S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №2, стр. 1735–1741 (2021) УДК 515.126
DOI 10.33048/semi.2021.18.133 MSC 54C10

УПЛОТНЕНИЯ БОРЕЛЕВСКИХ ПОДМНОЖЕСТВ ПРЯМОЙ ЗОРГЕНФРЕЯ НА КОМПАКТЫ

В.Р. СМОЛИН

Abstract. We prove that the topology of an uncountable Borel subset of the Sorgenfrey line is equal to the supremum of metrizable compact topologies. As a corollary we obtain that a Borel subset of the Sorgenfrey line has a weak Hausdorff compact topology if and only if it is either uncountable or countable and scattered.

Keywords: Sorgenfrey line, Borel set, supremum of topologies, compact condensation, weak compact topology, Lusin scheme

1. Введение

Все пространства, рассматриваемые в статье, хаусдорфовы топологические пространства. Уплотнением называется биективное непрерывное отображение. Вопрос о том, какие пространства уплотняются на компакты, был поставлен П.С. Александровым в середине 20 века. Обзор результатов, посвящённых этому вопросу, можно найти в работе [8]. Е.Г. Пыткеевым [2] было доказано, что топология борелевского не σ-компактного подмножества польского пространства равна супремуму двух топологий гильбертова куба. Также Пыткеевым было получено полное описание тех борелевских подмножеств вещественной прямой, которые уплотняются на компакты. В связи с этими результатами естественно возникает вопрос об уплотнении на компакты борелевских подмножеств прямой Зоргенфрея, т.е. вещественной прямой с топологией, база которой состоит из полуинтервалов $[a, b)$, где $a < b$.

Smolin, V.R., Continuous bijections of Borel subsets of the Sorgenfrey line on compact spaces.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

Поступила 25 октября 2019 г., опубликована 30 декабря 2021 г.

В статье доказывается, что топология несчётного борелевского подмножества прямой Зоргенфрея равна супремуму метрических компактных топологий. Как следствие получена полная классификация борелевских подмножеств прямой Зоргенфрея, которые уплотняются на компакты (см. Теорема 4). Также построено открытое подмножество прямой Зоргенфрея, которое уплотняется на компакт, но как подпространство вещественной прямой слабой компактной топологии не имеет.

2. Обозначения и терминология

Мы используем терминологию из [1], [4] и [6], в соответствии с которой $\omega =$ множество конечных ординалов $=$ множество натуральных чисел, а также каждый ординал равен множеству всех меньших ординалов, так что $n = \{0,\dots,n-1\}$ для всех $n\in\omega$. Множество X — *счётно* означает, что существует биекция между X и ω. Также мы используем следующие обозначения:

Обозначения 1. Символ $:\longleftrightarrow$ используется, чтобы показать, что выражение с левой стороны является сокращением для выражения с правой стороны;

- $0=\emptyset\in\omega$;
- s — последовательность $:\longleftrightarrow$ s — функция такая, что $\mathsf{dom}(s)\in\omega$ или $\mathsf{dom}(s)=\omega$;
- если s — последовательность, то $\mathsf{length}(s):=\mathsf{dom}(s)$;
- $\langle s_0,\dots,s_{n-1}\rangle :=$ последовательность s такая, что $\mathsf{length}(s)=n\in\omega$ и $s(i)=s_i$ для всех $i\in n$;
- $\langle\rangle :=$ такая последовательность q, что $\mathsf{length}(q)=0$;
- если $s=\langle s_0,\dots,s_{n-1}\rangle$, то $s\,\hat{}\,x := \langle s_0,\dots,s_{n-1},x\rangle$;
- $f\restriction A :=$ сужение функции f на множество A;
- если s и t — последовательности, то $s\sqsubseteq t$ $:\longleftrightarrow$ $s=t\restriction\mathsf{length}(s)$;
- ${}^BA :=$ множество функций из B в A;
- ${}^{<\omega}A := \bigcup_{n\in\omega}{}^nA =$ множество конечных последовательностей элементов множества A;
- $\trianglelefteq_n :=$ лексикографический порядок на ${}^n\omega$;
- $s\vartriangleleft_n q :\longleftrightarrow s\trianglelefteq_n q$ и $s\neq q$.

