

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 19, №1, стр. 187–210 (2022)
DOI 10.33048/semi.2022.19.015УДК 517.977.57, 517.958
MSC 49Q10, 35Q74ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТОНКИМ УПРУГИМ
ВКЛЮЧЕНИЕМ В УПРУГОМ ТЕЛЕ

В.М. КАРНАЕВ

ABSTRACT. The article deals with the inverse problem of the location of a thin elastic inclusion in an elastic body. A thin inclusion is considered to be soldered. The body is fixed on one part of the outer border, while external surface forces act on the other part. The inverse problem of identification of the inclusion is considered as the problem of minimizing the target functional. The existence of a solution to the inverse problem is proved. The first variations of the solution of the direct problem with respect to the shape of the domain and the derivative of the functional with respect to the shape are calculated. A numerical algorithm for solving this problem is proposed and numerical results are presented.

Keywords: optimal control, shape sensitivity analysis, thin elastic inclusion.

1. ВВЕДЕНИЕ

Повреждения и разрушение деформируемых структур в значительной степени зависят от неоднородности тел. Часто используемый метод упрочнения упругих структур состоит в добавлении к исходному материалу различных включений. Терминология «тонкое включение» используется в случае, когда размерность включения меньше, чем размерность тела. Ввиду этого упругие тела, содержащие жёсткие или упругие тонкие включения, изучаются в теории композитов, где усиление играет важную роль. В настоящее время также рассматриваются биомедицинские применения [1]. Поэтому задачи оптимизации

KARNAEV, V.M., OPTIMAL CONTROL OF THIN ELASTIC INCLUSION IN AN ELASTIC BODY.

© 2022 КАРНАЕВ В.М.

Работа поддержана РФФИ (грант 18-29-10007).

Поступила 21 декабря 2019 г., опубликована 24 марта 2022г.

формы конструкций, содержащих тонкие включения, имеют большое практическое значение. Применение могут найти задачи идентификации включений при необходимости обнаружения инородного тела с малой толщиной в упругой среде.

В статье в рамках двумерной теории упругости рассматривается задача равновесия тела с тонким упругим включением. Упругое включение считается плотно склеенным с окружающей средой. Часть внешней границы тела предполагается жёстко закреплённой, оставшаяся часть является свободной и находится в равновесии под действием заданных внешних поверхностных сил. Рассматриваемая задача допускает вариационную формулировку. Это означает, что она может быть сведена к задаче о минимизации функционала энергии на множестве допустимых перемещений. Теоремы существования в задачах для упругих тел с тонкими упругим включением можно найти в [2, 3]. Статьи [4–6] посвящены исследованию задач оптимального управления тонкими включениями.

Анализ чувствительности играет важную роль в задачах оптимизации формы упругих тел [7, 8]. Множество работ посвящены анализу чувствительности первого порядка, что позволяет выписать необходимые условия оптимальности [9–11]. См. статьи [12–13], посвящённые анализу чувствительности второго порядка в теории упругости, где выписаны достаточные условия.

Настоящая работа посвящена анализу чувствительности первого порядка с использованием методов возмущения. В результате мы получаем материальные производные решения первого порядка. Описание данного метода можно найти в работах [14–16]. Были выписаны уравнение для материальной производной и необходимое условие оптимальности. В данной работе проведено комплексное исследование: доказательство существования оптимального решения, алгоритм построения приближенного решения и численные эксперименты работы алгоритма.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ выпуклая ограниченная область с липшецевой границей $\partial\Omega$. Предполагается, что граница области Ω разбита на два подмножества Γ_D и Γ_N таких, что

$$\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \Gamma_N, \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset.$$

