S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №2, стр. 1625–1638 (2021) УДК 517.51
DOI 10.33048/semi.2021.18.120 MSC 39B62

Special issue: International S.B. Stechkin's Workshop-Conference
on Function Theory (Russia, Altai Republic, August 9–19, 2021)

РЕДУКЦИЯ НЕРАВЕНСТВА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ СРЕЗКИ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА ОСИ К НЕРАВЕНСТВУ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ

Н.С. ПАЮЧЕНКО

Abstract. In this paper we delve into connection between sharp constants in the inequalities

$$\|y'\|_{L_q(\mathbb{R})} \le K_+\sqrt{\|y\|_{L_r(\mathbb{R})}\|y''_+\|_{L_p(\mathbb{R})}},$$

$$\|u'\|_{L_q(0,1)} \le \overline{K}\sqrt{\|u\|_{L_r(0,1)}\|u''\|_{L_p(0,1)}},$$

where the second one is considered for convex functions $u(x)$, $x \in [0,1]$ with an absolutely continuous derivative that vanishes at the point $x = 0$. We prove that $K_+ = \overline{K}$ under conditions $1 \le q, r, p < \infty$ and $1/r + 1/p = 2/q$.

Keywords: Kolmogorov inequality, inequalities between norms of function and its derivatives, non-negative part of the second derivative, exact constant.

Payuchenko, N.S., Reduction of the Kolmogorov inequality for a non negative part of the second derivative on the real line to the inequality for convex functions on an interval.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

Поступила 28 ноября 2021 г., опубликована 15 декабря 2021 г.

1. Введение

Работа посвящена неравенству типа Колмогорова между нормой первой производной функции в пространстве L_q, нормой функции в пространстве L_r и L_p-нормой положительной срезки второй производной на оси. Введем обозначения норм

$$\|y\|_p = \|y\|_{L_p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |y(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad \|y\|_\infty = \|y\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |y(x)|,$$

$$\|y\|_{L_p(a,b)} = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |y(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad \|y\|_{L_\infty(a,b)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in(a,b)} |y(x)|, \quad 1 \le p < \infty,$$

и положительной срезки $y_+(x) = \max\{y(x), 0\}$ функции.

Неравенства вида

$$\|y^{(k)}\|_{L_q(\mathbb{R})} \le K\|y\|^\alpha_{L_r(\mathbb{R})}\|y^{(n)}\|^\beta_{L_p(\mathbb{R})} \tag{1.1}$$

и их обобщения изучаются более века. Один из фундаментальных результатов получен в 1939 г. А.Н.Колмогоровым [1]. Для $q = p = r = \infty$ он нашел точную константу K при всех значениях n и k, $1 \le k < n$. Подробную информацию об истории изучения подобных неравенств на оси и полуоси можно найти в обзорах [2], [3] и монографии [4], на отрезке — в работах [5], [6], [7], [8].

В 1976 г. В.Н. Габушин [9] доказал следующий критерий существования конечной константы в неравенствах (1.1) и в неравенствах с положительной срезкой старшей производной.

Теорема. (В.Н. Габушин). *Пусть* $0 \le k < n$, $0 < q, r, p \le \infty$ *и* $q \ne r$, *если* $k = 0$. *Предположим, что все производные функции* $y \in L_r(\mathbb{R})$ *до порядка* $n-1$ *локально абсолютно непрерывны и*

$$\Omega(y^{(n)}) = y^{(n)} \quad \textit{или} \quad \Omega(y^{(n)}) = (y^{(n)})_+.$$

Тогда неравенство

$$\|y^{(k)}\|_{L_q(\mathbb{R})} \le K\|y\|^\alpha_{L_r(\mathbb{R})}\|\Omega(y^{(n)})\|^\beta_{L_p(\mathbb{R})}$$

справедливо с константой K, *не зависящей от* f, *тогда и только тогда, когда*

$$p \ge 1, \quad \alpha = \frac{k - 1/q + 1/r}{n - 1/p + 1/r}, \quad \beta = 1 - \alpha \quad \textit{и} \quad \frac{n-k}{r} + \frac{k}{p} \ge \frac{n}{q}. \tag{1.2}$$

Неравенства с односторонним ограничением на старшую производную менее изучены. В работе Л. Хёрмандера 1954 г. [10] (см. также [11]) приведено решение аналога задачи (1.1) с ограничениями на старшую производную

$$\|y_\pm^{(k)}\|_{L_\infty} \to \sup, \quad \|y\|_{L_\infty} \le A_1, \quad \|y_+^{(n)}\|_{L_\infty} \le A_2, \quad \|y_-^{(n)}\|_{L_\infty} \le A_3.$$

Обозначим через $\mathcal{W} = \mathcal{W}(r,p)$ множество функций $y \in L_r(\mathbb{R})$, имеющих локально абсолютно непрерывную производную и таких, что положительная срезка второй производной $y''_+ = (y'')_+ \in L_p(\mathbb{R})$. Через $\mathcal{U}$ обозначим множество выпуклых на отрезке $[0,1]$ функций u, имеющих абсолютно непрерывную производную на $[0,1]$ и обладающих свойством $u'(0) = 0$. Очевидно, что для функций $u \in \mathcal{U}$ выполняется равенство $u'' = u''_+$.

Е.А. Зернышкина в 2008 г. [12] нашла точную константу $K_{2,2,2}$ в следующем неравенстве с положительной срезкой второй производной:

$$\|y'\|_{L_2(\mathbb{R})} \le K_{2,2,2}\sqrt{\|y\|_{L_2(\mathbb{R})}\|y''_+\|_{L_2(\mathbb{R})}}, \quad y \in \mathcal{W}(2,2). \tag{1.3}$$

Приближенно $K_{2,2,2} \approx 1.5289...$, точное же значение выражается через решение некоторого уравнения. Для получения этого результата Е.А. Зёрнышкина доказала равенство $K_{2,2,2} = \overline{K}_{2,2,2}$, где $\overline{K}_{2,2,2}$ — это точная константа в неравенстве

$$\|u'\|_{L_2(0,1)} \le \overline{K}_{2,2,2}\sqrt{\|u\|_{L_2(0,1)}\|u''\|_{L_2(0,1)}}, \quad u \in \mathcal{U}, \tag{1.4}$$

потом нашла $\overline{K}_{2,2,2}$ и экстремальные функции в (1.4). Это позволило получить значение $K_{2,2,2}$ и выписать экстремальную последовательность функций в исходном неравенстве (1.3).