Обозначения 2.

- $\omega^\omega :=$ пространство Бэра $:=$ счётная степень счётного дискрета;
- $\mathbb{S} :=$ прямая Зоргенфрея;
- $\mathbb{K} :=$ канторово множество $:=$ счётная степень двухточечного дискрета;
- $\mathbb{R} :=$ вещественная прямая; $\mathbb{I} :=$ отрезок $[0,1]$; $\mathbb{Q} :=$ множество рациональных чисел; $\mathbb{Z} :=$ множество целых чисел;
- $\tau_{\mathbb{R}} :=$ евклидова топология на вещественной прямой; $\tau_{\mathbb{S}} :=$ топология прямой Зогенфрея;
- если $\langle X,\tau\rangle$ — топологическое пространство и $A\subseteq X$, то $\tau\restriction A :=$ топология подпространства на множестве A;
- если X и Y — топологические пространства, то $X\cong Y :\longleftrightarrow X$ гомеоморфно Y;
- если γ — семейство топологий на некотором множестве, то $\mathsf{sup}\,\gamma :=$ супремум семейства топологий γ, т.е. топология, порождённая предбазой $\bigcup\gamma$;

- если $\langle X, \tau\rangle$ — топологическое пространство, то $\mathsf{Bor}(\langle X, \tau\rangle) :=$ минимальная σ-алгебра такая, что $\tau \subseteq \mathsf{Bor}(\langle X, \tau\rangle) = \sigma$-алгебра борелевских множеств пространства $\langle X, \tau\rangle$.

Напомним [1], что *схема Лузина* на множестве X — это семейство $\mathbf{S} = \langle S_a\rangle_{a\in {}^{<\omega}\omega}$ подмножеств X такое, что

(L0) $S_{a\,\hat{}\,n} \subseteq S_a$ для всех $a \in {}^{<\omega}\omega$ и $n \in \omega$;
(L1) $S_{a\,\hat{}\,n} \cap S_{a\,\hat{}\,m} = \emptyset$ для всех $a \in {}^{<\omega}\omega$ и $n \neq m \in \omega$.

Схема Лузина $\mathbf{S} = \langle S_a\rangle_{a\in {}^{<\omega}\omega}$ на множестве X называется *точной* [5], если выполняются следующие условия:

(L2) $S_{\langle\rangle} = X$;
(L3) $S_a = \bigcup_{n\in\omega} S_{a\,\hat{}\,n}$ для всех $a \in {}^{<\omega}\omega$;
(L4) $|\bigcap_{n\in\omega} S_{p\restriction n}| = 1$ для всех $p \in {}^{\omega}\omega$.

Пусть $\langle X, \tau\rangle$ — топологическое пространство. Тогда схема Лузина $\mathbf{S} = \langle S_a\rangle_{a\in {}^{<\omega}\omega}$ на множестве X называется *открытой схемой Лузина* [5] на пространстве $\langle X, \tau\rangle$, если выполнено:

(L5) $S_a \in \tau$ для всех $a \in {}^{<\omega}\omega$.

Обозначения 3.

- Пусть $\mathbf{S} = \langle S_a\rangle_{a\in {}^{<\omega}\omega}$ — точная схема Лузина на множестве X и $x \in X$. Тогда $\mathsf{seq}(\mathbf{S}, x)$ — это последовательность $q \in {}^{\omega}\omega$ такая, что $\{x\} = \bigcap_{n\in\omega} S_{q\restriction n}$;
- пусть $\mathbf{S} = \langle S_a\rangle_{a\in {}^{<\omega}\omega}$ точная схема Лузина на множестве X и $q \in {}^{\omega}\omega$. Тогда $\mathsf{pnt}(\mathbf{S}, q) \in X$ — это точка $x \in X$ такая, что $\{x\} = \bigcap_{n\in\omega} S_{q\restriction n}$.

