S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №2, стр. 1467–1474 (2021) УДК 517.5
DOI 10.33048/semi.2021.18.109 MSC 42C10

Special issue: International S.B. Stechkin's Workshop-Conference
on Function Theory (Russia, Altai Republic, August 9–19, 2021)

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННО-ОРТОГОНАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ КМА И ВСПЛЕСКОВ

Е.А. ПЛЕЩЕВА

Abstract. The paper is devoted to the construction of interpolating-orthogonal periodic bases of mutiresolution analysis and corresponding wavelets from the existing orthogonal bases of wavelets. The mask $m(\omega)$ of an orthogonal scaling function $\varphi(x)$ is converted in such a way that the new scaling function $\varphi^I(x)$ generates an interpolation and orthogonal system of integer shifts. According to the resulting system, periodic bases of scaling functions and wavelets are constructed.

Keywords: wavelet, scaling function, multiresolution analysis, interpolating wavelet, orthogonal wavelet, periodic wavelet.

1. Введение

Теория базисов всплесков начала активное развитие в 80-е годы прошлого века. Построение всплесков удобно начинать с кратномасштабного анализа, введенного и исследованного в работе [1]:

Определение 1. *Последовательность вложенных друг в друга замкнутых подпространств пространства* $L^2(\mathbb{R})$

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \tag{1}$$

Pleshcheva, E.A., Periodic interpolating-orthogonal bases of MRA and wavelets.

© 2021 Плещева Е.А.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

Received November, 21, 2021, published December, 1, 2021.

называется кратномасштабным анализом (КМА) пространства $L^2(\mathbb{R})$*, если она удовлетворяет следующим условиям:*

a) $\overline{\cup_j V_j} = L^2(\mathbb{R})$;

b) $\cap_j V_j = \{0\}$;

c) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x + l/2^j) \in V_j \quad \forall j, l \in \mathbb{Z}$;

d) $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}$;

e) найдется такая функция $\varphi(x) \in V_0$*, что множество ее сдвигов* $\{\varphi(x + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *образует ортонормированный базис пространств* V_0*.*

Отметим, что не все условия в определении КМА являются независимыми. Доказывается (см., напр., [2]), что условие *b)* следует из условий *c)–e)*. А в случае, когда в окрестности нуля $\widehat{\varphi}(\omega)$ не обращается в нуль, и условие *a)* выполняется при выполнении условий *c)–e)*.

Базисы пространств V_j образованы сжатиями и сдвигами

$$\{\varphi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

масштабирующей функции $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Подпространства всплесков W_j, ортогональные базисы которых $\{\psi_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образованы также сдвигами и сжатиями одной функции, строятся таким образом, что W_j является ортогональным дополнением пространства V_j до V_{j+1}. При этом система $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис всего пространства $L^2(\mathbb{R})$.

Известно, что для того, чтобы система $\{\varphi_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ была ортонормированной, а система $\{2^{-j/2}\varphi_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы преобразование Фурье функции φ:

$$\widehat{\varphi}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2\pi i x\omega} dx$$

удовлетворяло следующим условиям:

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega + \nu)|^2 \overset{\text{п. в.}}{=} 1, \quad \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\omega + \nu) \overset{\text{п. в.}}{=} 1.$$

Из второго равенства следует, что $\widehat{\varphi}(\omega) \in L(\mathbb{R})$, следовательно, функция $\varphi(x)$ непрерывна.

В статье [3] Ю. Н. Субботин и Н. И. Черных показали, как преобразовать вещественнозначную масштабирующую функцию типа Мейера, чтобы вновь полученная масштабирующая функция стала интерполяционной, оставаясь при этом ортогональной. Рассмотрим функцию $\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi_\varepsilon}(\omega)$, носитель которой совпадает с отрезком $[-(1+\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2]$, $0 \le \varepsilon \le 1/3$, $\widehat{\varphi}(\omega) = 1$ при $-(1-\varepsilon)/2 \le \omega \le (1-\varepsilon)/2$, $\widehat{\varphi}(\omega)$ — четная, и на промежутке $[(1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2]$ функция $\widehat{\varphi}^2(\omega) - 1/2$ — нечетная относительно $\omega = 1/2$. Для такой функции выполнено условие ортонормированности. В работе [3] предложено два способа построения функций на основе описанных функций типа Мейера, таких, что новая масштабирующая функция будет порождать ортонормированную и интерполяционную систему.