В 2020 г. автор [13] получил точную константу $K_{2,1,\infty}$ в неравенстве

$$\|y'\|_{L_2(\mathbb{R})} \le K_{2,1,\infty}\sqrt{\|y\|_{L_1(\mathbb{R})}\|y''_+\|_{L_\infty(\mathbb{R})}}, \quad y \in \mathcal{W}(1,\infty).$$

Решение также основано на доказательстве равенства $K_{2,1,\infty} = \overline{K}_{2,1,\infty}$, где $\overline{K}_{2,1,\infty}$ — точная константа в неравенстве

$$\|u'\|_{L_2(0,1)} \le \overline{K}_{2,1,\infty}\sqrt{\|u\|_{L_1(0,1)}\|u''\|_{L_\infty(0,1)}}, \quad u \in \mathcal{U},$$

и последующем вычислении значения $\overline{K}_{2,1,\infty} = \sqrt{\dfrac{8}{3}}$.

Целью работы является выяснение связи между точными константами $K_+ = K_{+,q,r,p}$ и $\overline{K} = \overline{K}_{q,r,p}$ в неравенствах

$$\|y'\|_{L_q(\mathbb{R})} \le K_+\sqrt{\|y\|_{L_r(\mathbb{R})}\|y''_+\|_{L_p(\mathbb{R})}}, \quad y \in \mathcal{W}(r,p), \tag{1.5}$$

и

$$\|u'\|_{L_q(0,1)} \le \overline{K}\sqrt{\|u\|_{L_r(0,1)}\|u''\|_{L_p(0,1)}}, \quad u \in \mathcal{U}.$$

Результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Если показатели $q, r, p \in [1,\infty)$ удовлетворяют равенству*

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{2}{q}, \tag{1.6}$$

то

$$K_+ = \overline{K}.$$

Отметим, что в условиях теоремы неравенство (1.2) $(n-k)/r + k/p \ge n/q$ из критерия В.Н. Габушина обращается в равенство (1.6). Как отмечено выше Е.А. Зернышкина [12] доказала частный случай теоремы 1 для $p = q = r = 2$, автор [13] доказал аналог теоремы для $q = 2$, $r = 1$, $p = \infty$, который легко обобщить на произвольные q, r, при $q = 2r$. В случае $q = r = p = \infty$ задача о точной константе в неравенстве (1.5) является частным случаем задачи, решенной Л. Хёрмандером. Случай $r = \infty$, $1/p = 2/q$ в данной работе не рассматривается.

2. Доказательство теоремы 1

Введем функционалы

$$\Psi(y)=\Psi_{\mathbb{R}}(y):=\frac{\|y'\|^2_{L_q(\mathbb{R})}}{\|y\|_{L_r(\mathbb{R})}\cdot\|y''_+\|_{L_p(\mathbb{R})}},\quad \Psi_{[a,b]}(y):=\frac{\|y'\|^2_{L_q(a,b)}}{\|y\|_{L_r(a,b)}\cdot\|y''_+\|_{L_p(a,b)}}.$$

Если функция y эквивалентна 0, то считаем значения функционалов $\Psi_{\mathbb{R}}(y)$ и $\Psi_{[a,b]}(y)$ равными 0. Ясно, что $K_+^2=\sup\{\Psi(y)\,:\,y\in\mathcal{W}\}$, $\overline{K}^2=\sup\{\Psi_{[0,1]}(u)\,:\,u\in\mathcal{U}\}$. Нетрудно проверить, что если функции $f(x)$, $x\in[a,b]$, и $g(x)$, $x\in[c,d]$, связаны равенством

$$g(x)=f\left(\frac{(b-a)(x-c)}{d-c}+a\right),\ x\in[c,d],$$

то

$$\Psi_{[a,b]}(f)=\Psi_{[c,d]}(g). \tag{2.1}$$

2.1. Оценка константы K_+ сверху.

В этом разделе будет доказана оценка

$$K_+^2=\sup\{\Psi_{[a,b]}(f)\,:\,f\in\mathcal{P}_{[a,b]}\}\le\sup\{\Psi_{[0,1]}(u)\,:\,u\in\mathcal{U}\}=\overline{K}^2.$$

В доказательстве существенно используются идеи и методы работ [12], [14]. Доказательство разбито на несколько лемм.

Лемма 1. *Если $y\in\mathcal{W}$, то $y(x)\to0$ и $y'(x)\to0$ при $x\to\infty$.*

Доказательство. Докажем, что $y\to0$ при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$, доказательство аналогично). От противного, предположим, что y не стремится к 0 при $x\to+\infty$. Тогда существует такое $\varepsilon_0>0$, что для любого T найдется точка $t>T$, в которой $|y(t)|>\varepsilon_0$. Возьмем произвольное $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0/2)$. Для него найдутся точки T_ε и $t>T_\varepsilon$ такие, что

$$\left(\int_{T_\varepsilon}^{+\infty}|y'|^q dx\right)^{1/q}<\varepsilon,\quad \left(\int_{T_\varepsilon}^{+\infty}|y|^r dx\right)^{1/r}<\varepsilon. \tag{2.2}$$

и $|y(t)|>2\varepsilon$. Пусть $0<s\le1$. В силу неравенства Гельдера и первого неравенства в (2.2)

$$\int_t^{t+s}|y'|dx\le s^{1-1/q}\left(\int_{T_\varepsilon}^{+\infty}|y'|^q dx\right)^{1/q}\le\varepsilon.$$

Отсюда получаем оценку

$$|y(t+s)|=\left|y(t)+\int_t^{t+s}y'dx\right|\ge2\varepsilon-\int_t^{t+s}|y'|dx\ge2\varepsilon-\varepsilon=\varepsilon.$$

Но тогда $\left(\int_{T_\varepsilon}^{+\infty}|y|^r dx\right)^{1/r}>\left(\int_t^{t+1}\varepsilon^r dx\right)^{1/r}>\varepsilon$, что противоречит второму неравенству в (2.2).

