E}[G(V_n); A_2].$$

Подставляя теперь две последние оценки в (20), мы получим (15). \square

Лемма 2. Пусть верны все условия теоремы 2. Тогда $\mathbf{E}Z_\alpha^* \leq \mathbf{E}Z_n^*$ для любого момента остановки α цепи Маркова \mathcal{M} такой, что $1 \leq \alpha \leq n$. Кроме того, в этом случае

$$(21) \quad \forall n \geq m \geq 1 \quad U_n = \mathbf{E}Z_n^* \geq \mathbf{E}Z_m^* = U_m \geq U_1 > 0.$$

Доказательство. Для монотонно невозрастающих функций $g(\cdot)$ из (14) вытекает, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}Z_\alpha^* - \mathbf{E}Z_n^* \leq \mathbf{E}[Z_\beta; \alpha < \beta \leq n] \\ & = \mathbf{E}[\min\{Z(t) : V_{\beta-1} < t \leq V_\beta\}; \alpha < \beta \leq n] \leq \mathbf{E}[0; \alpha < \beta \leq n] = 0. \end{aligned}$$

Тем самым первое утверждение леммы доказано. А при $\alpha = m$ из него следует (21). \square

2.2. Оценки для распределений величин V_n . Положим

$$\gamma_0 := \min\{\gamma_1, 2\} \in (3/2, 2] \quad \text{и} \quad \gamma := \gamma_0 - 3/2 \in (0, 1/2].$$

Лемма 3. При всех $u > 0$ и $n = 1, 2, \dots$

$$(22) \quad \mathbf{P}(|V_n - n| > u) \leq \frac{\mathbf{E}|V_n - n|^{\gamma_0}}{u^{\gamma_0}} \leq \frac{C_1 n}{u^{\gamma_0}}, \quad \text{где} \quad C_1 := 2\mathbf{E}|v_1 - 1|^{\gamma_0} < \infty.$$

В частности, при $u = n$,

$$(23) \quad n\mathbf{P}(V_n > 2n) \leq \mathbf{E}[|V_n - n|; |V_n - n| > n] \leq \frac{C_1 \sqrt{n}}{n^\gamma}.$$

Кроме того, для любого $\delta \in (0, 1)$

$$(24) \quad \sqrt{n}\mathbf{P}(|V_n - n| > n^{1-\delta\gamma/\gamma_0}) \leq \frac{C_1}{n^{(1-\delta)\gamma}}.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что $V_k - k = \sum_{i=1}^k (v_i - 1)$ есть сумма независимых случайных величин $\{v_i - 1\}$ с нулевыми средними. Поскольку $\gamma_0 \in [1, 2]$, то по неравенству фон Бара – Эссена [5]

$$(25) \quad \mathbf{E}|V_n - n|^{\gamma_0} \leq 2n\mathbf{E}|v_1 - 1|^{\gamma_0} = C_1 n < \infty.$$

Здесь $C_1 < \infty$ ввиду условия (7). Используя идею Чебышева, из (25) мы получаем (22).

Далее, при $u = n$ из (22) следует (23), а при $u = n^{1-\delta\gamma/\gamma_0}$ из (22) мы находим (24), поскольку в этом случае

$$u^{\gamma_0} = n^{(1-\delta\gamma/\gamma_0)\gamma_0} = n^{\gamma_0 - \delta\gamma} = n^{3/2 + (1-\delta)\gamma}.$$

\square

Лемма 4. При выполнении условий леммы 1 для всех $n > 0$

$$(26) \quad \hat{E}_{\alpha, n} := 2\mathbf{E}[G(V_n); \beta > \alpha] \leq 3\kappa(2n)\sqrt{n}\mathbf{P}(\beta > \alpha) + \frac{3C_1\kappa(2n)}{n^\gamma}.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что ввиду (23)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[V_n; V_n > 2n] &= \mathbf{E}[n; V_n > 2n] + \mathbf{E}[V_n - n; V_n - n > n] \\ &\leq n\mathbf{P}(V_n > 2n) + \frac{C_1 \sqrt{n}}{n^\gamma} \leq \frac{2C_1 \sqrt{n}}{n^\gamma}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (12) мы имеем:

$$(27) \quad \widehat{E}_n := \mathbf{E}[G(V_n); V_n > 2n] \leq \varkappa(2n)\mathbf{E}[\sqrt{V_n}; V_n > 2n] \leq \frac{\varkappa(2n)}{\sqrt{2n}}\mathbf{E}[V_n; V_n > 2n] \\ \leq \frac{\varkappa(2n)}{\sqrt{2n}} \frac{2C_1\sqrt{n}}{n^\gamma} = \frac{\sqrt{2}C_1\varkappa(2n)}{n^\gamma}.$$

Далее, из определения в (26)

$$\widehat{E}_{\alpha,n} = 2\mathbf{E}[G(V_n); \beta > \alpha] \leq 2G(2n)\mathbf{P}(\beta > \alpha) + 2\widehat{E}_n.$$

Но из этого соотношения и (27) очевидно следует (26), поскольку в силу (12)

$$2G(2n) \leq 2\varkappa(2n)\sqrt{2n} \quad \text{и} \quad 2\sqrt{2} < 3.$$

□

2.3. Оценки в одной граничной задаче. Положим

$$(28) \quad \varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \quad \text{и} \quad \Psi(x) := 2 \int_0^{x^+} \varphi(y)dy.$$

Напомним, что

$$(29) \quad \Psi(x) = \mathbf{P}(x + \min_{0 \leq t \leq 1} W(t) > 0),$$

где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс. При $0 \leq k < n$ введем обозначения

$$(30) \quad \mu_{k,n} := \min_{k < j \leq n} \sum_{i=k+1}^j X_i, \quad q_{k,n}(x) := \mathbf{P}(x + \mu_{k,n} > 0).$$

Лемма 5. Для независимых и одинаково распределенных X_1, X_2, \dots , удовлетворяющих условию (1)

$$(31) \quad \pi_n := \sup_x |q_{0,n}(x) - \Psi(x/\sqrt{n})| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

В частности, при всех $n > k \geq 0$ и всех x

$$(32) \quad |q_{k,n}(x) - \Psi(\frac{x}{\sqrt{n-k}})| \leq \pi_{n-k}.$$

Это утверждение впервые было получено Эрдешем и Кацем в [6]). В настоящее время его можно доказать большим числом способов, используя идеи из функциональной ЦПТ (см., например, доказательство леммы 18 в [3]). А из [7], [8], [9] можно извлечь оценки для величины π_n в терминах срезанных моментов третьего порядка случайной величины X_1 .