При первом способе

$$\widehat{\varphi}_1(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega) + \alpha(\omega) + i\,\mathrm{sign}(\omega)\beta(\omega),$$

где i — мнимая единица, носитель функций $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$ — это множество $[(1-\varepsilon)/2,(1+\varepsilon)/2]\bigcup[(-1-\varepsilon)/2,(-1+\varepsilon)/2]$, и на своем носителе

$$\alpha(\omega)=\frac{1-\widehat{\varphi}(\omega)-\widehat{\varphi}(\omega-1)-\widehat{\varphi}(\omega+1)}{2},\quad \beta(\omega)=\sqrt{\frac{\widehat{\varphi}(\omega)(\widehat{\varphi}(\omega-1)+\widehat{\varphi}(\omega+1))}{2}}.$$

При преобразовании масштабирующей функции вторым способом

$$\widehat{\varphi}_2(\omega)=|\widehat{\varphi}(\omega)|^2+i\,\mathrm{sign}(\omega)\beta(\omega),\tag{2}$$

где носитель $\beta(\omega)$ — также множество $[(1-\varepsilon)/2,(1+\varepsilon)/2]\bigcup[(-1-\varepsilon)/2,(-1+\varepsilon)/2]$, и на своем носителе

$$\beta(\omega)=\widehat{\varphi}(\omega)(\widehat{\varphi}(\omega-1)+\widehat{\varphi}(\omega+1)).$$

В обоих случаях новая функция $\varphi^s(x)$ $(s=1,2)$ удовлетворяет условиям ортогональности и интерполяционности и является масштабирующей функцией для кратномасштабного анализа $\ldots\subset V_j\subset V_{j+1}\subset\ldots$, где базис пространства V_0 образован системой $\{\varphi^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}},\ s=1,2$.

Условия вложения (1) обеспечиваются масштабирующим соотношением:

$$\varphi(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}h_\nu\varphi_{1,\nu}(x),\quad \{h_\nu\}\in l^2(\mathbb{Z}).\tag{3}$$

Далее строятся подпространства W_j, дополняющие пространства V_j до следующего пространства V_{j+1} таким образом, чтобы выполнялось:

1) $V_j\bigoplus W_j=V_{j+1}$, где $\bigoplus$ — символ прямой суммы;

2) $V_j\perp W_j\quad\forall j\in\mathbb{Z}$.

Базисы пространств W_j образованы функциями-всплесками вида $\{\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где функция ψ выражается через φ следующим образом:

$$\psi(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}(-1)^{\nu-1}\overline{h_{1-\nu}}\varphi_{1,\nu}(x),$$

где h_ν — коэффициенты из (3), $\varphi_{j,\nu}(x)=2^{j/2}\varphi(2^jx-\nu)$.

В работе [4] был получен способ модификации любых, а не только мейеровских, масштабирующих функций, образующих ортогональный КМА, таким образом, чтобы новые масштабирующие функции порождали интерполяционно-ортогональные базисы. Построение модифицированных базисов масштабирующих функций при этом начиналось с преобразования маски масштабирующей функции.

Данная работа посвящена построению периодических интерполяционно-ортогональных базисов КМА и всплесков, полученных на основе интерполяционно-ортогональных базисов КМА и всплесков на вещественной оси. Существует два основных подхода к их построению:

1) Периодизация уже известных базисов всплесков (см., напр., [5, п. 9.3]). Этот метод основан на суммировании масштабирующих функций и всплесков, соответствующих одному уровню j.

2) Аксиоматический подход к построению периодических базисов всплесков, когда непосредственно строится периодический КМА без использования КМА на вещественной оси. Рассматривался, например, в работах [6], [7].

