

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

*Том 18, №2, стр. 1714–1719 (2021)*  
DOI 10.33048/semi.2081.18.131УДК 517.956.4  
MSC 35K58, 35Q92РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ХАОТИЧНОЙ  
ДИНАМИКЕ ПОЛИМЕРНОЙ МОЛЕКУЛЫ В СЛУЧАЕ  
ОГРАНИЧЕННОГО ПОТЕНЦИАЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В.Н. СТАРОВОЙТОВ

ABSTRACT. This paper deals with a boundary value problem for a parabolic differential equation that describes a chaotic motion of a polymer chain in water. The equation is nonlocal in time as well as in space. It includes a so called interaction potential that depends on the integrals of the solution over the entire time interval and over the space domain where the problem is being solved. The time nonlocality appears since the time plays the role of the arc length along the chain and each segment interacts with all others through the surrounding fluid. The weak solvability of the problem is proven for the case of the bounded continuous interaction potential. The proof of the solvability does not use any continuity properties of the solution with respect to the time and is based on the energy estimate only.

**Keywords:** nonlocal parabolic equation, initial boundary value problem, solvability.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , с липшицевой границей  $\partial\Omega$ . В пространственно-временном цилиндре  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $T \in (0, \infty)$ , рассмотрим

---

STAROVOITOV, V.N., SOLVABILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM OF CHAOTIC DYNAMICS OF POLYMER MOLECULE IN THE CASE OF BOUNDED INTERACTION POTENTIAL.

© 2021 Старовойтов В.Н.

Поступила 26 сентября 2021 г., опубликована 28 декабря 2021 г.

следующую краевую задачу:

$$(1) \quad \partial_t u - \Delta u + \varphi \left( \int_0^T \varrho(\cdot, t) dt \right) u = 0,$$

$$\varrho(x, t) = \frac{u(x, t)}{\int_{\Omega} u(x, t) dx},$$

$$(2) \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

$$(3) \quad u(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega,$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — пространственная переменная в  $\mathbb{R}^n$ ,  $t \in [0, T]$  — скалярная переменная,  $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$  — неизвестная функция, которую требуется определить в результате решения задачи,  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — так называемый потенциал взаимодействия, условия на который будут выписаны ниже.

Данная задача возникла в [1] при моделировании динамики полимерной молекулы (цепочки) в водном растворе. Поскольку полимерная цепочка движется хаотично, для описания её движения используется вероятностный подход. Переменная  $t$  играет роль параметра длины дуги вдоль полимерной цепочки и соответствует номеру звена цепи. То есть  $t = 0$  в первом звене и  $T$  есть длина всей цепочки. Функция  $\varrho = \varrho(x, t)$  представляет собой распределение плотности вероятности того, что  $t$ -е звено цепочки находится в точке  $x \in \Omega$ . Таким образом, хотя система (1)–(3) выглядит как нестационарная параболическая задача, физически она является стационарной и описывает усреднённое по времени состояние полимерной молекулы.

По своему смыслу функция  $\varrho$  должна быть неотрицательной, поэтому и решение задачи  $u$  необходимо искать в классе неотрицательных функций. Функция  $u$  связана с  $\varrho$  нормировочным условием, выписанным после уравнения (1). Его наличие связано с тем, что пространственный интеграл от  $\varrho$  представляет собой вероятность того, что каждое звено цепи находится в области  $\Omega$ , и поэтому должен быть равен единице.

В аргументе потенциала взаимодействия  $\varphi$  стоит интеграл от  $\varrho$  по всей длине цепочки, так как каждое звено цепи взаимодействует со всеми остальными через окружающую жидкость. Поскольку  $\varrho \geq 0$ , функция  $\varphi$  должна быть определена на  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ . В данной работе мы будем предполагать, что  $\varphi$  является ограниченной непрерывной функцией. Кроме того, при математическом исследовании задачи можно предположить, что эта функция является неотрицательной. В самом деле, предположим, что  $\varphi(\xi) \geq -K$  для некоторого положительного числа  $K$  и всех  $\xi \in \mathbb{R}_+$ . Если  $u$  есть решение задачи (1)–(3), то  $\bar{u}(x, t) = e^{-Kt} u(x, t)$  является решением следующей задачи:

$$\partial_t \bar{u} - \Delta \bar{u} + \bar{\varphi} \left( \int_0^T \bar{\varrho}(\cdot, t) dt \right) \bar{u} = 0, \quad \bar{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \bar{u}|_{t=0} = u_0,$$