При всех $n > k \geq 0$ и всех x введем обозначение

$$(33) \quad Q_{k,n}(t, x) := \mathbf{P}(\tau > V_n, V_n \leq 2n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x).$$

Лемма 6. Для любых $n > k \geq 0$ и всех $x \geq 0$

$$(34) \quad Q_{k,n}(t, x) \leq C_0 \frac{x}{\sqrt{n-k}} + \rho_{k,n},$$

где

$$(35) \quad C_0 := 2\varphi(0) = \sqrt{2/\pi} \quad \text{и} \quad \rho_{k,n} := \pi_{n-k} + \frac{2G(2n)}{\sqrt{n-k}}.$$

Лемма 7. В условиях леммы 6

$$(36) \quad Q_{k,n}(t, x) \geq \Psi(x/\sqrt{n}) - \rho_{n-k} - p_{k,n}(t, x),$$

где

$$p_{k,n}(t, x) := \mathbf{P}(V_n > 2n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x).$$

2.4. Доказательства лемм 6 и 7. Введем обозначение

$$M_{k,n} := \min\{Z(t) : V_k \leq t \leq V_n\}.$$

Лемма 8. При любых $n > m \geq k > 0$

$$(37) \quad |M_{k,n} - Z_k - \mu_{k,n}| \leq 2G(V_n).$$

Доказательство. Пусть $V_k \leq t \leq V_n$. В этом случае

$$Z(t) - Z_k = Z(t) - Z(V_k) = S_{N(t)} - S_k - g(t) + g(V_k),$$

а потому

$$(38) \quad |Z(t) - Z_k - \sum_{i=k+1}^{N(t)} X_i| \leq 2G(V_n) \quad \text{при} \quad V_k \leq t \leq V_n.$$

Нетрудно понять, что из (38) вытекает (37). \square

Легко видеть, что (33) можно переписать в следующем эквивалентном виде

$$Q_{k,n}(t, x) = \mathbf{P}(M_{k,n} > 0, V_n \leq 2n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x).$$

Отсюда с учётом (37) имеем:

$$(39) \quad \begin{aligned} Q_{k,n}(t, x) &\leq \mathbf{P}(Z_k + \mu_{k,n} + 2G(V_n) > 0, V_n \leq 2n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x) \\ &\leq \mathbf{P}(x + \mu_{k,n} + 2G(2n) > 0 | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x) = q_{k,n}(x + 2G(2n)). \end{aligned}$$

Аналогично, хотя и чуть сложнее, получается неравенство в другую сторону

$$(40) \quad \begin{aligned} Q_{k,n}(t, x) &\geq \mathbf{P}(Z_k + \mu_{k,n} - 2G(V_n) > 0, V_n \leq 2n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x) \\ &\geq \mathbf{P}(x + \mu_{k,n} - 2G(2n) > 0, V_n \leq 2n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x) \\ &\geq q_{k,n}(x - 2G(2n)) - p_{k,n}(t, x). \end{aligned}$$

Далее из (32) получаем:

$$(41) \quad \left| q_{k,n}(x \pm 2G(2n)) - \Psi\left(\frac{x \pm 2G(2n)}{\sqrt{n-k}}\right) \right| \leq \pi_{n-k}.$$

А из явного вида (28) функции Ψ находим, что

$$(42) \quad \left| \Psi\left(\frac{x \pm 2G(2n)}{\sqrt{n-k}}\right) - \Psi\left(\frac{x}{\sqrt{n-k}}\right) \right| \leq \frac{2G(2n)}{\sqrt{n-k}},$$

$$(43) \quad \Psi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \leq \Psi\left(\frac{x}{\sqrt{n-k}}\right) \leq \frac{2\varphi(0)x}{\sqrt{n-k}} = C_0 \frac{x}{\sqrt{n-k}}.$$

Подставляя теперь (42) и (43) в (41) и учитывая определение (35) величин $\rho_{k,n}$, мы имеем:

$$(44) \quad \Psi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \rho_{k,n} \leq q_{k,n}(x - 2G(2n)) < q_{k,n}(x + 2G(2n)) < C_0 \frac{x}{\sqrt{n-k}} + \rho_{k,n}.$$

Из (39) и (44) немедленно вытекает утверждение (34) леммы 6. А неравенство (36) следует из (40) и (44).

3. ОЦЕНКИ СВЕРХУ ДЛЯ $\mathbf{P}(\tau > V_n)$

3.1. Применение леммы 6. Нетрудно понять, что

$$(45) \quad \bar{\pi}_n := \sup_{k \geq n/2} \pi_k \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

Лемма 9. Для произвольных $n \geq 2m > 0$

$$(46) \quad q_n := \mathbf{P}(\tau > V_n) \leq \frac{C_0 U_m}{\sqrt{n-m}} + (\bar{\pi}_n + 4\chi(2n))\mathbf{P}(\tau > V_m) + \frac{C_1}{n^{1/2+\gamma}}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что при всех $n > m > 0$

$$(47) \quad P_n := \mathbf{P}(\tau > V_n, V_n \leq 2n) = \mathbf{P}(\tau > V_n, V_n \leq 2n, \tau > V_m) \\ = \mathbf{E}[Q_{m,n}(V_m, Z_m); \tau > V_m].$$

Здесь мы использовали определение (33) и марковское свойство пар $\{(V_m, Z_m) : m = 1, 2, \dots\}$. Подставляя теперь в (47) оценку (34) мы найдем, что при $k = m$

$$(48) \quad P_n \leq \frac{C_0}{\sqrt{n-m}} \mathbf{E}[Z_m; \tau > V_m] + \rho_{n,m} \mathbf{P}(\tau > V_m) \\ = \frac{C_0}{\sqrt{n-m}} U_m + \rho_{n,m} \mathbf{P}(\tau > V_m).$$

Далее, ввиду определения (45),

$$(49) \quad \forall n \geq 2m > 0 \quad \pi_{n-m} \leq \bar{\pi}_n \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-m}} \leq \sqrt{2}.$$

Подставляя (12) и (49) в (35), имеем

$$(50) \quad \rho_{m,n} = \pi_{n-m} + \frac{2G(2n)}{\sqrt{n-m}} \leq \bar{\pi}_n + \frac{2\chi(2n)\sqrt{2n}}{\sqrt{n/2}} = \bar{\pi}_n + 4\chi(2n).$$