В нашей работе будет использован первый подход, а именно, построены интерполяционно-ортогональные базисы пространств периодического КМА и соответствующих всплесков, используя построенные нами ранее в статье [4] базисы на вещественной оси. По заданной классической масштабирующей функции $\varphi(x)$, целочисленные сдвиги которой образуют ортонормированный базис пространства V_0 кратномасштабного анализа, используя результаты работы [4], строится новая масштабирующая функция $\varphi^I(x)$, такая, что система $\{\varphi^I(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ становится интерполяционной, оставаясь при этом ортогональной. После этого, используя первый подход к построению периодических базисов КМА и всплесков, строятся 1-периодические базисы КМА и всплесков, которые сразу являются интерполяционными и ортогональными. Таким образом, получен универсальный способ построения периодических интерполяционно-ортогональных базисов КМА и всплесков по любым заранее заданным ортогональным базисам КМА и всплесков на $\mathbb{R}$.

2. Необходимые и достаточные условия интерполяционности в терминах масок масштабирующей функции подпространств КМА пространства $\boldsymbol{L^2}(\mathbb{R})$

Пусть имеется непрерывная масштабирующая функция $\varphi(x)\in L^2(\mathbb{R})$, для которой выполнено необходимое и достаточное условие ортонормированности целочисленных сдвигов:

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(\omega-\nu)|^2 \overset{\text{п. в.}}{=} 1$$

(п. в. — почти всюду). Требуется преобразовать ее таким образом, чтобы для новой функции $\varphi^I(x)$ выполнялось необходимое и достаточное условие интерполяционности сдвигов $\{\varphi^I(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где $\widehat{\varphi^I}(\omega)\in L(\mathbb{R})$:

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi^I}(\omega-\nu) \overset{\text{п. в.}}{=} 1. \tag{4}$$

Масштабирующие соотношения (3) и всплеск-функции после преобразования Фурье выглядят следующим образом:

$$\widehat{\varphi}(\omega)=m\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big),\quad \widehat{\psi}(\omega)=e^{i\pi\omega}m\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)\widehat{\varphi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big) \tag{5}$$

где 1-периодическая функция $m(\omega)$ называется *маской масштабирующей функции* и определяется формулой

$$m(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}h_\nu e^{2\pi i\nu\omega}\in L^2[0,1]. \tag{6}$$

Известно, что, если система $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ортонормированна, то для маски выполнено соотношение:

$$|m(\omega)|^2+\Big|m\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big|^2 \overset{\text{п. в.}}{=} 1. \tag{7}$$

Далее в интересах читателя изложим результаты из работы [4]. В [4] было доказано, что для выполнения условия интерполяционности необходимо подобное (7) равенство.

Пусть система целочисленных сдвигов масштабирующей функции $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является интерполяционной, а $\widehat{\varphi}(\omega)\in L(\mathbb{R})$. Тогда для маски масштабирующей функции $m(\omega)$ выполняется условие

$$m(\omega)+m\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \overset{\text{п. в.}}{=} 1. \tag{8}$$

Если маска масштабирующей функции $m(\omega)$ принимает только вещественные значения, то ее можно преобразовать следующим образом:

$$m_I(\omega) = |m(\omega)|^2 + i\,\mathrm{sign}(\sin 2\pi\omega) m(\omega) m\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big). \tag{9}$$

В более общем случае, включая комплекснозначные $m(\omega)$, можно преобразовать маску, положив

$$m_I(\omega) = |m(\omega)|^2 + i\,\mathrm{sign}(\sin 2\pi\omega)|m(\omega)|\Big|m\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big)\Big|. \tag{10}$$

Для новых масок, определенных равенствами (9) для вещественнозначных масок, и (10) для комплекснозначных масок, выполнены равенства (7), (8). Далее в [4] доказано, что, если маска $m(\omega)$ удовлетворяет условиям:

1) $|m(\omega)|^2 + |m(\omega + 1/2)|^2 = 1$;

2) $|m(\omega)| \geq C > 0$ при $|\omega| \leq 1/4$;

3) функция $|m(\omega + 1/2)| \leq \Omega(\omega)$ при $|\omega| < \delta_0$, где $\Omega(\omega)$ — непрерывна, а ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \Omega\big(\omega/2^j\big)$ сходится.