Кроме того, предполагается, что область Ω содержит отрезок $\bar{\gamma}$, соединяющий точки $\hat{\gamma}_0$ и $\hat{\gamma}_1$, который целиком лежит в этой области и не имеет общих точек с её границей. Через γ будем обозначать множество $\bar{\gamma} \setminus \{\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1\}$. Далее через ν и τ обозначаются нормальный и касательный единичные векторы к γ , а через n единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Мы будем предполагать, что область $\Omega \setminus \bar{\gamma}$ заполнена упругим материалом, состояние которого полностью характеризуется векторным полем перемещений $u = (u_1, u_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$. Отрезок $\bar{\gamma}$ моделирует упругое тонкое включение. Включение характеризуется двумя скалярными функциями — функцией изгибов $w : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ и функцией растяжений $v : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$. Далее мы будем использовать следующие обозначения для производных поля u и построенного по ним

тензора деформаций $\varepsilon(u)$:

$$(2.1) \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \equiv u_{i,j} \equiv \partial_{x_j} u_i, \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Также мы будем использовать обозначение $[u]$ для скачка функции u на γ :

$$(2.2) \quad [u] = u^+ - u^- \text{ на } \gamma, \quad u^\pm(x) = \lim_{\delta \rightarrow \pm 0} u(x + \delta \nu), \quad x \in \gamma.$$

Естественным образом возникает две задачи, связанные с описанием состояний механической системы, состоящей из линейно-упругого тела с тонким упругим включением. Первая – прямая задача состоит в определении полей деформации по заданным внешним нагрузкам при фиксированном положении тонкого включения. Вторая – обратная задача состоит в определении положения тонкого включения по дополнительным данным перемещений на части границы. Прямая задача является вспомогательной по отношению к обратной. Охарактеризуем постановку обеих задач более подробно.

2.1. Постановка прямой задачи. В рамках линейной теории упругости поведение упругого материала полностью описывается тензором четвёртого порядка $\mathbb{C} = \{c_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$, удовлетворяющего следующим условиям симметрии

$$(2.3) \quad c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij}.$$

Кроме того, предполагается выполненным условие эллиптичности. Последнее означает, что для всех симметричных матриц ξ выполняются неравенства

$$(2.4) \quad c^{-1}|\xi|^2 \leq c_{klij} \xi_{ij} \xi_{kl} \leq c|\xi|^2,$$

в которых c некоторая положительная постоянная. В этом случае тензор напряжений определяется соотношениями

$$(2.5) \quad \sigma(u) = \mathbb{C}\varepsilon(u), \quad \sigma_{ij}(u) = c_{jikl} \varepsilon_{kl}(u).$$

Тонкое включение моделируется как балка Бернулли - Эйлера. Её состояние описывается тремя положительными постоянными E, I и S – модулем Юнга, инерцией поперечного сечения и площадью поперечного сечения, соответственно. В этих предположениях прямая задача о равновесии тонкого включения в упругом теле состоит в отыскании тройки функций (u, v, w) , удовлетворяющих следующим дифференциальным уравнениям и граничным условиям [2]

$$(2.6) \quad -\operatorname{div} \sigma(u) = 0 \text{ в } \Omega \setminus \bar{\gamma},$$

$$(2.7) \quad u = 0 \text{ на } \Gamma_D,$$

$$(2.8) \quad \sigma(u)n = f \text{ на } \Gamma_N,$$

$$(2.9) \quad -EIv_{,\tau\tau} = [\sigma_\tau] \text{ на } \gamma,$$

$$(2.10) \quad ES w_{,\tau\tau\tau} = [\sigma_\nu] \text{ на } \gamma,$$

$$(2.11) \quad w = u_\nu, \quad v = u_\tau, \quad [u] = 0 \text{ на } \gamma,$$

$$(2.12) \quad w_{,\tau\tau} = w_{,\tau\tau\tau} = v_{,\tau} = 0 \text{ в точках } \hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1.$$