Теперь предположим, что y' не стремится к 0 при $x\to+\infty$. Тогда существует $\varepsilon_1>0$ такое, что для произвольного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1/2)$ найдется T_ε, для которого

$$\left(\int_{T_\varepsilon}^{+\infty}|y'|^q dx\right)^{1/q}<\varepsilon,\quad \left(\int_{T_\varepsilon}^{+\infty}(y''_+)^p dx\right)^{1/p}<\varepsilon. \tag{2.3}$$

Далее найдется также пара точек $t>T^*\ge T_\varepsilon$ со свойствами

$$|y'(T^*)|<\varepsilon,\quad |y'(t)|>2\varepsilon,$$

более того, можно выбрать эти точки так, чтобы $|t-T^*|\le 1$. Поскольку в противном случае
$$\int_{T_\varepsilon}^{+\infty}|y'|^q dx \ge \int_{t-1}^{t}|y'|^q dx \ge \varepsilon.$$
Если $y'(t)<0$, то доказательство аналогично предыдущему. Если же $y'(t)>2\varepsilon$, то следующая цепочка неравенств приводит к противоречию
$$y'(t)\le y'(T^*)+\int_{T^*}^{t}y''_+dx \le \varepsilon+\left(\int_{T^*}^{t}(y''_+)^p dx\right)^{1/p}(t-T^*)^{\frac{p-1}{p}}<2\varepsilon.$$
□

Пусть $\mathcal{P}_{[a,b]}$ есть множество непрерывно дифференцируемых кусочно полиномиальных функций f, определенных на $[a,b]$, со свойством $f'(a)=f'(b)=0$.

Лемма 2. *Для произвольного отрезка* $[a,b]$ *имеет место равенство*
$$K_+^2=\sup\{\Psi_{[a,b]}(f)\,:\,f\in\mathcal{P}_{[a,b]}\}.$$

Доказательство. Утверждение леммы равносильно тому, что для произвольной функции $y\in\mathcal{W}$ и любого $\varepsilon>0$ найдется отрезок δ и функция $f=f_\varepsilon\in\mathcal{P}_\delta$ со свойством
$$|\Psi(y)-\Psi_\delta(f)|<\varepsilon.$$

Перейдем к построению функции f. Возьмем $\varepsilon\in(0,1)$. Из леммы 1 и определения класса $\mathcal{W}$ следует, что для каждой функции $y\in\mathcal{W}$ найдется такое $T=T_\varepsilon>1$, что справедливы неравенства
$$|y(x)|<\varepsilon,\quad |y'(x)|<\varepsilon \text{ при } |x|\ge T_\varepsilon,$$
$$\int_{|x|>T_\varepsilon}|y|^r dx<\varepsilon,\quad \int_{|x|>T_\varepsilon}|y'|^q dx<\varepsilon,\quad \int_{|x|>T_\varepsilon}(y''_+)^p dx<\varepsilon. \tag{2.4}$$
Поскольку множество алгебраических многочленов плотно в $L_1(-T,T)$, то для y'' найдется алгебраический многочлен, который нам удобно обозначить f'', со свойством
$$\|y''-f''\|_{L_1(-T,T)}<\frac{\varepsilon}{T^3}. \tag{2.5}$$
Для $x\in[T,T]$ положим
$$f'(x)=y'(-T)+\int_{-T}^{x}f''(t)dt.$$
Введем обозначения
$$\mu:=f'(T),\quad \nu:=f'(-T),\quad \delta:=[-T-|\nu|,T+|\mu|].$$
Для $x\in(T,T+|\mu|]$ мы определяем $f'(x)=\mu+\operatorname{sign}\mu(T-x)$, для $x>T+|\mu|$ полагаем $f'(x)=0$. Аналогичным образом доопределяем функцию f' на промежутках $[-T-|\nu|,-T)$ и $(-\infty,-T-|\nu|)$. Как следствие, $|f''(x)|=1$, $x\in(-T-|\nu|,-T)\cup(T,T+|\mu|)$. Для $x\in\delta$ определим функцию f равенством
$$f(x)=y(-T)+\int_{-T}^{x}f'(t)dt.$$

Нам остается сравнить нормы y, y', y''_+ на $\mathbb{R}$ с соответствующими нормами f, f', f''_+ на отрезке δ. На этом этапе будет удобно считать, что функция f равна 0 вне δ.