А кроме того, $m(0) = 1$, $m(\omega)$ непрерывна в окрестности нуля и

$$\prod_{j=1}^{\infty} m(\omega/2^j) =: \widehat{\varphi}(\omega) \in L(\mathbb{R}),$$

функция $m_I(\omega)$ определяется формулой (9) при $m(\omega)$ со значениями из $\mathbb{R}$ или формулой (10) при $m(\omega)$, принимающей любые значения, в том числе и комплексные.

Тогда при целых j система функций $\big\{\varphi_{I,j,k}\big\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где $\widehat{\varphi_I}$ определена формулой

$$\widehat{\varphi_I}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_I\Big(\frac{\omega}{2^j}\Big), \tag{11}$$

является ортонормированной в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, а система $\big\{2^{-j/2}\varphi_{I,j,k}\big\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — интерполяционной на сетке $\big\{x_{j,l} = l/2^j : l \in \mathbb{Z}\big\}$. Последовательность пространств $V_j^I := \mathrm{span}\big\{\varphi_{I,j,k}\big\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует КМА пространства $L^2(\mathbb{R})$.

Пространства $W_{I,j}$, которые являются ортогональными дополнениями пространств $V_{I,j}$ до $V_{I,j+1}$, строятся таким образом, что их базисы образованы системами $\{\psi_{I,j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где

$$\widehat{\psi_I}(\omega) = e^{i\pi\omega}\, \overline{m_I\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)}\, \widehat{\varphi_I}\Big(\frac{\omega}{2}\Big). \tag{12}$$

Функция-всплеск при этом определяется формулой:

$$\psi_I(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (-1)^{\nu-1} \overline{h}_{I,1-\nu} \varphi_{I,1,\nu}(x).$$

Тогда система функций $\big\{\psi_{I,j,k}\big\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированный базис пространства $L^2\big(\mathbb{R}\big)$, а система $\big\{2^{-j/2}\psi_{I,j,k}\big\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ является интерполяционной на сетке $\big\{(2k+1)/2^{j+1} : j,k \in \mathbb{Z}\big\}$.

П р и м е р ы.

1. Пусть $m(\omega)$ — маска Мейера. Тогда приведенный способ построения приведет к масштабирующей функции, полученной способом (2).

2. Известно (см. [5, гл. 6]), что не существует базисов всплесков с компактным носителем, которые являются одновременно ортогональными и интерполяционными. Рассмотрим в качестве $m(\omega)$ маски Добеши $m(\omega) = \sum\limits_{k=0}^{N} h_k e^{2\pi ik\omega}$. Они являются тригонометрическими полиномами, которые удовлетворяют достаточным условиям ортогональности и интерполяционности, поэтому построенные с их помощью маски

$$m_I(\omega) = \Big|\sum_{k=0}^{N} h_k\, e^{2\pi ik\omega}\Big|^2 + i\,\mathrm{sign}(\sin 2\pi\omega)\,\Big|\sum_{k=0}^{N} h_k\, e^{2\pi ik\omega}\sum_{l=0}^{N} h_l\, e^{2\pi i(l+1/2)\omega}\Big| \tag{13}$$

позволяют получить интерполяционно-ортогональные системы масштабирующих функций. Отметим, что полученные таким образом масштабирующие функции, в отличие от исходных, не будут иметь компактного носителя, так как маска $m_I(\omega)$ здесь не является тригонометрическим полиномом. Тем не менее, такие маски имеют более простой вид, чем в общем случае, когда вместо конечных сумм в формуле (13) использовались бы бесконечные ряды.

3. Нулевые моменты интерполяционно-ортогональных масштабирующих функций

Важную роль в исследовании свойств функций-всплесков и масштабирующих функций играет количество нулевых моментов соответствующей функции, т.е. число N, для которого

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \psi(x)dx = 0,\ n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Для преобразований Фурье при этом выполнено:

$$\big(\widehat{\psi}(0)\big)^{(n)} = 0;\ n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

В таком случае маска масштабирующей функции будет иметь вид (см. [8, с.133]):

$$m(\omega) = (1 + e^{-2\pi i\omega})^N L(\omega),$$

при этом $m(\omega)$ — 1-периодическая функция класса C^{N-1}. Известно (см., напр., [9], [10]), что нулевые моменты влияют на гладкость масштабирующей функции и всплеска, а также обеспечивают порядок аппроксимации.