Здесь $f = (f_1, f_2) \in L_2(\Gamma_N)$ - заданная нагрузка, приложенная к незакрепленной части границы,

$$u_\nu = u \cdot \nu, \quad u_\tau = u \cdot \tau, \quad \sigma_\nu = \sigma(u)\nu \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma(u)\nu \cdot \tau,$$

∂_τ - производная вдоль γ , $\hat{\gamma}_i, i = 0, 1$ - концы $\bar{\gamma}$. Дифференциальные уравнения и граничные условия (2.6)–(2.12) описывают равновесие закреплённого на части границы упругого тела с упругим включением под действием внешней поверхностной силы. Поле u описывает перемещение упругой части тела, а поля w и v описывают изгиб и растяжение упругого тонкого включения. Эта задача допускает вариационную формулировку. Прежде всего заметим, что в силу условия (2.11) на тонком включении скачок поля деформаций равен нулю.

Далее для удобства мы примем $EI = ES = 1$.

Полная энергия системы упругое тело - тонкое включение имеет вид

$$(2.13) \quad \Pi(\gamma; u, v, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(u) dx + \frac{1}{2} \int_{\gamma} v_{,\tau}^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\gamma} w_{,\tau\tau}^2 ds - \int_{\Gamma_N} f \cdot u ds.$$

Для фиксированного положения тонкого включения γ определим пространство $X(\gamma)$ всех возможных перемещений $U = (u, v, w)$

$$(2.14) \quad X(\gamma) = \{U = (u, v, w) \in H^1(\Omega)^2 \times H^1(\gamma) \times H^2(\gamma) : \\ u = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad v = u_\tau, \quad w = u_\nu \text{ на } \gamma\}.$$

В пространстве можно определить следующую энергетическую норму [2]

$$(2.15) \quad \|U\|^2 = \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(u) dx + \int_{\gamma} v_{,\tau}^2 ds + \int_{\gamma} w_{,\tau\tau}^2 ds.$$

Замечание 1. Пространство $X(\gamma)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(2.16) \quad (U_1, U_2) = \int_{\Omega} \sigma(u_1) : \varepsilon(u_2) dx + \int_{\gamma} v_{1,\tau} v_{2,\tau} ds + \int_{\gamma} w_{1,\tau\tau} w_{2,\tau\tau} ds.$$

Действительно, так как для элементов пространства $X(\gamma)$ поле перемещений u обращается в нуль на Γ_D , то из неравенства Корна и условия эллиптичности (2.4) вытекает, что

$$c^{-1} \|u\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \leq \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(u) dx \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)^2}^2.$$

Здесь положительная постоянная c зависит лишь от области Ω , множества Γ_D и тензора \mathbb{C} . Таким образом, $X(\gamma)$ изоморфно подпространству гильбертова пространства $H^1(\Omega)^2$, которое состоит из всех полей u , таких, что нормальная компонента следа u на γ принадлежит классу $H^2(\gamma)$, а соответствующая касательная компонента принадлежит классу $H^1(\gamma)$. Отсюда очевидным образом вытекает полнота $X(\gamma)$.

Заметим, что функционал Π допускает представление

$$(2.17) \quad \Pi(\gamma; U) = \frac{1}{2} \|U\|^2 - \int_{\Gamma_N} f \cdot u ds.$$

Краевая задача (2.6)–(2.12) может быть сформулирована как задача минимизации: найти $U = (u, v, w) \in X(\gamma)$ такое, что функционал Π достигает своего минимума:

$$(2.18) \quad \Pi(\gamma; U) = \inf_{\bar{U} \in X(\gamma)} \Pi(\gamma; \bar{U}).$$

Так как, согласно (2.17), функционал $\Pi(\gamma; \cdot)$ является строго выпуклым и коэрцитивным в гильбертовом пространстве $X(\gamma)$, то верно следующее утверждение.