Наконец, ввиду (47) очевидно, что

$$(51) \quad \mathbf{P}(\tau > V_n) \leq P_n + \mathbf{P}(V_n > 2n) \leq P_n + \frac{C_1}{n^{1/2+\gamma}}.$$

При выводе последней оценки в (51) мы также использовали (23). Подставим теперь сначала в (48) оценку для $\rho_{m,n}$ из (50), а затем подставим (48) в (51). В итоге мы получим (46). \square

3.2. Грубая оценка сверху для $\mathbf{P}(\tau > V_n)$. Введем числа

$$(52) \quad T_0 := \min \{n \geq 2 : \bar{\rho}_n := \bar{\pi}_n + 4\chi(2n) \leq 1/4\} < \infty,$$

$$(53) \quad C_2 := 3 + \frac{2C_1}{U_1} + \max_{n < T_0} \frac{\sqrt{n}\mathbf{P}(\tau > V_n)}{U_n} < \infty.$$

Лемма 10. В условиях Теоремы 2

$$(54) \quad Q_n := \sqrt{n}\mathbf{P}(\tau > V_n) \leq C_2 U_n \quad \forall n > 0.$$

Доказательство. При $n < T_0$ неравенство (54) очевидно следует из определения (53) величины C_2 .

Пусть теперь $n \geq T_0 \geq 2$ — это минимальное натуральное число, для которого неравенство (54) еще не доказано. Поскольку $m := \lfloor n/2 \rfloor \leq n/2 < n \leq 3m$, то при указанном $m < n$ неравенство (54) уже доказано:

$$(55) \quad q_m = \mathbf{P}(\tau > V_m) \leq \frac{C_2 U_m}{\sqrt{m}} \leq \frac{\sqrt{3} C_2 U_n}{\sqrt{n}}.$$

При выводе (55) было также использовано неравенство (21).

Подставляя теперь (55) в (46) и используя опять (21), мы получаем:

$$(56) \quad Q_n \leq C_0 \frac{\sqrt{n} U_m}{\sqrt{n-m}} + \sqrt{n} \bar{\rho}_n q_m + \frac{C_1}{n^\gamma} \leq \sqrt{2} C_0 U_n + \sqrt{3} C_2 U_n \bar{\rho}_n + \frac{C_1 U_n}{n^\gamma U_1}.$$

Но в силу (52) и (53)

$$(57) \quad \sqrt{2} C_0 + \frac{C_1}{U_1} \leq \frac{C_2}{2} \quad \text{и} \quad \sqrt{3} \bar{\rho}_n \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq T_0.$$

Из этих фактов и (56) имеем:

$$(58) \quad Q_n \leq \frac{C_2}{2} U_n + \frac{C_2}{2} U_n = C_2 U_n.$$

И тем самым мы доказали (54) при выбранном n .

Утверждение леммы теперь вытекает из принципа математической индукции. \square

3.3. Асимптотическая оценка сверху для $\mathbf{P}(\tau > V_n)$. При произвольном $\varepsilon \in (0, 1/2]$ положим

$$(59) \quad T_1(\varepsilon) := \min \left\{ n \geq \frac{2}{\varepsilon} : \frac{\sqrt{n} \bar{\rho}_n}{\sqrt{[\varepsilon n]}} C_2 + \frac{C_1}{U_1 n^\gamma} \leq C_0 \varepsilon \right\} < \infty.$$

Лемма 11. В условиях теоремы 2 при любом $\varepsilon \in (0, 1/2]$

$$(60) \quad \sqrt{1-\varepsilon} \sqrt{n} \mathbf{P}(\tau > V_n) \leq (1+\varepsilon) U_n \quad \forall n \geq T_1(\varepsilon).$$

Доказательство. При $m := \lfloor \varepsilon n \rfloor$ мы имеем право использовать оценку (46) при всех $n \geq 2$. Подставляя теперь неравенство (54) в (46) и применяя несколько раз соотношения из (21), имеем:

$$(61) \quad \begin{aligned} \sqrt{1-\varepsilon} \sqrt{n} \mathbf{P}(\tau > V_n) &\leq \sqrt{n-m} \mathbf{P}(\tau > V_n) \\ &\leq C_0 U_m + \sqrt{n-m} \bar{\rho}_n \frac{C_2 U_m}{\sqrt{m}} + \frac{C_1 U_1}{U_1 n^\gamma} \\ &\leq U_n \left(C_0 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} C_2 \bar{\rho}_n + \frac{C_1}{U_1 n^\gamma} \right). \end{aligned}$$

Из (61) при $n \geq T_1(\varepsilon)$ следует (60) ввиду определения (59) числа $T_1(\varepsilon)$. \square

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

4.1. Основная идея. Введем в рассмотрение вспомогательные целочисленные случайные величины $\nu(h)$ и ν_m :

$$(62) \quad \nu(h) := \inf \{ k > 0 : Z_k \geq h \}, \quad \nu_m = \min \{ \nu(h), m \}, \quad m, h > 0,$$

где целое $m = m(n) > 0$ и действительное $h = h(n) > 0$ будут выбраны позже. Напомним, что обозначения $Q_{k,n}(t, x)$ и P_n были введены ранее в (33) и (47).

Лемма 12. При любых $n > t > 0$

$$(63) \quad P_n = \mathbf{E}[Q_{\nu_m, n}(V_{\nu_m}, Z_{\nu_m}); \beta > \nu_m, V_{\nu_m} \leq 2n].$$

Доказательство. Из формулы полной вероятности имеем:

$$(64) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}(\tau > V_n, V_n \leq 2n) &= \sum_{k=1}^m \mathbf{P}(\nu_m = k, \tau > V_n, V_n \leq 2n) \\ &= \sum_{k=1}^m \mathbf{P}(\nu_m = k, \tau > V_n, V_n \leq 2n, \tau > V_k, V_k \leq 2n). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали тот факт, что всегда $V_k < V_n$. Далее, нетрудно понять, что ν_m — момент остановки введенной в (13) цепи Маркова \mathcal{M} . Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\nu_m = k, \tau > V_n, V_n \leq 2n) &= \mathbf{P}(\nu_m = k, \tau > V_n, V_n \leq 2n, \tau > V_k, V_k \leq 2n) \\ &= \mathbf{E}[Q_{k, n}(V_k, Z(V_k), T); \beta > k = \nu_m, V_k \leq 2n], \end{aligned}$$

поскольку события $\{\tau > V_k\}$ и $\{\beta > k\}$ совпадают.

Подставляя это равенство в (64), мы получим (63). \square

Замечание 1. Мы увидим далее, что идея ввести момент остановки вида ν_m , при специально подбираемых t и h , является очень продуктивной. Эта идея принадлежит В. Вахтелю и Д. Денисову (см. [10], [11], [12]).