Покажем, что новая масштабирующая функция обладает не худшими свойствами, чем исходная. Справедливо следующее

Предложение 1. *Пусть масштабирующая функция $\varphi(x)$, целочисленные сдвиги которой образуют ортонормированную в $L^2(\mathbb{R})$ систему, такова, что ее маска $m(\omega)$ — 1-периодическая функция, которая принимает вещественные значения и имеет вид*

$$m(\omega) = (1 + e^{-2\pi i\omega})^N L(\omega) \in C^{N-1}\big([0;1]\big).$$

Тогда и построенная по формуле (9) *маска интерполяционно-ортогональной масштабирующей функции $\varphi^I(x)$ также будет иметь вид*

$$m^I(\omega) = (1 + e^{-2\pi i\omega})^N L^I(\omega), \tag{14}$$

где $L^I(\omega)$ такова, что $m^I(\omega)$ — 1-периодическая функция класса $C^{N-1}\big([0;1]\big)$.

Доказательство. Очевидно, равенство (14) выполняется:

$$m_I(\omega) = (m(\omega))^2 + i\,\mathrm{sign}(\sin 2\pi\omega)m(\omega)m\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big)$$

$$= \Big((1+e^{-2\pi i\omega})^N L(\omega)\Big)^2 + i\,\mathrm{sign}(\sin 2\pi\omega)(1+e^{-2\pi i\omega})^N L(\omega)(1+e^{-2\pi i(\omega+\frac{1}{2})})^N L\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)$$

$$= (1+e^{-2\pi i\omega})^N \Big((1+e^{-2\pi i\omega})^N L^2(\omega) + i\,\mathrm{sign}(\sin 2\pi\omega)L(\omega)(1-e^{-2\pi i\omega})^N L\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big).$$

Покажем теперь, что $m^I(\omega)$ — функция класса $C^{N-1}\big([0;1]\big)$. На интервале $(0,1/2)$ маска $m^I(\omega) = m^2(\omega) + im(\omega)m(\omega+1/2)$, а на $(1/2,1)$ маска $m^I(\omega) = m^2(\omega) - im(\omega)m(\omega+1/2)$, поэтому, очевидно, там функция $m^I(\omega)$ $N-1$ раз непрерывно дифференцируема. В точках $0, 1/2, 1$ функция $\mathrm{sign}(\sin 2\pi\omega)$ разрывна, но $m(\omega)m\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big)$ имеет ноль кратности N. Поэтому и в этих точках $m^I(\omega)$ непрерывно дифференцируема $N-1$ раз. □

4. Периодические интерполяционно-ортогональные базисы КМА и всплесков

Построим по системе $\{\varphi^1_{I,j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ 1-периодические масштабирующие функции:

$$\Phi^I_{j,k}(x) := \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \varphi_{I,j,k}(x-\nu) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} 2^{j/2}\varphi_I(2^j x - 2^j\nu - k).$$

Каждый уровень $j \geq 0$ содержит 2^j различных функций.

Тогда определим пространства $\mathcal{V}^I_j$, как замыкание линейной оболочки соответствующих функций $\Phi^I_{j,k}(x)$:

$$\mathcal{V}^I_j := \overline{Span\{\Phi^I_{j,k}(x), k = 0,1,\ldots,2^j-1\}}.$$

Такие пространства $\mathcal{V}^I_j$ образуют периодический интерполяционно-ортогональный КМА.

Определение 2. *Последовательность вложенных подпространств*

$$\mathcal{V}^I_0 \subset \mathcal{V}^I_1 \subset \mathcal{V}^I_2 \subset \ldots;$$

пространства $\mathbf{L}^2[0,1]$ *назовем интерполяционно-ортогональным ПКМА, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) $dim(\mathcal{V}^I_j) = 2^j,\ j = 0,1,2,\ldots;$

2) $\overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{V}^I_j} = \mathbf{L}^2[0,1];$

3) $f(x) \in \mathcal{V}^I_j \Rightarrow f(2x) \in \mathcal{V}^I_{j+1}, j = 0,1,2,\ldots;$