Предложение 1. *При сделанных предположениях задача (2.18) имеет единственное решение $U = (u, v, w) \in X(\gamma)$. Это решение для любых $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in X(\gamma)$ удовлетворяет интегральному тождеству*

$$(2.19) \quad \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(\bar{u}) dx + \int_{\gamma} v_{,\tau} \bar{v}_{,\tau} ds + \int_{\gamma} w_{,\tau\tau} \bar{w}_{,\tau\tau} ds = \int_{\Gamma_N} f \cdot \bar{u} ds.$$

Обратно, каждая тройка $U := (u, v, w) \in X(\gamma)$, удовлетворяющая интегральному тождеству (2.19) служит решением вариационной задачи (2.18).

Любой вектор $U \in X(\gamma)$, удовлетворяющий тождеству (2.19) называется слабым решением задачи (2.18). Несложно показать, что достаточно гладкое слабое решение удовлетворяет уравнениям (2.6)–(2.12) и наоборот. Полное доказательство предложения 1 и вывод слабой постановки из дифференциальной можно найти в работе [2].

2.2. Постановка обратной задачи. Далее мы предполагаем, что γ имеет фиксированную длину $2h$. Наша цель – исследование всех возможных слабых решений прямой вариационной задачи (2.18) для всех тонких включений γ из некоторого допустимого множества с целью выбора оптимального положения включения, минимизирующего целевой функционал. Сначала мы определим конфигурационное пространство всех допустимых включений.

Заметим, что каждое включение γ однозначно определяется положением его центра x_γ и единичным направляющим вектором τ , параллельным γ . Мы будем считать, что τ и вектор нормали ν к γ образуют положительно ориентированный ортогональный репер.

Конфигурационное пространство \mathcal{P} определим как множество всех γ , лежащих в области Ω и удалённых от границы этой области на расстояние большее или равное постоянной $\delta > 0$,

$$(2.20) \quad \mathcal{P} = \{\gamma \subset \Omega : \text{dist}(\gamma, \partial\Omega) \geq \delta\}.$$

Снабжённое метрикой

$$(2.21) \quad d(\gamma, \gamma') = |x_\gamma - x_{\gamma'}| + |\tau - \tau'|$$

конфигурационное пространство становится компактным метрическим пространством.

Выберем произвольно функцию $\tilde{u} \in L^2(\tilde{\Gamma})$, где $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma_N$ и рассмотрим целевой функционал J , заданный равенством

$$(2.22) \quad J(\gamma) = \int_{\tilde{\Gamma}} |\tilde{u} - u^\gamma|^2 ds,$$

где u^γ – перемещение упругого тела Ω с включением γ , а под $|u|^2$ понимается $u \cdot u$.

Сформулируем задачу идентификации упругого включения в упругом теле как задачу минимизации целевого функционала. Требуется найти $\gamma^* \in \mathcal{P}$ такое, что

$$(2.23) \quad J(\gamma^*) = \inf_{\gamma \in \mathcal{P}} J(\gamma).$$

Таким образом мы свели обратную задачу к задаче оптимизации формы с целевым функционалом $J(\gamma)$, поэтому дальнейшее исследование задачи будет вестись в рамках этой теории, но для начала сформулируем основной теоретический результат – теорему существования, который посвящён следующий раздел.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В этом разделе мы приведём основной теоретический результат – доказательство существования решения задачи идентификации включения. Запишем его в виде теоремы.

Теорема 1. *При сделанных предположениях, задача (2.23) имеет решение $\gamma \in \mathcal{P}$.*

Для доказательства теоремы 1 подробно исследуем свойства непрерывности функционалов J и Π , определённых в предыдущей секции. Заметим, что функционал $J : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ определён на компактном метрическом пространстве. Поэтому для доказательства существования минимума достаточно установить непрерывность J на \mathcal{P} . Этот результат даёт следующий предложением.