Сначала сравним функции на отрезке $[-T,T]$. Применяя неравенство $|y''_+ - f''_+| \le |y'' - f''|$ и неравенство (2.5), мы получаем

$$\|y''_+ - f''_+\|_{L_1(-T,T)} \le \|y'' - f''\|_{L_1(-T,T)} < \frac{\varepsilon}{T^3}. \tag{2.6}$$

Вновь используя (2.5), имеем для $x \in [-T,T]$

$$|y'(x) - f'(x)| = \left|\int_{-T}^{x} (y''(t) - f''(t))dt\right| \le 2T\|y'' - f''\|_{L_1(-T,T)} \le \frac{2\varepsilon}{T^2}, \tag{2.7}$$

что сразу влечет

$$\|y' - f'\|_{L_q(-T,T)} \le \frac{2\varepsilon}{T^2}. \tag{2.8}$$

Из неравенства (2.7) следует, что

$$|y(x) - f(x)| = \left|\int_{-T}^{x} (y'(t) - f'(t))dt\right| < \frac{4\varepsilon}{T}, \quad x \in [-T,T], \tag{2.9}$$

и

$$\|y - f\|_{L_r[-T,T]} < \frac{4\varepsilon}{T}. \tag{2.10}$$

Теперь оценим интегралы от f, f', f''_+ на $\delta \setminus [-T,T]$. Применяя (2.7) для $x = T$ и второе неравенство в (2.4), мы получаем $|\mu| \le |f'(T) - y'(T)| + |y'(T)| \le \dfrac{2\varepsilon}{T^2} + \varepsilon \le 3\varepsilon$ и, как следствие,

$$\int_T^{T+|\mu|} (f''_+)^p dx \le \int_T^{T+|\mu|} 1^p dx = |\mu| \le 3\varepsilon, \quad t \in [0,|\mu|]. \tag{2.11}$$

$$\int_T^{T+|\mu|} |\mu|^q dx \le (3\varepsilon)^{q+1}, \quad t \in [0,|\mu|]. \tag{2.12}$$

Для модуля функции с помощью оценки $|\mu| \le 3\varepsilon$, (2.9) и (2.4) находим

$$|f(T+t)| = \left|\int_T^{T+t} f' dx + f(T)\right| \le \int_T^{T+|\mu|} |\mu| dx + |f(T) - y(T)| + |y(T)|$$
$$\le 9\varepsilon^2 + 4\varepsilon + \varepsilon \le 14\varepsilon.$$

Отсюда получаем

$$\int_T^{T+|\mu|} (14\varepsilon)^r dx \le (14\varepsilon)^r (3\varepsilon). \tag{2.13}$$

Для отрезка $[-T - |\nu|, -T]$ оценки аналогичны.

Оценим разности норм функций y и f и их производных на оси. Из (2.10), (2.4) и (2.13) следует

$$\big|\|y\|_r - \|f\|_r\big| \le \|y - f\|_r =$$
$$= \left(\int_{[-T,T]} |y - f|^r dx\right)^{1/r} + \left(\int_{\mathbb{R}\setminus\delta} |y|^r dx\right)^{1/r} + \left(\int_{\mathbb{R}\setminus\delta} |f|^r dx\right)^{1/r} \le \tag{2.14}$$
$$\le (2T)^{1/r} \frac{4\varepsilon}{T} + \varepsilon^{1/r} + 14\varepsilon(6\varepsilon)^{1/r} = O(\varepsilon^{1/r}),\ \varepsilon \to 0.$$

Сделав аналогичные преобразования для производных, из (2.8), (2.4) и (2.12) получим

$$(2.15)\quad \big|\|y'\|_q - \|f'\|_q\big| \le \|y' - f'\|_q < (2T)^{1/q}\frac{2\varepsilon}{3} + \varepsilon^{1/q} + (2(3\varepsilon)^{q+1}))^{1/q} = O(\varepsilon^{1/q}).$$

Для вторых производных воспользуемся соответственно (2.6), (2.4) и (2.11)

$$(2.16)\qquad \big|\|y''_+\|_p - \|f''_+\|_p\big| < (2T)^{1/p}\frac{\varepsilon}{T^3} + \varepsilon^{1/p} + (6\varepsilon)^{1/p} = O(\varepsilon^{1/p}).$$

Если функция y не эквивалентна нулю, то величины $\|y\|_r$ и $\|y''_+\|_p$ положительны. Поэтому для достаточно малых ε соотношения (2.14), (2.15), (2.16) влекут следующее представление для функционала Ψ_δ на функции $f = f_\varepsilon$:

$$\Psi_\delta(f_\varepsilon) = \frac{(\|y'\|_q + O(\varepsilon^{1/q}))^2}{(\|y\|_r + O(\varepsilon^{1/r}))(\|y''_+\|_p + O(\varepsilon^{1/p}))}.$$

Используя соотношение (2.1) от построенного отрезка δ можно перейти к отрезку $[0,1]$. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Предположим, что не эквивалентная* 0 *функция* y *абсолютно непрерывна, не убывает на отрезке* $[0,1]$ *и* $y' \in L_\infty(0,1)$. *Тогда при любом* $M \ge \|y'\|_{L_\infty(0,1)}$ *для точки* $\tau = \dfrac{y(1)-y(0)}{M} \le 1$ *и функции* $g(x) = Mx + y(0)$, *определенной на отрезке* $[0,\tau]$, *выполняются неравенства*

$$(2.17)\qquad \int_0^\tau |g'(x)|^q dx \ge \int_0^1 |y'(x)|^q dx, \qquad \int_0^\tau |g(x)|^r dx \le \int_0^1 |y(x)|^r dx.$$

Доказательство. Отметим, что в условиях леммы $0 \le y'(x) \le M$ для почти всех $x \in [0,1]$. Эта оценка позволяет получить первое неравенство

$$\int_0^1 y'(x)^q dx \le M^{q-1}\int_0^1 y'(x)dx = M^{q-1}(y(1)-y(0)) = M^q\tau = \int_0^\tau g'(x)^q dx.$$

Доказательство второго неравенства разобьем на три случая.