4.2. Применение леммы 7.

Лемма 13. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при всех $n \geq 2t > 0$ для любых $h > 0$

$$(65) \quad \begin{aligned} \sqrt{n}\mathbf{P}(\tau > V_n) &\geq \sqrt{n}P_n \geq C_0\mathbf{E}[Z_{\nu_m}^*; A_{m, n}] \left(1 - \frac{h^2}{n} - \frac{\sqrt{n}\bar{\rho}_n}{C_0h}\right) \\ &\quad - \sqrt{n}\bar{\rho}_n\mathbf{P}(\tau > V_m) - C_0E_{m, n} - \sqrt{n}\mathbf{P}(V_n > 2n), \end{aligned}$$

где

$$(66) \quad A_{m, n} := \{\tau > V_{\nu_m}, V_{\nu_m} \leq 2n\}, \quad E_{m, n} := \mathbf{E}[Z_{\nu_m}^*; Z_{\nu_m}^* > 2h, V_{\nu_m} \leq 2n].$$

Кроме того,

$$(67) \quad \mathbf{P}(\beta > \nu_m) - \mathbf{P}(V_n > 2n) \leq \mathbf{P}(A_{m, n}) \leq \mathbf{P}(\tau > V_m) + \mathbf{E}[Z_{\nu_m}^*; A_{m, n}]/h.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что в силу (50) и (52) неравенство (36) можно переписать в следующем виде

$$(68) \quad Q_{k, n}(t, x) \geq \Psi(x/\sqrt{n}) - \bar{\rho}_n - p_{k, n}(t, x).$$

Подставляя $t = V_{\nu_m}$ и $x = Z_{\nu_m}^*$ в (68) и используя (63), получаем:

$$(69) \quad P_n \geq \mathbf{E}[\Psi(Z_{\nu_m}^*/\sqrt{n}); A_{m, n}] - \bar{\rho}_n\mathbf{P}(A_{m, n}) - \mathbf{P}(V_n > 2n).$$

Далее,

$$\mathbf{P}(A_{m, n}, \tau \leq V_m) = \mathbf{P}(Z_{\nu_m}^* > h, A_{m, n}) \leq \mathbf{E}[Z_{\nu_m}^*; A_{m, n}]/h.$$

Но из этого факта немедленно вытекает, что

$$(70) \quad \mathbf{P}(A_{m, n}) \leq \mathbf{P}(\tau > V_m) + \mathbf{E}[Z_{\nu_m}^*; A_{m, n}]/h.$$

Кроме того,

$$\mathbf{P}(\beta > \nu_m) = \mathbf{P}(\tau > V_{\nu_m}) \leq \mathbf{P}(A_{m, n}) + \mathbf{P}(V_{\nu_m} > 2n).$$

В частности, из последнего неравенства и (70) следует (67).

Заметим теперь (см. [3], стр 3328), что

$$C_0 y \geq \Psi(y) \geq C_0 y \left(1 - \frac{y^2}{6}\right) \quad \text{для всех } y \geq 0.$$

Следовательно,

$$\Psi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \geq C_0 \frac{x \mathbf{I}[x \leq 2h]}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{4h^2}{6n}\right) \geq C_0 \frac{x}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{h^2}{n}\right) - C_0 \frac{x \mathbf{I}[x > 2h]}{\sqrt{n}}.$$

Полагая в последнем выражении $x = Z_{\nu_m}^*$ и беря математические ожидания, приходим к неравенству:

$$(71) \quad \mathbf{E} \left[\Psi \left(\frac{Z_{\nu_m}^*}{\sqrt{n}} \right); A_{m,n} \right] \geq \frac{C_0 \mathbf{E} [Z_{\nu_m}^*; A_{m,n}]}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{h^2}{n}\right) - \frac{C_0 E_{m,n}}{\sqrt{n}},$$

где величина $E_{m,n}$ была введена в (66).

Наконец, подставляя (70) и (71) в (69), мы получаем (65). \square

4.3. Оценка сверху для U_n . Заметим, что при $n \rightarrow \infty$

$$(72) \quad \lambda_n^2 := \min\{\varepsilon > 0 : \mathbf{E}[X_1^2; |X_1| > \varepsilon\sqrt{n}] \leq \varepsilon^2\} \rightarrow 0.$$

Лемма 14. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при всех $n \geq m > 0$

$$(73) \quad U_n \leq \left(1 + \frac{\sqrt{n}\delta_{1,n}}{h}\right) \mathbf{E} [Z_{\nu_m}^*; A_{m,n}] + \sqrt{n}\delta_{1,n} \mathbf{P}(\beta > m) + \left(2\delta_{1,n} + \frac{h}{\sqrt{n}}\right) \frac{C_1}{n^\gamma},$$

где

$$(74) \quad \delta_{1,n} := 2\lambda_n + 3\kappa(2n) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Из (15) при $\alpha = \nu_m$ вытекает, что

$$(75) \quad \hat{\Delta}_{m,n} := \mathbf{E} Z_n^* - \mathbf{E} Z_{\nu_m}^* \leq \mathbf{E}[-X_\beta; \nu_m < \beta \leq n] + \hat{E}_{\nu_m,n},$$

где величина $\hat{E}_{\nu_m,n}$ была введена и оценена в (26). Далее

$$(76) \quad U_n - \mathbf{E} [Z_{\nu_m}^*; A_{m,n}] = \mathbf{E} Z_n^* - \mathbf{E} [Z_{\nu_m}^*; A_{m,n}] = \hat{\Delta}_{m,n} + \Delta_{m,n}^*,$$

где

$$(77) \quad \begin{aligned} \Delta_{m,n}^* &:= \mathbf{E} Z_{\nu_m}^* - \mathbf{E} [Z_{\nu_m}^*; A_{m,n}] = \mathbf{E} [Z_{\nu_m}^*; \tau > V_{\nu_m}, V_{\nu_m} > 2n] \\ &\leq h \mathbf{P}(V_{\nu_m} > 2n) \leq h \mathbf{P}(V_n > 2n) \leq \frac{C_1 h}{n^{1/2+\gamma}}. \end{aligned}$$

По определению величины ν_m (см. (62)), при любом $y > 0$ для всех $2 \leq j \leq n$ мы имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{j,m}(y) &:= \mathbf{E}[-X_j; \beta > j - 1 \geq \nu_m, -X_j > y] \\ &= \mathbf{E}[-X_j; -X_j > y] \mathbf{P}(\beta > j - 1 \geq \nu_m), \end{aligned}$$