3. Предварительные результаты

Далее нам потребуются следующие результаты:

Теорема 1. [2, Theorem 1] *Пусть $\langle X, \tau\rangle$ — топологическое пространство, гомеоморфное борелевскому (т.е. борелевскому в некотором полном метрическом пространстве) сепарабельному не σ-компактному пространству. Тогда $\tau = \mathsf{sup}\{\tau_1, \tau_2\}$, где $\langle X, \tau_i\rangle$ гомеоморфно $\mathbb{I}^{\omega}$.*

Теорема 2. [7, Proposition 1.2] *Если σ-компактное метризуемое пространство X уплотняется на метризуемое полной метрикой пространство Y, то X метризуемо полной метрикой.*

Доказательство. Пусть $X = \bigcup_{i\in\omega} B_i$, где B_i — компакт, для каждого $i \in \omega$. Пусть также $f : X \to Y$ — уплотнение. Поскольку пространство X σ-компактно, то оно сепарабельно, следовательно пространство Y также сепарабельно, а значит обладает счетной базой. Тогда найдется метризуемое компактное расширение пространства Y, обозначим его через cY. Тогда существует [9, Ch. 4, Pr. 11] метризуемое компактное расширение bX пространства X и непрерывное продолжение $f^* : bX \to cY$ отображения f. Мы можем считать, что f^* — сюръекция. Покажем, что X — G_δ в bX, этим, в силу [4, Theorem 4.3.26], теорема будет доказана. Так как Y метризуемо полной метрикой, то [4, Theorem 4.3.26] $cY \setminus Y = \bigcup_{i\in\omega} K_i$, где K_i — компакт, для каждого $i \in \omega$. Обозначим $B_i^* := f^{*-1}[f^*[B_i]]$ для всех $i \in \omega$. Так как f биекция, то $B_i^* \cap X = B_i$ для всех $i \in \omega$. Отсюда следует, что $bX \setminus X = \bigcup_{i\in\omega} f^{*-1}[K_i] \cup \bigcup_{i\in\omega}(B_i^* \setminus B_i)$, а так как $B_i^* \setminus B_i$ — открытое подмножество метризуемого компакта B_i^* и потому

σ-компактно для всякого $i \in \omega$, то и $bX \setminus X$ σ-компактно. Следовательно, X — G_δ-множество в bX. $\square$

Лемма 1. [5, Lemma 3.3] *Пусть $\langle S_a\rangle_{a\in{}^{<\omega}\omega}$ — точная схема Лузина на множестве X. Тогда множество $\{S_a : a \in {}^{<\omega}\omega\}$ является базой, а пространство $\langle X,\tau\rangle$, где топология τ порождена множеством $\{S_a : a \in {}^{<\omega}\omega\}$, гомеоморфно ω^ω.*

Лемма 2. *Пусть $\langle S_a\rangle_{a\in{}^{<\omega}\omega}$ — точная схема Лузина на множестве X, и топология τ порождена базой $\{S_a : a \in {}^{<\omega}\omega\}$. Тогда для любой точки $x \in X$ выполнено: семейство $\{S_{\mathsf{seq}(\mathbf{S},x)\restriction n} : n \in \omega\}$ является базой точки x в пространстве $\langle X,\tau\rangle$.*

Лемма 3. $\mathsf{Bor}(\mathbb{S}) = \mathsf{Bor}(\langle\mathbb{R},\tau_\mathbb{R}\rangle)$.

Доказательство. Включение $\mathsf{Bor}(\langle\mathbb{R},\tau_\mathbb{R}\rangle) \subseteq \mathsf{Bor}(\mathbb{S})$ очевидно, так как топология прямой Зоргенфрея сильнее топологии вещественной прямой.

Чтобы доказать обратное включение покажем, что $\tau_\mathbb{S} \subseteq \mathsf{Bor}(\langle\mathbb{R},\tau_\mathbb{R}\rangle)$. Пусть $U = \bigcup_{\alpha\in\lambda}[a_\alpha, r_\alpha)$. Из того, что $\mathbb{S}$ является наследственно линделёфовым пространством, следует, что найдётся не более чем счётное множество $\gamma \subseteq \lambda$ такое, что $U = \bigcup_{\alpha\in\gamma}[a_\alpha, r_\alpha)$, а так как для любых $a < b \in \mathbb{R}$ верно, что $[a,b) \in \mathsf{Bor}(\langle\mathbb{R},\tau_\mathbb{R}\rangle)$, мы имеем $U \in \mathsf{Bor}(\langle\mathbb{R},\tau_\mathbb{R}\rangle)$. $\square$

В построении, описанном далее, мы используем идеи из [5, Lemma 3.6].