Первый случай $y(0) \ge 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию $f(x) = g(x-1+\tau)$ на отрезке $[1-\tau,1]$. Убедимся, что

$$(2.18)\qquad f(x) \le y(x), \quad x \in [1-\tau,1].$$

Действительно, разность $\Delta(x) = f(x) - y(x)$ имеет следующие свойства: $\Delta(1) = f(1) - y(1) = 0$, $\Delta'(x) = M - y'(x) \ge 0$ для почти для всех $x \in (1-\tau,1)$. Отсюда следует, что $\Delta(x) \le 0$, $x \in [1-\tau,1]$, а это совпадает с (2.18). В силу (2.18) имеем

$$(2.19)\qquad \int_0^\tau |g(x)|^r dx = \int_{1-\tau}^1 |f(x)|^r dx \le \int_0^1 |y(x)|^r dx.$$

Второй случай $y(1) \le 0$. Очевидно, что $g(x) \ge y(x)$ на $[0,\tau]$. Кроме того, $g(\tau) = y(1) \le 0$, следовательно,

$$(2.20)\qquad \int_0^\tau |g(x)|^r dx \le \int_0^\tau |y(x)|^r dx \le \int_0^1 |y(x)|^r dx.$$

Третий случай $y(0) < 0,\ y(1) > 0$. В этом случае найдется точка x_0, такая что $y(x_0) = 0$. Функция y на отрезке $[0, x_0]$ попадает под второй рассмотренный случай, а на отрезке $[x_0, 1]$ — под первый. Аналогами функции g и параметра τ на этих отрезках соответственно будут

$$\tau_1 = -y(0)/M, \quad \tau_2 = y(1)/M;$$

$$g_1(x) = g(x) = Mx + y(0),\ x \in [0, x_0]; \quad g_2(x) = M(x - x_0),\ x \in [0, x_0].$$

В силу (2.19), (2.20) справедливы неравенства

$$\begin{gathered}\int_0^{\tau_1} |g(x)|^r dx = \int_0^{\tau_1} |g_1(x)|^r dx \le \int_0^{x_0} |y(x)|^r dx, \\ \int_{x_0}^{x_0+\tau_2} |g_2(x)|^r dx \le \int_{x_0}^{1} |y(x)|^r dx.\end{gathered} \tag{2.21}$$

Имеем $g(\tau_1) = 0$, $g_2(x_0) = 0$, а следовательно $g_2(x - \tau_1 + x_0) = g(x)$. Кроме того $\tau = \tau_1 + \tau_2$. Поэтому

$$\begin{aligned}\int_0^{\tau} |g(x)|^r dx = \int_0^{\tau_1} |g(x)|^r dx + \int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} |g(x)|^r dx \\ = \int_0^{\tau_1} |g_1(x)|^r dx + \int_{x_0}^{x_0+\tau_2} |g_2(x)|^r dx.\end{aligned}$$

Тогда из (2.21) следует второе неравенство в (2.17) и в третьем случае лемма доказана. □

Следующая лемма позволяет свести рассмотрение задачи на отрезке к классу $\mathcal{U}$.

Лемма 4. *Для произвольного отрезка δ, справедлива оценка*

$$\sup\{\Psi_\delta(f) \,:\, f \in \mathcal{P}_\delta\} \le \sup\{\Psi_{[0,1]}(u) \,:\, u \in \mathcal{U}\}.$$

Доказательство. Покажем, что для любой $f \in \mathcal{P}_\delta$ найдется $u \in \mathcal{U}$ со свойством $\Psi_\delta(f) \le \Psi_{[0,1]}(u)$. Представим δ в виде объединения конечного числа отрезков δ_j, таких, что производная $f'(x)$ обращается в 0 на концах этих отрезков и либо строго положительна, либо строго отрицательна, либо тождественно равна 0 внутри. Пусть J есть множество индексов таких что $p' \not\equiv 0$ на δ_j. Обозначим

$$\Psi_m(f) := \max_{j \in J} \Psi_{\delta_j}(f). \tag{2.22}$$

Равенство (1.6) позволяет применить неравенство Гельдера для сумм с показателями $2r/q$, $2p/q$ и получить оценку

$$\begin{aligned}\left(\Psi_\delta(f)\|f\|_{L_r(\delta)}\|f''_+\|_{L_p(\delta)}\right)^{q/2} = \|f'\|^q_{L_q(\delta)} = \frac{1}{|\delta|}\int_\delta |f'|^q = \frac{1}{|\delta|}\sum_{j\in J}|\delta_j|\|f'\|^q_{L_q(\delta_j)} \\ = \frac{1}{|\delta|}\sum_{j\in J}|\delta_j|\left(\Psi_{\delta_j}(f)\|f\|_{L_r(\delta_j)}\|f''_+\|_{L_p(\delta_j)}\right)^{q/2}\end{aligned}$$

$$\le \frac{\Psi_m(f)^{q/2}}{|\delta|}\sum_{j\in J}|\delta_j|\|f\|^{q/2}_{L_r(\delta_j)}\|f''_+\|^{q/2}_{L_p(\delta_j)}$$

$$= \frac{\Psi_m(f)^{q/2}}{|\delta|}\sum_{j\in J}\left(\int_{\delta_j}|f|^r\right)^{q/(2r)}\left(\int_{\delta_j}(f''_+)^p\right)^{q/(2p)}$$

$$\le \frac{\Psi_m(f)^{q/2}}{|\delta|}\left(\sum_{j\in J}\int_{\delta_j}|f|^r\right)^{q/(2r)}\left(\sum_{j\in J}\int_{\delta_j}(f''_+)^p\right)^{q/(2p)}$$

$$\le \left(\Psi_m(f)\|f\|_{L_r(\delta)}\|f''_+\|_{L_p(\delta)}\right)^{q/2}.$$

Отсюда следует, что $\Psi_\delta(f) \le \Psi_m(f)$.

Оценим сверху $\Psi_m(f)$. В силу инвариантности задачи о супремуме $\Psi_{[a,b]}(f)$ по отрезку можно вместо $\Psi_{\delta_j}(f)$ рассматривать $\Psi_{[0,1]}(f)$ в предположении, что $f'(0) = f'(1) = 0$. Более того, можно считать, что $f'(x) \ge 0$ для $x \in [0,1]$. Действительно, если $f'(x) \le 0$ для $x \in [0,1]$, то вместо $f(x)$ можно рассматривать функцию $\overline{f}(x) = f(1-x)$, $x \in [0,1]$. Для неё имеем $\overline{f}''(x) = f''(1-x)$, $x \in [0,1]$; как следствие $\Psi_{[0,1]}(\overline{f}) = \Psi_{[0,1]}(f)$, при этом $\overline{f}'(x) = -f'(1-x) \ge 0$ для $x \in [0,1]$.