4) $f(x) \in \mathcal{V}^I_{j+1} \Rightarrow f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2}) \in \mathcal{V}^I_j, j = 0,1,2,\ldots;$

5) найдутся такие функции $\Phi^I_j(x), j = 0,1,2,\ldots \in \mathcal{V}^I_j$, *что* $\{\Phi^I_j(x - \frac{k}{2^j})\}_{k=\overline{0,2^j-1}}$ *образует интерполяционно-ортогональный базис пространства* $\mathcal{V}^I_j$. *Функции* $\Phi^I_j(x)$ *при этом назовем периодическими интерполяционно-ортогональными масштабирующими функциями.*

Базисы пространств всплесков $\mathcal{W}^I_j$ при этом будут образованы функциями

$$\Psi^I_{j,k}(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \psi_{I,j,k}(x-\nu).$$

Функции $\Phi^I_{j,k}(x), \Psi^I_{j,k}(x), j = 0, 1, 2, \ldots, k = 0, \ldots, 2^j - 1$, могут быть представлены в виде:

$$\Phi^I_{j,k}(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} 2^{-j/2}\widehat{\varphi}_I(\frac{\nu}{2^j})e^{2\pi i\nu(x-k/2^j)};$$

$$\Psi^I_{j,k}(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} 2^{-j/2}\widehat{\psi}_I(\frac{\nu}{2^j})e^{2\pi i\nu(x-k/2^j)}.$$

Из построения периодических систем всплесков и масштабирующих функций следует справедливость следующего утверждения:

Предложение 2. *Системы функций $\{2^{-j/2}\Phi^I_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ при каждом j образуют интерполяционные базисы пространств $\mathcal{V}_j$, а системы $\{\Phi^I_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ при каждом j образуют ортогональные базисы пространств $\mathcal{V}_j$. При этом система $\{\Psi^I_{j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис пространства $L^2[0,1]$, а система $\{2^{-j/2}\Psi^I_{j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ образует интерполяционный по сетке $\big\{(2k+1)/2^{j+1}\colon j\in\mathbb{Z}, k = 0, \ldots, 2^j - 1\big\}$ базис пространства $L^2[0,1]$.*

Отметим, что для дальнейших применений, а также для переноса на единичную окружность лучше использовать не построенные выше 1-периодические всплески, а 2π-периодические всплески, которые можно получить из 1-периодических с помощью замены переменной.

References

[1] S. Mallat, *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$*, Trans. Am. Math. Soc., **315**:1 (1989), 69—88. Zbl 0686.42018

[2] I.Ya. Novikov, S.B. Stechkin, *Foundations of wavelet theory*, Russ. Math. Surv., **53**:6 (1998), 1159—1231. Zbl 0955.42019

[3] N.I. Chernykh, Yu.N. Subbotin, *Interpolating-orthogonal wavelet systems*, Proc. Steklov Inst. Math., Suppl. 1, **264** (2009), S107—S115. Zbl 1312.42038

[4] E.A. Pleshcheva, *Interpolating-orthogonal bases of MRA and wavelets*, Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, **26**:4 (2020), 224—233.

[5] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, **61**, SIAM, Philadelphia, 1992. Zbl 0776.42018

[6] A.P. Petukhov, *Periodic wavelets*, Sb. Math., **188**:10 (1997), 1481–1506. Zbl 0891.42021

[7] A.P. Petukhov, *Periodic discrete wavelets*, St. Petersburg Math. J., **8**:3 (1997), 481—503. Zbl 0884.42021

[8] N.K. Smolentsev, *Foundations of the theory of wavelets. Wavelets in MATLAB*, DMK Press, Moscow, 2005.

[9] M. Skopina, *On construction of multivariate wavelet frames*, Appl. Comput. Harmon. Anal., **27**:1 (2009), 55—72. Zbl 1171.42021

[10] R.Q. Jia, *Approximation properties of multivariate wavelets*, Math. Comput., **6**7:222 (1998), 647–665. Zbl 0889.41013

Ekaterina Alexandrovna Pleshcheva
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
16, S. Kovalevskaya str.,
Ekaterinburg, 620990, Russia
Email address: eplescheva@gmail.com