где  $\bar{\varphi} = \varphi + K$  и  $\bar{\varrho}(x, t) = \bar{u}(x, t) / \int_{\Omega} \bar{u}(x, t) dx$ . То есть мы имеем точно такую же задачу, но с неотрицательным потенциалом  $\bar{\varphi}$ . В дальнейшем мы будем предполагать, что  $\varphi$  является неотрицательной функцией.

Несмотря на довольно простой вид уравнения (1), решение краевой задачи (1)–(3) связано с преодолением нескольких математических сложностей. Во-первых, в уравнении присутствует интеграл от решения по всему интервалу  $(0, T)$ , на котором решается задача. Если назвать переменную  $t$  временем, как обычно поступают при исследовании параболических уравнений, то наличие

такого интеграла означает, что текущее состояние системы зависит не только от предшествующих по времени состояний, но и от будущих. Эта ситуация необычна для параболических задач. Кроме того, при исследовании разрешимости нелинейных параболических задач решение обычно строится сначала на малом промежутке времени, а потом продолжается на весь интервал  $(0, T)$ . В нашем случае применение такого подхода невозможно. В последнее время стали появляться работы, посвящённые преодолению данной трудности (см. [2, 3, 4, 5, 6, 7]). Ещё одна сложность связана с нормировкой, которая предполагает деление решения на интеграл от него по области  $\Omega$ . То есть данный интеграл не должен обращаться в нуль на множестве положительной одномерной меры Лебега в  $[0, T]$ . В представленной работе для случая ограниченного потенциала взаимодействия удалось получить оценку снизу на этот интеграл, что позволило доказать обобщённую разрешимость задачи для произвольного  $T > 0$ . В случае неограниченного потенциала задача требует более серьёзного анализа.

## 2. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ

Мы будем использовать стандартные функциональные пространства Лебега и Соболева  $L^p(\Omega)$ ,  $H_0^1(\Omega)$ ,  $L^q(0, T; L^p(\Omega))$  и  $L^q(0, T; H_0^1(\Omega))$ , где  $p, q \in [1, \infty]$ . Норма в  $L^2(\Omega)$  будет обозначаться через  $\|\cdot\|$ .

**Определение 1.** Пусть  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  — непрерывная функция,  $T \in (0, \infty)$ ,  $u_0 \in L^2(\Omega)$  и  $u_0 \geq 0$ . Функцию  $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}_+$  назовём обобщённым решением задачи (1)–(3), если

(1)  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , а также  $\varphi(\zeta)u \in L^1(\Omega_T)$ , где

$$\zeta(x) = \int_0^T \varrho(x, t) dt, \quad \varrho(x, t) = \frac{u(x, t)}{\int_{\Omega} u(x, t) dx};$$

(2) интегральное тождество

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u \partial_t h - \nabla u \cdot \nabla h - \varphi(\zeta) u h) dx dt + \int_{\Omega} u_0 h_0 dx = 0$$

выполняется для произвольной гладкой в  $\Omega_T$  функции  $h$ , такой что  $h(x, t) = 0$  при  $x \in \partial\Omega$  и при  $t = T$ . Здесь  $h_0 = h|_{t=0}$ .

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству основного результата данной работы об обобщённой разрешимости задачи (1)–(3), установим справедливость одной вспомогательной леммы, в которой получена оценка снизу для  $\int_{\Omega} v(x, \cdot) dx$ , где  $v : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$  есть обобщённое решение следующей задачи:

$$(4) \quad \partial_t v - \Delta v + \eta v = 0 \quad \text{в } \Omega_T, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = v_0$$

и  $\eta : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}_+$  — ограниченная функция. Очевидно, что эта задача имеет единственное обобщённое решение, которое определяется также, как в определении 1 (см. [8]).