Итак, пусть f — кусочно полиномиальная, непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[0,1]$ со свойствами $f'(x) \ge 0$ для $x \in [0,1]$ и $f'(0) = f'(1) = 0$. Для завершения доказательства, предстоит построить функцию $u \in \mathcal{U}$, такую, что $\Psi_{[0,1]}(f) \le \Psi_{[0,1]}(u)$.

Если $f''(x) \ge 0$ для $x \in [0,1]$, то уже f лежит в $\mathcal{U}$. Предположим, что найдутся точки из отрезка $[0,1]$ такие, что f'' в них отрицательна. Тогда функция f' достигает максимального значения в некоторой точке $x_0 \in (0,1)$, если таких точек несколько, возьмем наименьшую. Обозначим $\overline{x} := x_0 + \dfrac{f(1)-f(x_0)}{f'(x_0)} \le 1$ и рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,x_0], \\ f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0), & x \in [x_0,\overline{x}]. \end{cases} \tag{2.23}$$

Очевидно, что $\|g''_+\|_{L_p[0,\overline{x}]} \le \|f''_+\|_{L_p[0,1]}$. В силу леммы 3 справедливы неравенства

$$\int\limits_0^{\overline{x}}|g(x)|^r dx \le \int\limits_0^1 |p(x)|^r dx, \quad \int\limits_0^{\overline{x}}|g'(x)|^q dx \ge \int\limits_0^1 |p'(x)|^q dx.$$

Отсюда получаем, что для $f_1(x) = g(x\overline{x})$ справедлива оценка

$$\Psi_{[0,1]}(f) \le \Psi_{[0,1]}(f_1)$$

. Если $f_1''(x) \ge 0$ для $x \in [0,1]$, то сужение f_1 на отрезок $[0,1]$ лежит в $\mathcal{U}$.

Если на $[0,1]$ найдутся отрезки, на которых $f_1''(x) < 0$, то обозначим через $[a,b] \in [0,1]$ наибольший из отрезков, на котором во всех точках отрезка, где вторая производная f_1'' существует, она удовлетворяет условию $f_1''(x) < 0$. Тогда найдется такая точка $d \in [b,1]$, что $f_1'(x) \le f_1'(a) = f_1'(d)$. Возьмём

$\overline{x} = a + \dfrac{f_1(d) - f_1(a)}{f_1'(a)} \le 1$ и определим функцию

$$g_1(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [0, a], \\ f_1'(a)(x-a) + f_1(a), & x \in [a, \overline{x}], \\ f_1(x + d - \tau), & x \in [\overline{x}, 1 - d + \overline{x}]. \end{cases} \tag{2.24}$$

При помощи леммы 3 получаем, что для $f_2(x) = g_1((1 - d + \overline{x})x)$ справедливо $\Psi_{[0,1]}(f_1) \le \Psi_{[0,1]}(f_2)$. В силу того, что количество интервалов выпуклости вверх конечно, можно построить выше описанным способом функцию $\overline{g} \in \mathcal{U}$, для которой $\Psi(f) \le \Psi_{[0,1]}(\overline{g})$. □

Объединяя утверждения лемм 2 и 4 получаем оценку K_+ сверху:

$$K_+^2 = \sup\{\Psi_{[a,b]}(f)\colon f \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} \le \sup\{\Psi_{[0,1]}(u)\colon\ u \in \mathcal{U}\} = \overline{K}^2. \tag{2.25}$$

2.2. **Оценка константы K_+ снизу.** Из определения класса $\mathcal{U}$ очевидно, что константа $\overline{K}^2$ конечна. Следовательно, на отрезке $[0,1]$ существует либо экстремальная функция, либо экстремальная последовательность. Обозначим такую последовательность $\{v_n\}$, если существует экстремальная функция v, то считаем, что $v_n = v$ для всех натуральных n. Имеем $v_n \in \mathcal{U}$ и $\Psi_{[0,1]}(v_n) \to \overline{K}^2$, $n \to \infty$. Наша цель — исходя из последовательности $\{v_n\}$, построить экстремальную последовательность $\{h_n\}$ на $\mathbb{R}$.

Лемма 5. *Если функция $v \in \mathcal{U}$ положительна на отрезке $[1/2, 1]$, то для $c = v(1/2)$ справедливо неравенство $\Psi_{[0,1]}(v) \le \Psi_{[0,1]}(v - c)$.*

Доказательство. В функционале $\Psi_{[0,1]}$ от аддитивной константы c зависит только интеграл от степени функции, поэтому достаточно показать, что

$$\int_0^1 |v(x)|^r dx \ge \int_0^1 |v(x) - c|^r dx. \tag{2.26}$$

Дост

Рассмотрим сначала $r = 1$. Для $x \in [1/2, 1]$ разность $|v(x)| - |v(x) - c| = c$, а для $x \in [0, 1/2]$ разность $|v(x)| - |v(x) - c| \ge -v(x) + v(x) - c = -c$, поэтому

$$\int_0^1 |v(x)| dx - \int_0^1 |v(x) - c| dx = \int_0^1 (|v(x)| - |v(x) - c|) dx \ge$$
$$\ge \int_0^{1/2} (-c) dx + \int_{1/2}^1 c\, dx = 0.$$

Рассмотрим $r > 1$. Для $\gamma \in [v(0), v(1/2)]$ обозначим через x_γ наименьшую точку $x \in [0, 1/2]$, в которой $v(x_\gamma) = \gamma$. Продифференцируем интеграл $J(\gamma) = \displaystyle\int_0^1 |v(x) - \gamma|^r dx$ по параметру γ, получим

$$J'(\gamma) = -\int_0^1 r|v(x) - \gamma|^{r-1} \operatorname{sign}(v(x) - \gamma) dx =$$
$$= r\int_0^{x_\gamma} (\gamma - v(x))^{r-1} dx - r\int_{x_\gamma}^1 (v(x) - \gamma)^{r-1} dx,$$