Пример 1. Пусть $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq \mathbb{R}$ и L — счётно. Через $\mathbf{S}^L$ обозначим открытую точную схему Лузина $\langle S^L_a\rangle_{a\in{}^{<\omega}\omega}$ на $\mathbb{S}$, построенную следующим способом:

Пусть $f : \omega \to L$ — биекция. В качестве $S^L_{\langle\rangle}$ и $\{S^L_a : \mathsf{length}(a) = 1\}$ возьмём множества $\mathbb{R}$ и $\{[i, i+1) : i \in \mathbb{Z}\}$ соответственно. Пусть $\mathsf{length}(a) \geq 1$ и множество $S^L_a = [i^L_a, j^L_a)$ уже построено. Рассмотрим такую последовательность $\langle x_n\rangle_{n\in\omega}$, все элементы которой принадлежат $S^L_a \cap L$, которая сходится к j^L_a в топологии $\tau_\mathbb{R}$, $x_0 = i^L_a$, $x_{n+1} > x_n$, $x_{n+1} - x_n \leq \frac{1}{\mathsf{length}(a)+1}$ и, если $f(\mathsf{length}(a)-1) \in S^L_a$, то $f(\mathsf{length}(a)-1)$ является одним из элементов этой последовательности. Определим $i^L_{a^\frown n} := x_n$, $j^L_{a^\frown n} := x_{n+1}$ и $S^L_{a^\frown n} := [i^L_{a^\frown n}, j^L_{a^\frown n}) = [x_n, x_{n+1})$.

Через τ_L обозначим топологию на $\mathbb{R}$, порождённую базой $\{S^L_a : a \in {}^{<\omega}\omega\}$.

Замечание 1. *Пусть $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq L_2 \subseteq \mathbb{R}$, а также L и L_2 — счётны. Тогда:*

(i) $\tau_\mathbb{R} \subseteq \tau_L \subseteq \tau_\mathbb{S}$;
(ii) $\langle\mathbb{R},\tau_L\rangle \cong \omega^\omega$;
(iii) $\tau_L \subseteq \tau_{L_2}$;
(iv) *пусть $q, t \in {}^{<\omega}\omega$, $\mathsf{length}(q) = \mathsf{length}(t) \geq 2$, $(q \restriction 2) = (t \restriction 2)$ и $j^L_q \leq i^L_t$, тогда $q \lhd_{\mathsf{length}(q)} t$.*

Лемма 4. *Пусть $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq \mathbb{R}$, L — счётно, $\mathbf{S}^L$ схема Лузина из Примера 1, $x \in L$, $z \in \mathbb{R}$ и $z > x$. Тогда найдётся такая последовательность $b \in {}^{<\omega}\omega$, что $S^L_b = [x, j^L_b) \subseteq [x, z)$.*

Лемма 5. *Пусть B — борелевское множество в $\mathbb{S}$. Тогда какое бы счётное множество $L \subset \mathbb{R}$, содержащее $\mathbb{Q}$, мы ни взяли, будет выполняться следующее: B — борелевское множество в $\langle\mathbb{R},\tau_L\rangle$.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из Леммы 3 и первого включения из пункта (i) Замечания 1. $\square$

Лемма 6. *Пусть B — несчётное борелевское множество в $\mathbb{S}$. Тогда существует такое счётное множество $L \subseteq \mathbb{R}$, что B — борелевское не σ-компактное множество в $\langle \mathbb{R}, \tau_L \rangle$.*

Доказательство. Пусть $L_1 := \mathbb{Q}$. Из Леммы 5 следует, что B — борелевское множество в $\langle \mathbb{R}, \tau_{L_1} \rangle$. Так как B несчётно и $\langle \mathbb{R}, \tau_{L_1} \rangle \cong \omega^\omega$, существует такое множество $K \subset B$, что $\langle K, \tau_{L_1} \upharpoonright K \rangle \cong \mathbb{K}$ [1, Theorem 13.6].