поскольку событие $\{\beta > j - 1 \geq \nu_m\}$ порождается случайными величинами X_1, \dots, X_{j-1} , которые не зависят от X_j . Следовательно

$$\begin{aligned} E_{j,m}(y) &:= \mathbf{E}[-X_\beta; \beta = j > \nu_m, -X_\beta > y] \leq \tilde{E}_{j,m}(y) \\ &= \mathbf{E}[-X_1; -X_1 > y] \mathbf{P}(\beta > j - 1 \geq \nu_m) \\ &\leq \frac{\mathbf{E}[X_1^2; |X_1| > y]}{y} \mathbf{P}(\beta > \nu_m). \end{aligned}$$

Значит, для любого $y > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[-X_\beta; n \geq \beta > \nu_m] &\leq y \mathbf{P}(\beta > \nu_m) + \mathbf{E}[-X_\beta; -X_\beta > y, n \geq \beta > \nu_m] \\ &= y \mathbf{P}(\beta > \nu_m) + \sum_{j=2}^n E_{j,m}(y) \leq y \mathbf{P}(\beta > \nu_m) + n \frac{\mathbf{E}[X_1^2; |X_1| > y]}{y} \mathbf{P}(\beta > \nu_m). \end{aligned}$$

А полагая $y = \lambda_n \sqrt{n}$ и учитывая (72), мы получаем:

$$(78) \quad \mathbf{E}[-X_\beta; n \geq \beta > \nu_m] \leq 2\lambda_n \sqrt{n} \mathbf{P}(\beta > \nu_m).$$

Подставив теперь (78) и (26) в (75), имеем:

$$(79) \quad \hat{\Delta}_{m,n} \leq \sqrt{n} \delta_{1,n} \mathbf{P}(\beta > \nu_m) + 3C_1 \varkappa(2n)/n^\gamma.$$

Далее, из (67) и (23) находим:

$$(80) \quad \mathbf{P}(\beta > \nu_m) \leq \mathbf{P}(\tau > V_m) + \mathbf{E}[Z_{\nu_m}^*; A_{m,n}] / h + C_1/n^\gamma.$$

Но (80) позволяет нам переписать (79) в следующем виде:

$$(81) \quad \hat{\Delta}_{m,n} \leq \sqrt{n} \delta_{1,n} \frac{\mathbf{E}[Z_{\nu_m}^*; A_{m,n}]}{h} + \sqrt{n} \delta_{1,n} \mathbf{P}(\beta > m) + 2C_1 \frac{\delta_{1,n}}{n^\gamma}.$$

При выводе (81) мы использовали также тот факт, что $3\varkappa(2n) \leq \delta_{1,n}$ ввиду (74).

Наконец, подставляя (81) и (77) в (76), мы получим требуемое неравенство (73). \square

4.4. Оценка для перескока.

Лемма 15. Пусть выполнены условия теоремы 2, а числа n и h удовлетворяют неравенствам

$$(82) \quad h \geq 4G(2n) \quad \text{и} \quad h \geq 2\lambda_n \sqrt{n}.$$

Тогда при всех $n \geq m > 0$

$$(83) \quad E_{m,n} \leq C_3 \lambda_n^2 \sqrt{m} U_n / h \quad \text{при} \quad C_3 := 8/U_1 + 16C_2.$$

Доказательство. Поскольку $Z_{\nu_m-1} < h$, то

$$\begin{aligned} Z_{\nu_m} &= Z_{\nu_m-1} + g_{\nu_m-1} - g_{\nu_m} + X_{\nu_m} \\ &< h + 2G(V_{\nu_m}) + X_{\nu_m} \leq h + 2h/4 + X_{\nu_m} = 3h/2 + X_{\nu_m}, \end{aligned}$$

в случае, когда $V_{\nu_m} \leq V_n \leq 2n$ и $G(2n) \leq h/4$ ввиду (82). Следовательно,

$$\begin{aligned} (84) \quad E_{m,n} &= \mathbf{E}[Z_{\nu_m}; \beta > \nu_m, Z_{\nu_m} > 2h, V_n \leq 2n] \\ &\leq \mathbf{E}[3h/2 + X_j; \beta > \nu_m, X_{\nu_m} > h/2] \\ &\leq \mathbf{E}[4X_{\nu_m}; \beta > \nu_m, X_{\nu_m} > h/2] \\ &\leq \mathbf{E}[8X_{\nu_m}^2/h; \beta > \nu_m, X_{\nu_m} > h/2]. \end{aligned}$$

Далее, при всех $1 \leq j \leq m$

$$(85) \quad \begin{aligned} E_j^* &:= \mathbf{E}[X_{\nu_m}^2; \beta > \nu_m = j, X_{\nu_m} > h/2] \leq \mathbf{E}[X_j^2; \beta > j-1, X_j > h/2] \\ &= \mathbf{E}[X_j^2; X_j > h/2] \mathbf{P}(\beta > j-1) \leq \lambda_n^2 \mathbf{P}(\beta > j-1). \end{aligned}$$

Равенство в (85) вытекает из того факта, что событие $\{\beta > j-1\}$ порождается случайными величинами X_1, \dots, X_{j-1} , которые не зависят от X_j . А последнее неравенство в (85) следует из (72), поскольку $h/2 \geq \lambda_n \sqrt{n}$ в силу предположения (82). Напомним еще, что ввиду (54) и (21) справедлива оценка

$$(86) \quad \mathbf{P}(\beta > j-1) = \mathbf{P}(\tau > V_{j-1}) \leq \frac{C_2 U_j}{\sqrt{j-1}} \leq \frac{C_2 U_n}{\sqrt{j-1}}, \quad j = 2, \dots, n.$$

Из этого факта, (84) и (85) находим:

$$(87) \quad E_{m,n} \leq \frac{8}{h} \sum_{j=1}^m E_j^* \leq \frac{8\lambda_n^2}{h} \sum_{j=1}^m \mathbf{P}(\beta > j-1) \leq \frac{8\lambda_n^2}{h} \left(1 + \sum_{j=2}^m \frac{C_2 U_n}{\sqrt{j-1}}\right).$$

Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{j-1}} < \frac{2}{\sqrt{j-1} + \sqrt{j-2}} = 2(\sqrt{j-1} - \sqrt{j-2}),$$

то

$$\sum_{j=2}^m \frac{1}{\sqrt{j-1}} < \sum_{j=2}^m 2(\sqrt{j-1} - \sqrt{j-2}) = 2\sqrt{m-1} < 2\sqrt{m}.$$