Предложение 2. *Пусть $\gamma_n \in \mathcal{P}$ сходятся к $\gamma \in \mathcal{P}$ в метрике определённой равенством (2.21) и $U_n = (u_n, v_n, w_n)$, $U = (u, v, w)$ – соответствующие решения задачи (2.18), удовлетворяющие всем требованиям предложения 1. Тогда*

$$(3.1) \quad u_n \rightarrow u \text{ в } H^1(\Omega)^2, \quad J(u_n) \rightarrow J(u) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Без ограничения общности можно считать, что предельное включение γ является горизонтальным интервалом с центром в начале координат,

$$(3.2) \quad \gamma = \{x = (x_1, 0), \quad |x_1| \leq h\}, \quad \tau = \mathbf{e}_1 = (1, 0), \quad \nu = \mathbf{e}_2 = (0, 1).$$

Этого всегда можно добиться переносом и вращением исходной системы координат. Прежде всего заметим, что в силу предложения 1 для функций U_n справедлива оценка

$$(3.3) \quad \|u_n\|_{H^1(\Omega)^2} + \|u_n \cdot \nu_n\|_{W^{2,2}(\gamma_n)} + \|u_n \cdot \tau_n\|_{W^{1,2}(\gamma_n)} \leq c,$$

где ν_n и τ_n – единичные нормальный и касательный векторы к γ_n , постоянная c не зависит от n . Выберем слабо сходящуюся подпоследовательность

$$(3.4) \quad u_n \rightarrow u \text{ слабо в } H^1(\Omega)^2 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Основная трудность доказательства состоит в том, что различные члены последовательности соответствуют различным включениям, т.е. v_n и w_n определены на различных интервалах. Для решения этой проблемы мы построим последовательность специальных диффеоморфизмов области Ω , которые переводят γ_n в γ .

Так как $\gamma \in \mathcal{P}$, то существует два замкнутых круга $D_r = \{|x| \leq r\}$ и $D_R = \{|x| \leq R\}$, $0 < r < R$, таких, что

$$\gamma \in D_r \subset D_R \in \Omega.$$

Ясно, что $\gamma_n \subset D_r$ для всех достаточно больших n . Пусть O_n - ортогональная матрица такая, что

$$(3.5) \quad O_n^* = O_n^{-1}, \quad O_n \tau_n = \mathbf{e}_1, \quad O_n \nu_n = \mathbf{e}_2.$$

Очевидно мы имеем

$$(3.6) \quad O_n(\gamma_n - x_{\gamma_n}) = \gamma, \quad |x_{\gamma_n}| + |O_n - I| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Далее зафиксируем функцию $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\theta = 1$ в D_r и $\theta = 0$ в $\mathbb{R}^2 \setminus D_R$. Определим диффеоморфизм $\varphi_n \in C^\infty(\Omega)$ следующей формулой:

$$(3.7) \quad \varphi_n(x) = (1 - \theta(x))x + \theta(x)O_n(x - x_{\gamma_n}), \quad x \in \Omega.$$

Легко видеть, что матрица Якоби $D\varphi_n$ отображения φ_n может быть записана, как

$$(3.8) \quad D\varphi_n(x) = I + N_n(x), \quad N_n(x) = \theta(x)(O_n - I) + \nabla\theta(x) \otimes (O_n x - x - O_n x_{\gamma_n}).$$

Из (3.6) следует, что N_n стремится к 0. Отсюда и из принципа сжатых отображений вытекает, что вектор-функции $\varphi_n^{\pm 1}$ диффеоморфно отображают область Ω на саму себя и оставляют неподвижными множества Γ_D и Γ_n . Кроме того, в окрестности предельного включения эти отображения задаются формулами

$$(3.9) \quad \varphi_n = O_n(x - x_{\gamma_n}), \quad \varphi_n^{-1} = x_{\gamma_n} + O_n^{-1}x \text{ в } D_r.$$

В частности $\varphi_n(\gamma_n) = \gamma$ и $\varphi_n^{-1}(\gamma) = \gamma_n$.