Обозначим через  $\lambda_*$  первое собственное значение и через  $\psi_*$  соответствующую ему собственную функцию оператора Лапласа  $(-\Delta)$  в области  $\Omega$  с однородным краевым условием Дирихле на  $\partial\Omega$ . Хорошо известно (см., например, [8, Сес. 6.5.1]), что  $\lambda_* > 0$  и  $\psi_* > 0$  в  $\Omega$ .

**Лемма 1.** Пусть  $v_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $v_0 \geq 0$ ,  $\eta \in L^\infty(\Omega_T)$  и  $0 \leq \eta \leq K$  почти всюду в  $\Omega_T$  для некоторого  $K > 0$ . Для каждого  $t \in [0, T]$  обобщённое решение задачи (4) удовлетворяет следующему неравенству:

$$(5) \quad \int_{\Omega} v(x, t) \psi_*(x) dx \geq e^{-(\lambda_* + K)t} \int_{\Omega} v_0(x) \psi_*(x) dx.$$

Как следствие, если  $\int_{\Omega} v_0(x) dx > 0$ , то существует положительная постоянная  $C_*$ , такая что

$$(6) \quad \int_{\Omega} v(x, t) dx \geq C_* \quad \text{для всех } t \in [0, T].$$

Постоянная  $C_*$  зависит от  $v_0$ ,  $\Omega$ ,  $T$  и  $K$ .

*Доказательство.* Докажем лемму для гладких функций  $v_0$  и  $\eta$ . В общем случае утверждение легко может быть доказано с помощью регуляризации и предельного перехода. Сначала отметим, что  $v \geq 0$  вследствие принципа максимума. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \psi_* dx &= \int_{\Omega} \partial_t v \psi_* dx = \int_{\Omega} (v \Delta \psi_* - \eta v \psi_*) dx \\ &= \int_{\Omega} (-v \lambda_* \psi_* - \eta v \psi_*) dx \geq -(\lambda_* + K) \int_{\Omega} v \psi_* dx. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует (5). Оценка (6) следует из (5), поскольку мы можем взять такую собственную функцию  $\psi_*$ , что  $\psi_* \leq 1$ , а для неё справедливо неравенство  $\int_{\Omega} v dx \geq \int_{\Omega} v \psi_* dx$ .  $\square$

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

**Теорема 1.** Предположим, что  $T \in (0, \infty)$ ,  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $u_0 \geq 0$ ,  $\int_{\Omega} u_0 dx > 0$  и  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  — непрерывная функция, такая что  $0 \leq \varphi(\xi) \leq K$  для всех  $\xi \in \mathbb{R}_+$  и некоторого  $K > 0$ . Тогда существует обобщённое решение  $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  задачи (1)–(3), такое что  $u \geq 0$ ,  $\partial_t u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ ,  $u \in C(0, T; L^2(\Omega))$ ,

$$(7) \quad \frac{1}{2} \|u(\cdot, t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(\cdot, s)\|^2 ds + \int_{\Omega} \varphi(\zeta) u^2(\cdot, t) dx \leq \frac{1}{2} \|u_0\|^2$$

и  $\int_{\Omega} u(x, t) dx > 0$  для всех  $t \in [0, T]$ , где  $\zeta(x) = \int_0^T (u(x, t) / \int_{\Omega} u(x, t) dx) dt$ .

*Доказательство.* Для доказательства разрешимости задачи применим теорему Шаудера о неподвижной точке. Пусть  $B_R$  — замкнутый шар радиуса  $R$  с центром в нуле в пространстве  $L^1(\Omega)$ . Число  $R$  будет определено позднее. Определим отображение  $\Psi : B_R \rightarrow B_R$ , о котором говорится в теореме Шаудера. Для каждого  $w \in B_R$  обозначим через  $u_w$  обобщённое решение следующей задачи:

$$(8) \quad \partial_t u_w - \Delta u_w + \varphi(w) u_w = 0, \quad u_w|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_w|_{t=0} = u_0.$$

Из классической теории параболических уравнений (см., например, [8, Ch. 7]) следует, что эта задача имеет единственное обобщённое решение. Положим

$$\Psi(w) = \int_0^T \varrho_w(\cdot, t) dt, \quad \varrho_w = \frac{u_w}{\int_{\Omega} u_w dx}.$$

Если некоторая функция  $w$  является неподвижной точкой отображения  $\Psi$ , то, как нетрудно видеть,  $u_w$  — обобщённое решение задачи (1)–(3). Таким образом, согласно теореме Шаудера необходимо доказать, что  $\Psi(B_R) \subset B_R$  для некоторого  $R > 0$  и  $\Psi : B_R \rightarrow L^1(\Omega)$  — непрерывное компактное отображение.