Для всех $n \in \omega$ и $q \in {}^{<\omega}\omega$ обозначим

$$I_n := \{a \in {}^n\omega : S_a^{L_1} \cap K \neq \emptyset\};$$
$$I_n(q) := \{a \in I_n : q \sqsubseteq a\};$$
$$I := \bigcup_{n \in \omega \setminus 2} I_n.$$

Так как $\langle K, \tau_{L_1} \upharpoonright K \rangle$ — компакт, то

(1) $\qquad I_n$ — конечно $\qquad$ для любого $n \in \omega$.

Из того, что $\mathbf{S}^{L_1}$ образует базу топологии τ_{L_1}, следует, что

(2) $\qquad \{S_a^{L_1} \cap K : a \in I\}$ — база в $\langle K, \tau_{L_1} \upharpoonright K \rangle$.

Пусть $n \in \omega \setminus 2$ и $a \in I_n$. Поставим в соответствие последовательности a последовательность $q_a \in {}^\omega\omega$ следующим образом: для каждого $k \in \omega$ определим, чему равно $q_a(k)$: если $k < n$, то положим $q_a(k) := a(k)$. Пусть $k \geq n$ и $(q_a \upharpoonright k) \in I_k$, тогда в качестве $q_a(k)$ возьмём такое натуральное число, что $q_a \upharpoonright (k+1)$ — $\vartriangleleft_{(k+1)}$-максимальная последовательность в $I_{k+1}(q_a \upharpoonright k)$, такое m существует в силу (1). Положим $\mathsf{x}(a) := \mathsf{pnt}(\mathbf{S}^{L_1}, q_a) \in \mathbb{R}$.

Покажем, что

(3) $\qquad \mathsf{x}(a) \in S_a^{L_1} \cap K \qquad$ для любой последовательности $a \in I$.

По построению $\mathsf{x}(a) = \mathsf{pnt}(\mathbf{S}^{L_1}, q_a)$, где q_a выбрана таким образом, что для любого $k \in \omega$ выполняется $S_{q_a \upharpoonright k}^{L_1} \cap K \neq \emptyset$. Тогда в силу замкнутости множества K в пространстве $\langle \mathbb{R}, \tau_{L_1} \rangle$ из Леммы 2 следует утверждение (3).

Обозначим

$$C := \{\mathsf{x}(a) : a \in I\}.$$

Из утверждений (1), (2) и (3) следует, что множество C счётно и плотно в $\langle K, \tau_{L_1} \upharpoonright K \rangle$, следовательно, в силу Упражнения 7.13 из [1]

(4) $\qquad \langle K \setminus C, \tau_{L_1} \upharpoonright (K \setminus C) \rangle \cong \omega^\omega.$

Покажем, что найдётся такая точка $\mathsf{z}(a) \in \mathbb{R}$, что справедливо

(5) $\qquad [\mathsf{x}(a), \mathsf{z}(a)) \cap K = \{\mathsf{x}(a)\} \qquad$ для каждой последовательности $a \in I$.

Пусть $n \in \omega \setminus 2$ и $a \in I_n$. Рассмотрим множество $S_a^{L_1} = [i_a^{L_1}, j_a^{L_1})$; в нём найдётся такая точка $\mathsf{z}(a)$, что $[\mathsf{x}(a), \mathsf{z}(a)) \subseteq [i_a^{L_1}, j_a^{L_1})$. Покажем теперь, что $([i_a^{L_1}, j_a^{L_1}) \cap K) \cap [\mathsf{x}(a), +\infty) = \{\mathsf{x}(a)\}$. От противного, пусть $y \in [i_a^{L_1}, j_a^{L_1}) \cap K$ и $y > \mathsf{x}(a)$. Тогда найдутся такое натуральное $m > n$ и $t \in I_m(a)$, что $y \in S_t^{L_1} = [i_t^{L_1}, j_t^{L_1}) \subset [i_a^{L_1}, j_a^{L_1})$ и $j_{q_a \upharpoonright m}^{L_1} \leq i_t^{L_1}$. Заметим, что $t \upharpoonright 2 = (q_a \upharpoonright m) \upharpoonright 2 = a \upharpoonright 2$, тогда из пункта (iv) Замечания 1 следует, что $(q_a \upharpoonright m) \vartriangleleft_m t$, поэтому найдётся такое $k \geq n$, что $t \upharpoonright k = q_a \upharpoonright k$, и $q_a \upharpoonright (k+1) \vartriangleleft_{(k+1)} t \upharpoonright (k+1)$. Но $q_a \upharpoonright (k+1)$ является $\vartriangleleft_{(k+1)}$-максимальной в $I_{k+1}(q_a \upharpoonright k)$ по построению — противоречие.