Тройки $(u_n, v_n, w_n) \in X(\gamma_n)$ определены на разных множествах. Удобно перенести их область определения в одну фиксированную область. С этой целью, введём последовательность модифицированных отображений

$$(3.10) \quad u_n^*(x) = O_n u_n(\varphi_n^{-1}(x)) \text{ в } \Omega.$$

Отсюда и из равенств $w_n = u_n \cdot \nu_n$, $v_n = u_n \cdot \tau_n$ вытекает, что

$$(3.11) \quad w_{n,\tau\tau}(\varphi_n^{-1}(x)) = u_{n2,11}^*(x), \quad v_{n,\tau}(\varphi_n^{-1}(x)) = u_{n1,1}^*(x) \text{ на } \gamma,$$

где $u_{ni}^* = u_n^* \cdot \mathbf{e}_i$. В частности, мы можем положить

$$(3.12) \quad v_n^*(x) = u_{n1}^*(x), \quad w_n(x) = u_{n2}^*(x), \partial_\tau = \partial_{x_1} \text{ на } \gamma.$$

Напомним, что γ является горизонтальным интервалом $x_1 \in (-h, h)$, $x_2 = 0$. Из оценки (3.3) очевидным образом следует неравенство

$$(3.13) \quad \|u_n^*\|_{H^1(\Omega)^2} + \|u_{n2}^*\|_{W^{2,2}(\gamma)} + \|u_{n1}^*\|_{W^{1,2}(\gamma)} \leq c,$$

Дальнейшие рассуждения мы разобьём на последовательность лемм.

Лемма 1. *При сделанных предположениях,*

$$(3.14) \quad \begin{aligned} u_n^* &\rightarrow u \text{ слабо в } H^1(\Omega)^2, \quad u_n^* \rightarrow u_2 = w \text{ слабо в } H^2(\gamma), \\ v_n^* &\rightarrow u_1 = v \text{ слабо в } H^1(\gamma) \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Доказательство. Так как u_n^* , u обращаются в нуль на Γ_D , достаточно показать, что для любого поля $\xi \in H^1(\Omega)^2$ выполняется соотношение

$$(3.15) \quad \int_{\Omega} \nabla u_n^*(x) : \xi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u(x) : \xi \, dx$$

Напомним, что в теории упругости градиент деформаций ∇u_n – матрица Якоби отображения u_n . После замены независимых переменных имеем тождество

$$(3.16) \quad \int_{\Omega} \nabla u_n^* : \xi \, dx = \int_{\Omega} \left(O_n \nabla u_n (I + N_n)^{-1} \right) : \xi(\varphi_n) \det(I + N_n)^{-1} \, dx$$

для всех $\xi \in H^1(\Omega)^2$. Равенство (3.15) следует отсюда и из соотношений (3.6), (3.8). Из компактности вложения $H^1(\Omega)^2 \hookrightarrow L^2(\gamma)$ следует

$$(3.17) \quad v_n^* \equiv u_{n1}^* \rightarrow u_1 =: v, \quad w_n^* \equiv u_{n2}^* \rightarrow u_2 =: w, \quad \text{в } L^2(\gamma).$$

Соотношения (3.3) дают

$$(3.18) \quad \begin{aligned} v_n^* \equiv u_{n1}^* \rightarrow u_1 =: v & \text{ слабо в } H^1(\gamma), \\ w_n^* \equiv u_{n2}^* \rightarrow u_2 =: w, & \text{ слабо в } H^2(\gamma). \end{aligned}$$

□

Лемма 2. *Предельная тройка функций (u, v, w) служит решением вариационной задачи (2.18) и удовлетворяет всем требованиям предложения 1.*