Подставляя этот результат в (87), получаем:

$$(88) \quad E_{m,n} \leq \frac{8}{h} \sum_{j=1}^m E_j^* \leq \frac{8\lambda_n^2}{h} (1 + 2C_2 U_n \sqrt{m}).$$

А учитывая, что $1 = U_1/U_1 \leq U_n/U_1 \leq U_n \sqrt{m}/U_1$, мы из (88) легко извлекаем (83). \square

4.5. Выбор уровня h . При $n > 1$ положим

$$(89) \quad \delta_n := \sqrt[3]{\bar{\rho}_n/C_0 + \delta_{1,n} + \lambda_n^2} \quad \text{и} \quad h = h_n := \sqrt{n} \delta_n.$$

Лемма 16. Пусть выполнены все условия леммы 14. Тогда при $h = h_n$ из (89) справедливы следующие соотношения

$$(90) \quad \begin{aligned} U_n &\geq U_m = \mathbf{E}Z_m^* \geq \mathbf{E}Z_{\nu_m}^* \geq \mathbf{E}[Z_{\nu_m}^*; A_{m,n}] \\ &\geq U_n \left(1 - \delta_{2,n} - C_2 \delta_{1,n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\right), \end{aligned}$$

где

$$(91) \quad 0 \leq \delta_{2,n} \leq \delta_{1,n}^{2/3} + (2\delta_{1,n} + \delta_n) \frac{C_1}{U_1 n^\gamma} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

В частности, функция $U(T) = U_{\lfloor T \rfloor}$ является медленно меняющейся при $T \rightarrow \infty$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что в (90) нам нужно доказать только последнее неравенство, поскольку остальные соотношения в (90) немедленно вытекают из утверждений леммы 2. Далее, $1/(1+\delta) \geq 1-\delta$ при всех $\delta > 0$. Поэтому неравенство (73) при $h = h_n^*$ можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{E} [Z_{\nu_m}^*; A_{m,n}] \geq U_n \left(1 - \frac{\sqrt{n}\delta_{1,n}}{h_n}\right) - \sqrt{n}\delta_{1,n}\mathbf{P}(\beta > m) - \left(2\delta_{1,n} + \frac{h_n}{\sqrt{n}}\right) \frac{C_1}{n^\gamma}.$$

Но из этого неравенства и (86) при $j = m + 1$ немедленно следует последнее неравенство в (90) при

$$(92) \quad \delta_{2,n} := \frac{\sqrt{n}\delta_{1,n}}{h_n} + \left(2\delta_{1,n} + \frac{h_n}{\sqrt{n}}\right) \frac{C_1}{U_n n^\gamma} = \frac{\delta_{1,n}}{\delta_n} + (2\delta_{1,n} + \delta_n) \frac{C_1}{U_n n^\gamma}.$$

Замечая теперь, что $\delta_n^* > \delta_{1,n}^{1/3}$ в виду (89), и что $U_n \geq U_1 > 0$ в силу (21), мы из (92) получаем оценку (91).

Наконец, полагая в (90) натуральное $m = \lfloor cn \rfloor$ при любом $c \in (0, 1)$, мы имеем:

$$1 \geq \frac{U_n}{U_{\lfloor cn \rfloor}} \geq 1 - \delta_{2,n} - C_2 \delta_{1,n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{cn-1}} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

поскольку $\delta_{1,n} + \delta_{2,n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, функция $U(T) = U_{\lfloor T \rfloor}$ является медленно меняющейся при $T \rightarrow \infty$. \square

4.6. Асимптотическая оценка снизу для $\mathbf{P}(\tau > V_n)$.

Лемма 17. Пусть выполнены все условия Теоремы 2. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1/2]$ найдется число $T_2(\varepsilon)$ такое, что

$$(93) \quad \sqrt{n}\mathbf{P}(\tau > V_n) = \sqrt{n}\mathbf{P}(\beta > n) \geq (1-\varepsilon)C_0U_n \quad \forall n \geq T_2(\varepsilon).$$

Доказательство. При $n \geq 2m > 1$ и $h = h_n$ мы имеем право подставить в (65) последнее неравенство из (90). В итоге имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{n}P_n &\geq C_0U_n \left(1 - \frac{h_n^2}{n} - \frac{\sqrt{n}\bar{\rho}_n}{C_0h_n}\right) \left(1 - \delta_{2,n} - C_2\delta_{1,n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\right) \\ &\quad - \sqrt{n}\bar{\rho}_n\mathbf{P}(\tau > V_m) - C_0E_{m,n} - \sqrt{n}\mathbf{P}(V_n > 2n). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что выполнены оба условия в (82). Используя в этом случае неравенства (23), (83) и (86) при $j = m + 1$, находим:

$$\begin{aligned} \sqrt{n}P_n &\geq C_0U_n \left(1 - \frac{h_n^2}{n} - \frac{\sqrt{n}\bar{\rho}_n}{C_0h_n} - \delta_{2,n} - C_2\delta_{1,n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\right) \\ &\quad - \sqrt{n}\bar{\rho}_n \frac{C_2U_n}{\sqrt{m}} - \frac{C_0C_3\lambda_n^2\sqrt{m}U_n}{h_n} - \frac{C_1h_n}{n^{1/2+\gamma}}. \end{aligned}$$

Таким образом из определения (89) величины h_n мы получаем, что

$$(94) \quad \sqrt{n}\mathbf{P}(\tau > V_n) \geq \sqrt{n}P_n \geq C_0U_n(1 - \delta_{3,n}),$$

где

$$(95) \quad \delta_{3,n} := \delta_n^2 + \frac{\bar{\rho}_n}{C_0\delta_n} + \delta_{2,n} + C_2 \left(\delta_{1,n} + \frac{\bar{\rho}_n}{C_0}\right) \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} + \frac{C_3\lambda_n^2\sqrt{m}}{\sqrt{n}\delta_n} + \frac{C_1\delta_n}{C_0U_n n^\gamma}.$$

Положим теперь $m := \lfloor n/2 \rfloor \geq n/3$ при $n > 1$. Учитывая вид (89) величины δ_n , из (95) нетрудно извлечь, что

$$(96) \quad \delta_{3,n} \leq \delta_{4,n} := 2\delta_n^2 + \delta_{2,n} + C_2\delta_n^2 + C_3\delta_n^2 + \frac{C_1\delta_n}{C_0U_1n^\gamma} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

При выводе (96) мы еще использовали (21).