Пусть $L := L_1 \cup C$. Из Леммы 5 следует, что B — борелевское множество в $\langle \mathbb{R}, \tau_L \rangle$. Покажем, что оно не σ-компактно в этом пространстве. Так как $C \subseteq L$, то по Лемме 4 для каждой последовательности $a \in I$ найдётся такая точка $y = j_b^L$, что $[\mathsf{x}(a), y) \in \tau_L$ и $[\mathsf{x}(a), y) \subseteq [\mathsf{x}(a), \mathsf{z}(a))$. Из этого и формулы (5) следует, что множество C открыто в пространстве $\langle K, \tau_L \upharpoonright K \rangle$, а значит $K \setminus C$ в нём замкнуто, и, следовательно, оно замкнуто в пространстве $\langle B, \tau_L \upharpoonright B \rangle$. Из формулы (4) и пункта (iii) Замечания 1 следует, что $\langle K \setminus C, \tau_L \upharpoonright (K \setminus C) \rangle$ уплотняется на ω^ω (которое не σ-компактно, см. Упражнение 4.11 в [1]), а значит оно не σ-компактно. Таким образом, мы нашли в пространстве $\langle B, \tau_L \upharpoonright B \rangle$ замкнутое не σ-компактное множество, а значит и оно само не σ-компактно. $\square$

4. Основные результаты

Теорема 3. *Пусть B — несчётное борелевское множество в прямой Зоргенфрея. Тогда топология подпространства на множестве B представима как супремум метрических компактных топологий. В частности $\langle B, \tau_{\mathbb{S}} \upharpoonright B \rangle$ уплотняется на компакт.*

Доказательство. Из Леммы 6 следует, что существует множество $L \subseteq \mathbb{R}$ такое, что B — борелевское не σ-компактное множество в $\langle \mathbb{R}, \tau_L \rangle \cong \omega^\omega$. Пункт (iii) Замечания 1 влечёт, что B также борелевское не σ-компактное множество в $\langle \mathbb{R}, \tau_{L \cup \{b\}} \rangle \cong \omega^\omega$, для любой точки $b \in B$. Из Теоремы 1 следует, что $\tau_{L \cup \{b\}} \upharpoonright B = \mathsf{sup}\{\tau_1^b, \tau_2^b\}$, где $\langle B, \tau_i^b \rangle \cong \mathbb{I}^\omega$. Тогда, в силу второго включения из пункта (i) Замечания 1, а также Леммы 4, имеем $\tau_{\mathbb{S}} \upharpoonright B = \mathsf{sup}\{\tau_{L \cup \{b\}} \upharpoonright B : b \in B\}$, а $\mathsf{sup}\{\tau_{L \cup \{b\}} \upharpoonright B : b \in B\} = \mathsf{sup}\{\tau_i^b : b \in B, i \in \{1, 2\}\}$. $\square$

Теорема 4. *Борелевское подмножество прямой Зоргенфрея уплотняется на компакт тогда и только тогда, когда оно либо несчётно, либо не более чем счётно и разреженно.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из Теоремы 3 и того, что для счётного регулярного пространства улотняемость на компакт эквивалентна разреженности [3]. $\square$

5. Пример

В этом разделе мы строим открытое подмножество прямой Зоргенфрея, которое уплотняется на компакт, но как подпространство вещественной прямой слабой компактной топологии не имеет.