Доказательство. Пусть $U_n = (u_n, v_n, w_n) \in X(\gamma_n)$ – решение задачи (2.18) с включением γ заменённым на γ_n . В частности, для любой тройки $(\xi, \eta, \zeta) \in X(\gamma_n)$ выполняется интегральное тождество

$$(3.19) \quad \int_{\Omega} (\sigma(u_n) : \varepsilon(\xi) - f \cdot \xi) \, dx + \int_{\gamma_n} v_{n,\tau} \eta_{,\tau} \, ds + \int_{\gamma_n} w_{n,\tau\tau} \zeta_{,\tau\tau} \, ds = 0.$$

Введём в рассмотрение векторное поле и функции

$$(3.20) \quad \xi_n^* = O_n \xi(\varphi_n^{-1}), \quad \eta_n^* = \xi_n^* \cdot \mathbf{e}_1, \quad \zeta_n^* = \xi_n^* \cdot \mathbf{e}_2.$$

Имеем

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \nabla \xi(\varphi_n^{-1}) &= O_n^{-1} \nabla \xi_n^*(x) (I + N_n) \quad \text{в } \Omega, \\ \eta_{,\tau}(\varphi_n^{-1}) &= \partial_{x_1} \eta_n^*(x), \quad \zeta_{,\tau\tau}(\varphi_n^{-1}) = \partial_{x_1}^2 \zeta_n^*(x) \quad \text{на } \gamma. \end{aligned}$$

Аналогичные соотношения связывают ∇u_n , v_n , w_n и ∇u_n^* , v_n^* , w_n^* . Положим

$$(3.22) \quad \mathcal{E}_n(u_n^*) = \frac{1}{2} \left(O_n^{-1} \nabla \xi_n^*(x) (I + N_n) + (I + N_n)^{\top} (\nabla u_n^*)^{\top} O_n \right).$$

Из тождества $\varepsilon(u) = (\nabla u + (\nabla u)^{\top})/2$ вытекают соотношения

$$(3.23) \quad \varepsilon(u_n)(\varphi_n^{-1}(x)) = \mathcal{E}_n(u_n^*)(x), \quad \varepsilon(\xi)(\varphi_n^{-1}(x)) = \mathcal{E}_n(\xi_n^*)(x).$$

Замена переменных $x \rightarrow \varphi_n^{-1}$ в интегральном тождестве (3.19) приводит к равенству

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\mathbb{C} \mathcal{E}(u_n^*) : \mathcal{E}(\xi_n^*) - f \cdot \xi(\varphi_n(x)) \right) \det(I + N_n) \, dx + \\ \int_{\gamma} \partial_{x_1} v_n^* \partial_{x_1} \eta_n^* \, ds + \int_{\gamma} \partial_{x_1}^2 w_n^* \partial_{x_1}^2 \zeta_n^* \, ds = 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$(3.25) \quad \mathcal{E}_n(u_n^*) = \varepsilon(u_n^*) + \mathcal{R}_n(u_n^*), \quad |\mathcal{R}_n(u_n^*)| \leq |I - O_n| |\nabla u_n^*|.$$

Напомним, что $O_n \rightarrow I$, $N_n \rightarrow 0$, $\varphi_n \rightarrow \text{Id}$ — тождественному отображению в $C^3(\Omega)^2$. Отсюда в частности следуют соотношения

$$(3.26) \quad \xi_n^* \rightarrow \xi \quad \text{в } C^3(\Omega)^2, \quad \eta_n^* \rightarrow \eta, \quad \zeta_n^* \rightarrow \zeta \quad \text{в } C^3(\gamma).$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в равенстве (3.24) и привлекая соотношения (3.14) из леммы 1 окончательно получаем

$$(3.27) \quad \int_{\Omega} (\sigma(u) : \varepsilon(\xi) - f \cdot \xi) dx + \int_{\gamma} v_{,\tau} \eta_{,\tau} ds + \int_{\gamma} w_{,\tau\tau} \zeta_{,\tau\tau} ds = 0.$$

Следовательно предельная тройка является слабым решением задачи о равновесии упругого тела со включением γ , что завершает доказательство. \square

Напомним, что во всех предыдущих рассуждениях речь шла о сходимости подпоследовательностей решений задач о равновесии, которые выбирались из основной последовательности исходя из соображений компактности. Теперь мы в состоянии устранить этот недостаток.