Заметим, что в силу неубывания v' для любого $t \in [0, x_\gamma]$ справедливо

$$\gamma - v(x_\gamma - t) = \int_{x_\gamma - t}^{x_\gamma} v'(x)dx \leq \int_{x_\gamma}^{x_\gamma + t} v'(x)dx = v(x_\gamma + t) - \gamma.$$

Учитывая, что $x_\gamma \in [0, 1/2]$, получаем оценку

$$\int_0^{x_\gamma} (\gamma - v(x))^{r-1} dx \leq \int_{x_\gamma}^1 (v(x) - \gamma)^{r-1} dx,$$

в силу которой $J'(\gamma) \leq 0$ для $\gamma \in [0, v(1/2)]$. Это влечет неравенство $J(0) \geq J(v(1/2))$, т.е. неравенство (2.26). Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. *Если не эквивалентная нулю функция* $v \in \mathcal{U}$ *не положительна на отрезке* $[0,1]$*, то для любого* $\varepsilon \in (0,1)$*, справедливо неравенство*

$$\Psi_{[0,1]}(v) \leq \Psi_{[0,1]}(v - v(1-\varepsilon)).$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\int_0^1 |v(x)|^r dx \geq \int_0^1 |v(x) - v(1-\varepsilon)|^r dx. \tag{2.27}$$

Так как функция v не убывает и не положительна, для любого ε при $x \in [0, 1-\varepsilon]$ выполняются следующие соотношения $|v(x)| = -v(x) > -v(x) + v(1-\varepsilon) = |v(x) - v(1-\varepsilon)|$, откуда легко получить

$$\int_0^{1-\varepsilon} |v(x)|^r dx \geq \int_0^{1-\varepsilon} |v(x) - v(1-\varepsilon)|^r dx. \tag{2.28}$$

Функция $-v(x) - v(2-\varepsilon-x)$ выпукла вверх на отрезке $[1-\varepsilon, 1]$, поскольку ее вторая производная $-v''(x) - v''(2-\varepsilon-x)$ не положительна на этом отрезке. Отсюда справедлива оценка

$$\min_{x \in [1-\varepsilon, 1]} \{-v(x) - v(2-\varepsilon-x)\} = -v(1-\varepsilon) - v(1) \geq -v(1-\varepsilon),$$

из которой следует, что

$$|v(2-\varepsilon-x)| = -v(2-\varepsilon-x) \geq -v(1-\varepsilon) + v(x) = |v(x) - v(1-\varepsilon)|.$$

Тогда

$$\int_{1-\varepsilon}^1 |v(x)|^r dx = \int_{1-\varepsilon}^1 |v(2-\varepsilon-x)|^r dx \geq \int_{1-\varepsilon}^1 |v(x) - v(1-\varepsilon)|^r dx. \tag{2.29}$$

Объединив (2.28) и (2.29) получаем (2.27). $\square$

На основании лемм 5 и 6 можно считать, что каждая функция v_n обращается в ноль в некоторой точке $x_n \in [1/2, 1)$. Пусть $\{z_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая условиям $x_n < z_n < 1$ и

$$\int_{[0,z_n]} |v_n'|^q dx \geq (1 - 1/n) \int_{[0,1]} |v_n'|^q dx. \tag{2.30}$$

На отрезке $[0,2]$ определим функции h_n равенствами

$$h_n(x) = \begin{cases} v_n(x), & x \in [0, z_n] \\ \dfrac{v_n'(z_n)}{2(z_n - 1)}(x - z_n)(x + z_n - 2) + v_n(z_n), & x \in (z_n, 1], \\ h_n(2-x), & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Продолжим функции h_n на отрезок $[0,2n]$ 2-периодически, а вне $[0,2n]$ определим следующим образом:

$$h_n(x) = \begin{cases} [2(x-2n)^3 - 3(x-2n)^2+1]v_n(0), & x \in [2n, 2n+1] \\ 0, & x > 2n+1 \\ h_n(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что на отрезке $[2n, 2n+1]$ справедливы неравенства

$$|h_n(x)| \le |v_n(0)|, \quad |h_n'(x)| \le |3v_n(0)|\,, \quad |h_n''(x)| \le |6v_n(0)|,$$

из которых вытекают оценки

$$\int_{2n}^{2n+1} |h_n|^r dx < |v_n(0)|^r, \quad \int_{2n}^{2n+1} |h_n'|^q dx < |3v_n(0)|^q\,,$$

$$\int_{2n}^{2n+1} |(h_n'')_+|^p dx \le \int_{2n}^{2n+1} |h_n''|^p dx < |6v_n(0)|^p.$$

Оценим интегралы от h_n и её производных на $[0,1]$ снизу. В силу выпуклости отрицательной части h_n

$$\int_0^1 |h_n|^r dx \ge \left(\int_0^1 |h_n| dx\right)^r \ge \left(\int_0^{1/2} |h_n| dx\right)^r \ge \left|\frac{v_n(0)}{4}\right|^r.$$

Для производных справедливы оценки

$$\int_0^1 |h_n'|^q dx \ge \left(\int_0^1 |h_n'| dx\right)^q = (h_n(1) - v_n(0))^q > |v_n(0)|^q,$$

$$\int_0^1 |(h_n'')_+|^p dx \ge \left(\int_0^1 |(h_n'')_+| dx\right)^p \ge (h_n'(x_n) - h_n'(0))^p = (v_n'(x_n))^p$$
$$\ge \left(\int_0^{x_n} v_n' dx\right)^p = |v_n(0)|^p.$$