Пример 2. Пусть K — подмножество вещественной прямой гомеоморфное канторову множеству. Представим множество $\mathbb{R} \setminus K$ в виде дизъюнктного объединения дополнительных интервалов:

$$\mathbb{R} \setminus K = \bigsqcup_{n \in \omega} (a_n, a_n + r_n) \sqcup (-\infty, a) \sqcup (b, +\infty). \tag{6}$$

Обозначим

$$T := \bigcup_{n \in \omega} [a_n, a_n + r_n).$$

Теорема 5. *$\langle T, \tau_{\mathbb{S}} \upharpoonright T\rangle$ уплотняется на компакт, а $\langle T, \tau_{\mathbb{R}} \upharpoonright T\rangle$ не уплотняется на компакт.*

Доказательство. Заметим, что $T \in \tau_{\mathbb{S}}$, тогда из Теоремы 4 следует, что $\langle T, \tau_{\mathbb{S}} \upharpoonright T\rangle$ уплотняется на компакт.

Покажем, что T не G_δ в $\langle \mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}\rangle$. От противного, пусть T является G_δ множеством в $\langle \mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}\rangle$. Положим $A := T \cap K$, заметим, что $A = \{a_n : n \in \omega\}$. Покажем, что A плотно в $\langle K, \tau_{\mathbb{R}} \upharpoonright K\rangle$. Пусть $k, l \in \mathbb{R}$ и $(k, l) \cap K \neq \emptyset$, тогда найдутся $x, y \in (k, l) \cap K$ такие, что $x < y$. Так как K нигде не плотно в $\langle \mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}\rangle$, из формулы (6) следует, что найдётся такое $n \in \omega$, что $(a_n, a_n + r_n) \subseteq (x, y) \subset (k, l)$, а значит $a_n \in (k, l) \cap K$.

Так как T является G_δ множеством в $\langle \mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}\rangle$, то A — G_δ в $\langle K, \tau_{\mathbb{R}} \upharpoonright K\rangle \cong \mathbb{K}$, но это противоречит утверждению Упражнения 8.7 из [1]. Таким образом мы показали, что T не G_δ в $\langle \mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}\rangle$, а следовательно [1, Theorem 3.11] $\langle T, \tau_{\mathbb{R}} \upharpoonright T\rangle$ не метризуемо полной метрикой.

Заметим, что T — σ-компакт в $\mathbb{R}$. Предположим, что $\langle T, \tau_{\mathbb{R}} \upharpoonright T\rangle$ уплотняется на компакт K. Так как $\langle T, \tau_{\mathbb{R}} \upharpoonright T\rangle$ обладает счетной базой, то в K найдется счетная сеть. Из того, что в компактах вес равен сетевому весу следует, что K — метризуемый компакт. Тогда, в силу Теоремы 2, пространство $\langle T, \tau_{\mathbb{R}} \upharpoonright T\rangle$ метризуемо полной метрикой — противоречие. □

References

[1] A.S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, **156**, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Zbl 0819.04002

[2] E.G. Pytkeev, *Upper bounds of topologies*, Math. Notes, **20**:4 (1976), 831–837. Zbl 0344.54003

[3] M. Katětov, *On mappings of countable spaces*, Colloq. Math. **2**:1 (1949), 30–33. Zbl 0039.18603

[4] R. Engelking, *General topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, **6**, Heldermann, Berlin, 1989. Zbl 0684.54001

[5] M. Patrakeev, *Metrizable images of the Sorgenfrey line*, Topol. Proc., **45** (2015), 253–269. Zbl 1328.54025

[6] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, **102**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam etc., 1980. Zbl 0443.03021

[7] E.G. Pytkeev, *Continuous bijections on compact spaces and complete metric spaces*, Ph.D. thesis, Sverdlovsk, 1978.

[8] W.W. Comfort, A.W. Hager, J. van Mill, *Compact condensations and compactifications*, Topology Appl., **259** (2019), 67–79. Zbl 1426.54007

[9] A.V. Arkhangel'skii, V.I. Ponomarev, *Fundamentals of general topology: problems and exercises*, Mathematics and Its Applications, **13**, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht etc., 1984. Zbl 0568.54001

Vladislav Ruslanovich Smolin
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16, Sofia Kovalevskaya str.,
Ekaterinburg, 620990, Russia
Email address: SVRusl@yandex.ru