Положим теперь

$$(97) \quad T_2(\varepsilon) := \inf\{n > 1 : \delta_{4,n} \leq \varepsilon \text{ и } \bar{\rho}_n + 2\lambda_n \leq \delta_n\}.$$

Из определений (89), (12) и (52), нетрудно убедиться что при $n \rightarrow \infty$

$$(98) \quad 2\lambda_n/\delta_n < 2\sqrt{\delta_n} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad 4G(2n)/h_n \leq 4\kappa(2n)/\delta_n \leq \bar{\rho}_n/\delta_n \leq C_0\delta_n^2 \rightarrow 0.$$

А поскольку еще $\delta_{4,n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $T_2(\varepsilon) < \infty$ при всех $\varepsilon > 0$.

Далее, из второго условия в (97) с учетом второго неравенства в (98) немедленно вытекает, что при $n \geq T_2(\varepsilon)$ выполнены оба предположения из (82). Значит, при $n \geq T_2(\varepsilon)$ мы имеем право использовать неравенство (94) с оценкой (96) для $\delta_{3,n} \leq \delta_{4,n}$. Таким образом, требуемое неравенство (93) вытекает из (94) и (96) при $T_2(\varepsilon)$, введенном в (97) \square

Из лемм 11 и 17 очевидным образом вытекает утверждение (11) теоремы 3.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

5.1. Оценка сверху для $\mathbf{P}(\tau > T)$.

Лемма 18. Пусть выполнены все условия Теоремы 2. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1/2]$

$$(99) \quad (1 - \varepsilon)\sqrt{T}\mathbf{P}(\tau > T) \leq (1 + 2\varepsilon)C_0U(T) \quad \text{при всех } T \geq T_3(\varepsilon),$$

где

$$(100) \quad T_3(\varepsilon) := \inf\{T \geq T_1(\varepsilon)/(1 - \varepsilon) : \frac{4C_1}{U_1T^\gamma} \leq C_0\varepsilon^3\}.$$

Кроме того,

$$(101) \quad \sqrt{T}\mathbf{P}(\tau > T) \leq C_4U(T) \quad \text{при всех } T > 0,$$

где

$$(102) \quad C_4 := 2C_0 + \sup_{T < T_3(1/2)} \frac{\sqrt{T}\mathbf{P}(\tau > T)}{U(T)}.$$

Доказательство. При всех $T, n > 0$ очевидным образом имеем

$$(103) \quad \mathbf{P}(\tau > T) \leq \mathbf{P}(\tau > V_n) + \mathbf{P}(V_n > T).$$

Пусть теперь

$$T \geq T_3(\varepsilon) \quad \text{и} \quad n := \lfloor (1 - \varepsilon)T \rfloor + 1.$$

В силу (100) и (59) в этом случае $T > (1 - \varepsilon)T \geq T_1(\varepsilon) \geq 2/\varepsilon$, а потому

$$\begin{aligned} 2/\varepsilon \leq T_1(\varepsilon) &\leq (1 - \varepsilon)T \leq n \leq (1 - \varepsilon)T + 1 \leq (1 - \varepsilon)T + \varepsilon T/2, \\ T - n &\geq T - (1 - \varepsilon)T - 1 = \varepsilon T - 1 \geq \varepsilon T - \varepsilon T/2. \end{aligned}$$

Следовательно, при выбранном n

$$(104) \quad T_1(\varepsilon) \leq n \leq T \quad \text{и} \quad T - n \geq \varepsilon T/2.$$

Но при $n \geq T_1(\varepsilon)$ мы можем воспользоваться утверждением леммы 11. В итоге получим:

$$(105) \quad (1 - \varepsilon)\sqrt{T}\mathbf{P}(\tau > V_n) \leq \sqrt{(1 - \varepsilon)n}\mathbf{P}(\tau > V_n) \leq (1 + \varepsilon)C_0U_n.$$

Далее, применим неравенство (22) при $u = \varepsilon T/2$ и $n \leq T$. Учитывая еще (104), имеем

$$(106) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}(V_n > T) &\leq \mathbf{P}(V_n - n > \varepsilon T/2) \leq \mathbf{P}(|V_n - n| > \varepsilon T/2) \\ &\leq \frac{C_1 n}{(\varepsilon T/2)^{3/2+\gamma}} \leq \frac{4C_1}{\varepsilon^2 T^{1/2+\gamma}} \leq \frac{4C_1 U_n}{U_1 \varepsilon^2 T^{1/2+\gamma}} \leq \frac{C_0 \varepsilon U_n}{\sqrt{T}}. \end{aligned}$$

При выводе двух последних неравенств в (106) мы еще использовали (21) и определение (100) числа $T_3(\varepsilon)$. Подставляя теперь (105) и (106) в (103), находим:

$$(107) \quad (1 - \varepsilon)\sqrt{T}\mathbf{P}(\tau > V_n) \leq (1 + \varepsilon)C_0U_n + \varepsilon C_0U_n \leq (1 + 2\varepsilon)C_0U(T),$$

поскольку еще $U_n = U(n) \leq U(T)$ при $n \leq T$.

Таким образом, из (107) вытекает (99). Заметим наконец, что число C_4 в (102) выбрано таким образом, чтобы (101) следовало из (99) при $\varepsilon = 1/2$. \square

5.2. Доказательство теоремы 2.

Лемма 19. Пусть выполнены все условия Теоремы 2. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1/2]$

$$(108) \quad \mathbf{P}(\tau > T) \geq (1 - 3\varepsilon)C_0U(T) \quad \text{при всех } T \geq T_4(\varepsilon),$$

где

$$(109) \quad T_4(\varepsilon) := \inf\{T \geq T_2(\varepsilon) : C_1 \leq C_0U_1T^\gamma\varepsilon^3\}.$$

Доказательство. Очевидно, что при всех $T, n > 0$

$$(110) \quad \mathbf{P}(\tau > V_n) \leq \mathbf{P}(\tau > T) + \mathbf{P}(V_n < T).$$

Пусть теперь

$$T \geq T_4(\varepsilon) \quad \text{и} \quad n := \lfloor (1 + \varepsilon)T \rfloor + 1 \geq T + \varepsilon T.$$

В силу (100) и (59) в этом случае

$$n > T \geq T_4(\varepsilon) \geq T_2(\varepsilon) \geq T_1(\varepsilon) \geq 2/\varepsilon,$$