Имеем

$$\|h_n\|_r = \left(4n\int_{[0,1]} |h_n|^r dx + 2\int_{[2n,2n+1]} |h_n|^r dx\right)^{1/r} = \tag{2.31}$$
$$= \|4nh_n\|_{L_r(0,1)}(1 + r_{0,n}/n)^{1/r},$$

где

$$r_{0,n} = \frac{\displaystyle\int_{[2n,2n+1]} |h_n|^r dx}{2\displaystyle\int_{[0,1]} |h_n|^r dx} \le \frac{4^r |v_n(0)|^r}{2|v_n(0)|^r} \le 4^r.$$

Аналогично

$$\|h_n'\|_q = \|4nh_n'\|_{L_r(0,1)}(1 + r_{1,n}/n)^{1/q}, \tag{2.32}$$

$$\|(h_n'')_+\|_p = \|4n(h_n'')_+\|_{L_p(0,1)}(1 + r_{2,n}/n)^{1/p}, \tag{2.33}$$

где

$$r_{1,n} = \frac{\displaystyle\int_{[2n,2n+1]} |h_n'|^q dx}{2\displaystyle\int_{[0,1]} |h_n'|^q dx} \le 3^q, \ r_{2,n} = \frac{\displaystyle\int_{[2n,2n+1]} |(h_n'')_+|^p dx}{2\displaystyle\int_{[0,1]} |(h_n'')_+|^p dx} \le 6^p.$$

По построению $(h_n'')_+ \le (v_n'')_+$, $0 \le h_n' \le v_n'$ и $|h_n| \le |v_n|$ на отрезке $[0,1]$. Поэтому $\|h_n\|_{L_r(0,1)} \le \|v_n\|_{L_r(0,1)}$ и $\|(h_n)_+''\|_{L_p(0,1)} \le \|(v_n)_+''\|_{L_p(0,1)}$. В силу выбора (2.30) точки z_n мы имеем

$$\int_{[0,1]} |h_n'|^q dx \ge \int_{[0,z_n]} |h_n'|^q dx = \int_{[0,z_n]} |v_n'|^q dx \ge (1-1/n)\int_{[0,1]} |v_n'|^q dx. \tag{2.34}$$

Полученные выше соотношения (2.31), (2.32), (2.33) и (2.34) позволяют написать неравенства

$$K_+^2 \ge \lim_{n\to\infty} \Psi_{\mathbb{R}}(h_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\|h_n'\|_{L_q(0,1)}}{\|h_n\|_{L_r(0,1)}\|(h_n'')_+\|_{L_p(0,1)}}$$

$$\ge \lim_{n\to\infty} \frac{(1-1/n)^{1/q}\|v_n'\|_{L_q(0,1)}}{\|v_n\|_{L_r(0,1)}\|(v_n'')_+\|_{L_p(0,1)}} = \lim_{n\to\infty} \Psi_{[0,1]}(v_n) = \overline{K}^2.$$

Последнее неравенство и неравенство (2.25) влекут равенство $K_+ = \overline{K}$. Теорема 1 доказана.

References

[1] A.N. Kolmogorov, *On inequalities between upper bounds of consecutive derivatives of an arbitrary function defined on an infinite interval,* Moskov. Gos. Univ., Uchenye Zap., **30** (1939), 3–16. Zbl 0061.11602

[2] V.V. Arestov, V.N. Gabushin, *Best approximation of unbounded operators by bounded ones,* Russ. Math., **39**:11 (1995), 38–63. Zbl 0856.41018

[3] V.V. Arestov, *Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems,* Russ. Math. Surv., **51**:6 (1996), 1093–1126. Zbl 0947.41019

[4] V.F. Babenko, N.P. Korneychuk, V.A. Kofanov, S.A. Pichugov, *Inequalities for derivatives and their applications,* Naukova dumka, Kyiv, 2003.

[5] V.A. Kofanov, *Inequalities for derivatieves of functions on an axis with nonsymmetrically bounded higher derivatives,* Ukr. Math. J., **64**:5 (2012), 721–736. Zbl 1258.41005

[6] Yu. Babenko, D. Skorokhodov, *Stechkin's problem for differential operators and functionals of first and second orders,* J. Approx. Theory. **167** (2013), 173—200. Zbl 1271.41005

[7] A.Yu. Shadrin, *The Landau–Kolmogorov inequality revisited,* Discrete Contin. Dyn. Syst., **34**:3 (2014), 1183–1210. Zbl 1280.41012

[8] D. Skorokhodov, *On the Landau-Kolmogorov inequality between $\|f'\|_\infty$,$\|f\|_\infty$ and $\|f'''\|_1$,* Res. Math. **27**:1 (2019), 55—66. Zbl 7437682

[9] V.N. Gabushin, *Inequalities between derivatives in the L_p metrics at $0 < p \le \infty$*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **40**:4 (1976), 869–892. Zbl 0332.46017

[10] L. Hörmander, *A new proof and a generalization of an inequality of Bohr,* Math. Scand., **2** (1954), 33–45. Zbl 0056.30801

[11] V.N. Gabushin, N.P. Dmitriev, *On comparison theorems,* Vychisl. Sist., **81** (1979), 55–62. Zbl 0464.26007

[12] E.A. Zernyshkina, *Kolmogorov type inequality in L_2 on the real line with one-sided norm*, East J. Approx. **12**:2 (2006), 127–150.

[13] N.S. Payuchenko, *Kolmogorov inequality in L_2, L_1 and one-sided L_∞ norms on the real line.* (in print)

[14] V.V. Arestov, V.I. Berdyshev, *Inequalities for differentiable functions,* Tr. Inst. Mat. Mekh., (Ekaterinburg), **17** (1975), 108–138.

Nikita Slavich Payuchenko
N.N. Krasovskii institute of Mathematics and Mechanics,
16, Sofya Kovalevskaya str.,
Yekaterinbuerg, 620108, Russia
Email address: aueiyo@gmail.com