Из принципа максимума для задачи (8) следует, что  $u_w \geq 0$ . Кроме того, в силу леммы 1 существует такая постоянная  $C_*$ , что  $\int_{\Omega} u_w(x, t) dx \geq C_* > 0$  для всех  $t \in [0, T]$ . Поэтому  $\|\varrho_w(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \varrho_w(x, t) dx = 1$  для всех  $t \in [0, T]$  и справедлива оценка:

$$\|\Psi(w)\|_{L^1(\Omega)} \leq \int_0^T \|\varrho_w\|_{L^1(\Omega)} dt = T.$$

Таким образом, если мы возьмём  $R = T$ , то получим, что  $\Psi(B_R) \subset B_R$ .

Докажем непрерывность отображения  $\Psi$ . Энергетическая оценка для задачи (8) имеет следующий вид:

$$(9) \quad \frac{1}{2} \|u_w(\cdot, t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u_w(\cdot, s)\|^2 ds + \int_{\Omega} \varphi(w) u_w^2(\cdot, t) dx \leq \frac{1}{2} \|u_0\|^2$$

для почти всех  $t \in [0, T]$ . Возьмём теперь произвольную последовательность  $\{w_k\}$  в  $B_R$ , которая сходится в  $L^1(\Omega)$  к некоторой функции  $w \in B_R$ . Тогда  $w_k \rightarrow w$  по мере (Лебега) на  $\Omega$  и в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла  $\varphi(w_k) \rightarrow \varphi(w)$  в  $L^p(\Omega)$  для всех  $p \in [1, \infty)$ . Разность  $u_{w_k} - u_w$  является обобщённым решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \partial_t(u_{w_k} - u_w) - \Delta(u_{w_k} - u_w) + \varphi(w)(u_{w_k} - u_w) + (\varphi(w_k) - \varphi(w))u_{w_k} &= 0, \\ (u_{w_k} - u_w)|_{\partial\Omega} &= 0, \quad (u_{w_k} - u_w)|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому для неё справедлива энергетическая оценка:

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|(u_{w_k} - u_w)(\cdot, t)\|^2 + \int_0^T \|\nabla(u_{w_k} - u_w)(\cdot, s)\|^2 ds \leq c_k,$$

где

$$c_k = \frac{3}{2} \left( \int_0^T \|(\varphi(w_k) - \varphi(w))u_{w_k}(\cdot, s)\| ds \right)^2.$$

Как следует из оценки (9) и теорем вложения,

$$\int_0^T \|u_{w_k}(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)}^2 ds \leq C$$

для всех  $k \in \mathbb{N}$  и некоторой независимой от  $k$  постоянной  $C$ , где  $q = 2n/(n-2)$  при  $n > 2$  и  $q = \infty$  при  $n = 2$ . Поскольку, в силу неравенства Гёльдера,

$$\int_0^T \|(\varphi(w_k) - \varphi(w))u_{w_k}(\cdot, s)\| ds \leq \|(\varphi(w_k) - \varphi(w))\|_{L^p(\Omega)} \int_0^T \|u_{w_k}(\cdot, s)\|_{L^q(\Omega)} ds,$$

где  $p = 2q/(q-2)$ , мы получаем, что  $c_k \rightarrow 0$  и, как следствие,  $\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|(u_{w_k} - u_w)(\cdot, t)\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Поэтому

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \left| \int_{\Omega} (u_{w_k} - u_w)(\cdot, t) dx \right| \rightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

для почти всех  $t \in [0, T]$ . Отсюда, поскольку  $\int_{\Omega} u_w(\cdot, t) dx \geq C_*$  и  $\int_{\Omega} u_{w_k}(\cdot, t) dx \geq C_*$  для всех  $k \in \mathbb{N}$  и  $t \in [0, T]$ , несложно вывести, что  $\Psi(w_k) \rightarrow \Psi(w)$  в  $L^1(\Omega)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Таким образом, отображение  $\Psi$  является непрерывным на  $B_R$ .