а потому

$$\begin{aligned} n &\leq (1 + \varepsilon)T + 1 \leq (1 + \varepsilon)T + \varepsilon T/2 = 1 + 3\varepsilon/2 \quad \text{и} \\ \frac{T}{n} &\geq \frac{1}{1 + 3\varepsilon/2} \geq 1 - 3\varepsilon/2 \geq (1 - \varepsilon)^2 \quad \text{при } 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, при выбранных n и ε

$$(111) \quad \sqrt{T} \geq (1 - \varepsilon)\sqrt{n} \quad \text{и} \quad 2T > n \geq T + \varepsilon T > T.$$

Но при $n \geq T_2(\varepsilon)$ мы можем воспользоваться утверждением леммы 17. В итоге получим:

$$(112) \quad \mathbf{P}(\tau > V_n) \geq \frac{(1 - \varepsilon)C_0U_n}{\sqrt{n}} \geq \frac{(1 - \varepsilon)C_0U_n(1 - \varepsilon)}{\sqrt{T}} \geq \frac{(1 - 2\varepsilon)C_0U_n}{\sqrt{T}}.$$

Далее, учитывая (111), применим неравенство (22) при $u = \varepsilon T$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(V_n < T) &= \mathbf{P}(V_n - n < T - n) \leq \mathbf{P}(V_n - n < -\varepsilon T) \\ &\leq \mathbf{P}(|V_n - n| > \varepsilon T) \leq \frac{C_1 n}{(\varepsilon T)^{3/2+\gamma}} \leq \frac{C_1}{\varepsilon^2 T^{1/2+\gamma}} \leq \frac{C_1 U_n}{U_1 \varepsilon^2 T^{1/2+\gamma}}. \end{aligned}$$

А поскольку $U_n \geq U_1 > 0$ ввиду (21), то используя определение (109) числа $T_4(\varepsilon)$, имеем:

$$(113) \quad (1 - \varepsilon)\sqrt{T}\mathbf{P}(\tau > V_n) \leq (1 + \varepsilon)C_0 U_n + \varepsilon C_0 U_n \leq (1 + 2\varepsilon)C_0 U(T).$$

Подставляя теперь (112) и (113) в (110), находим:

$$(114) \quad \sqrt{T}\mathbf{P}(\tau > T) \geq (1 - 2\varepsilon)C_0 U_n - \varepsilon C_0 U_n \geq (1 - 3\varepsilon)C_0 U_n.$$

Таким образом, чтобы из (114) получить (108), нужно лишь заметить, что $n > T$, а потому $U_n = U(n) \geq U(T)$. \square

Из лемм 18 и 19 очевидным образом вытекает утверждение (10) теоремы 2. Напомним еще, что в лемме 16 мы уже доказали, что функция $U(T) = U_{[T]}$ является медленно меняющейся при $T \rightarrow \infty$.

5.3. Доказательство теоремы 1. Введем в рассмотрение величины

$$\tau_- = \inf\{t > 0 : S(t) \leq -G(t)\}, \quad U_-(T) := \mathbf{E}[S_{[T]} + G(V_{[T]}) : \tau_- > V_{[T]}].$$

Поскольку функция $-G(t)$ — монотонно невозрастает, то из Теоремы 2 при $g(t) = -G(t)$ немедленно вытекает, что $U_-(T)$ является монотонно неубывающей функцией, которая медленно меняется при $T \rightarrow \infty$. А из утверждения (101) леммы 18 следует, что

$$\sqrt{T}\mathbf{P}(\tau > T) \leq C_4 U_-(T) \quad \text{при всех } T > 0.$$

То есть утверждение (8) Теоремы 1 верно при $U_+(T) := C_4 U_-(T)$.

REFERENCES

- [1] A.A. Borovkov, *Compound Renewal Processes*, Russ. Acad. Sci., Moscow, 2020, p. 455.
- [2] R. Kutner, J. Masoliver, *The continuous time random walk, still trendy: fifty-year history, state of art and outlook*, Eur. Phys. J. B, **90**:50 (2017). DOI: 10.1140/epjb/e2016-70578-3
- [3] D. Denisov, A. Sakhanenko, V. Wachtel, *First-passage times for random walks with nonidentically distributed increments*, Ann. Probab., **46**:6 (2018), 3313–3350. Zbl 1434.60126
- [4] R.A. Doney, *Spitzer's condition and the ladder variables in random walks*, Probab. Theory Relat. Fields, **101**:4 (1995), 577–580. Zbl 0818.60060
- [5] B. von Bahr, C.-G. Esseen, *Inequalities for the rth absolute moment of a sum of random variables*, $1 \leq r \leq 2$, Ann. Math. Stat., **36**:1 (1965), 299–303. Zbl 0134.36902
- [6] P. Erdős, M. Kac, *On certain limit theorems of the theory of probability*, Bull. Am. Math. Soc., **52**:4 (1946), 292–302. Zbl 0063.01274
- [7] A.I. Sakhanenko, *Estimates in the invariance principle in terms of truncated power moments*, Sib. Math. J., **47**:6 (2006), 1113–1127. Zbl 1150.60364
- [8] A.I. Sakhanenko, *On Borovkov's estimate in the invariance principle*, Sib. Electron. Mat. Izv., **16** (2019), 1776–1784. Zbl 1427.60054
- [9] Q. Zhou, A.I. Sakhanenko, J. Guo, *Prokhorov distance with rates of convergence under sublinear expectations*, Teor. Veroyatnost. i Primenen., **65**:4 (2020), 778–804.
- [10] D. Denisov, V. Wachtel, *Conditional limit theorems for ordered random walks*, Electron. J. Probab., **15**:11 (2010), 292–322. Zbl 1201.60040
- [11] D. Denisov, V. Wachtel, *Random walks in cones*, Ann. Probab., **43**:3 (2015), 992–1044. Zbl 1332.60066

- [12] D. Denisov, V. Wachtel, *Exit times for integrated random walks*, Ann. Inst. H. Poincaré, Probab. Stat., **51**:1 (2015), 167–193. Zbl 1310.60049

ALEXANDER SAKHANENKO
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
4, ACAD. KOPTYUG AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
Email address: aisakh@mail.ru

VITALI WACHTEL
UNIVERSITÄT AUGSBURG,
INSTITUT FÜR MATHEMATIK,
AUGSBURG, 86135, GERMANY
Email address: vitali.wachtel@mathematik.uni-augsburg.de

EVGENY PROKOPENKO
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
ACAD. KOPTYUG AVENUE, 4,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
Email address: evgenii.prokopenko@gmail.com

ANASTASIYA SHELEPOVA
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
1, PIROGOVA STR.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
Email address: nastya.shelepova.99@mail.ru