Остаётся доказать компактность  $\Psi$ . Пусть  $\{w_k\}$  — произвольная последовательность в  $B_R$ . Необходимо показать, что существует такая её подпоследовательность  $\{w_{k'}\}$ , что  $\Psi(w_{k'})$  сходится в  $L^1(\Omega)$ . Согласно оценке (9), последовательность  $\{u_{w_k}\}$  является ограниченной в  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . Поэтому, в силу леммы 1, последовательность  $\{\nabla \varrho_{w_k}\}$  ограничена в  $L^2(\Omega_T)$  и, как следствие, последовательность  $\{\nabla \Psi(w_k)\}$  ограничена в  $L^2(\Omega)$ . Поскольку  $H^1(\Omega)$  компактно вкладывается в  $L^2(\Omega)$ , существует подпоследовательность  $\{\Psi(w_{k'})\}$ , которая сходится в  $L^2(\Omega)$ . Таким образом, отображение  $\Psi : B_R \rightarrow B_R$  является компактным.

Итак, все условия теоремы Шаудера выполнены и существует  $w \in L^1(\Omega)$ , такое что  $\Psi(w) = w$ . Тогда  $u = u_w$  является обобщённым решением задачи (1)–(3). Заметим, что при этом  $w = \zeta = \int_0^T (u(x, t) / \int_\Omega u(x, t) dx) dt$ , и выполнение энергетической оценки (7) для почти всех  $t \in [0, T]$  следует из (9). Она будет справедлива для всех  $t$ , если  $u \in C(0, T; L^2(\Omega))$ . Этот факт элементарно следует из того, что  $\partial_t u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  (см. [8]), а это, в свою очередь, вытекает из ограниченности функции  $\varphi$ . Неотрицательность решения  $u$  следует из принципа максимума, а тот факт, что  $\int_\Omega u(x, t) dx > 0$  для всех  $t \in [0, T]$  является следствием леммы 1. Теорема доказана.  $\square$

## REFERENCES

- [1] V.N. Starovoitov, B.N. Starovoitova, *Modeling the dynamics of polymer chains in water solution. Application to sensor design*, J. Phys.: Conf. Ser., **894** (2017), 012088.
- [2] A.Sh. Lyubanova, *On nonlocal problems for systems of parabolic equations*, J. Math. Anal. Appl., **421**: 2 (2015), 1767–1778. Zbl 1297.35107
- [3] V.N. Starovoitov, *Initial boundary value problem for a nonlocal in time parabolic equation*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **15** (2018), 1311–1319. Zbl 1401.35198
- [4] V.N. Starovoitov, *Boundary value problem for a global-in-time parabolic equation*, Math. Methods Appl. Sci., **44**:1 (2021), 1118–1126. Zbl 1469.35124
- [5] C. Walker, *Strong solutions to a nonlocal-in-time semilinear heat equation*, Q. Appl. Math., **79**:2 (2021), 265–272. Zbl 1461.35131
- [6] J.D. Djida, G.F.F. Gounoue, Y.K. Tchaptchie, *A global in time parabolic equation for symmetric Lévy operators*, (2021), arXiv preprint arXiv:2102.07278.
- [7] V.N. Starovoitov, *Weak solvability of a boundary value problem for a parabolic equation with a global-in-time term that contains a weighted integral*, J. Elliptic Parabol. Equ., **7**:2 (2021), 623–634. Zbl 7446447
- [8] L.C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, **19**, American Mathematical Society, Providence, 1998. Zbl 0902.35002

VICTOR N. STAROVOITOV  
 LAVRENTYEV INSTITUTE OF HYDRODYNAMICS,  
 15, LAVRENTYEVA AVE.,  
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA  
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,  
 2, PIROGOVA STR.,  
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA  
 Email address: starovoitov@hydro.nsc.ru