Лемма 3. Пусть $\gamma_n \in \mathcal{P}$ сходятся к $\gamma \in \mathcal{P}$ в метрике определённой равенством (2.21) и $U_n = (u_n, v_n, w_n)$, $U = (u, v, w)$ — решения задачи (2.18), удовлетворяющие всем требованиям предложения 1. Тогда

$$(3.28) \quad u_n^* \rightarrow u \quad \text{слабо в } H^1(\Omega)^2, \quad w_n^* \rightarrow u_2 = w \quad \text{слабо в } H^2(\gamma), \\ v_n^* \rightarrow u_1 = v \quad \text{слабо в } H^1(\gamma) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $U = (u, v, w)$ — решение задачи (2.18).

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что всякая слабо сходящаяся подпоследовательность последовательности u_n^* сходится к единственному пределу, который не зависит от выбора подпоследовательности в силу единственности решения предельной задачи (2.18). Следовательно, вся последовательность сходится к этому пределу. \square

Для завершения доказательства предложения 2 осталось установить сильную сходимость последовательности u_n . Согласно (3.10) достаточно доказать сильную сходимость последовательности u_n^* в пространстве $H^1(\Omega)^2$. В настоящий момент мы знаем, см. лемму 3, что эта последовательность сходится слабо в $H^1(\Omega)^2$. Покажем, что $u_n \rightarrow u$ сильно в $H^1(\Omega)^2$. Соответствующий результат даётся следующей леммой.

Лемма 4. В условиях предложения 2 последовательность u_n^* сходится к u сильно в пространстве $H^1(\Omega)^2$.

Доказательство. Полагая $(\xi, \eta, \zeta) = (u_n^*, v_n^*, w_n^*)$ в тождестве (3.24), получаем

$$(3.29) \quad \int_{\Omega} \left(\mathbb{C}(\varepsilon(u_n^*) : \varepsilon(u_n^*) + \mathcal{R}(u_n^*) : \mathcal{R}(u_n^*)) \right) \det(I + N_n) dx + \int_{\gamma} (\partial_{x_1} v_n^*)^2 ds + \int_{\gamma} (\partial_{x_1}^2 w_n^*)^2 ds = \int_{\Omega} f \cdot u_n^* dx.$$

Из оценки (3.25) для остаточного члена \mathcal{R}_n находим

$$(3.30) \quad \int_{\Omega} \left(\mathbb{C}(\varepsilon(u_n^*) : \varepsilon(u_n^*) + \mathcal{R}(u_n^*) : \mathcal{R}(u_n^*)) \right) dx - \int_{\Omega} \left(\mathbb{C}\varepsilon(u_n^*) : \varepsilon(u_n^*) \right) dx \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Отсюда и из (3.29) находим

$$(3.31) \quad \int_{\Omega} \mathbb{C}\varepsilon(u_n^*) : \varepsilon(u_n^*) dx + \int_{\gamma} (\partial_{x_1} v_n^*)^2 ds + \int_{\gamma} (\partial_{x_1}^2 w_n^*)^2 ds \rightarrow \int_{\Omega} f u dx.$$

С другой стороны имеем

$$(3.32) \quad \int_{\Omega} \left(\mathbb{C}\varepsilon(u) : \varepsilon(u) \right) dx + \int_{\gamma} (\partial_{x_1} v)^2 ds + \int_{\gamma} (\partial_{x_1}^2 w)^2 ds = \int_{\Omega} f u dx.$$

Из соотношений слабой сходимости (3.28), положительности \mathbb{C} вытекает, что полученные соотношения совместимы, только если

$$(3.33) \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(\mathbb{C}\varepsilon(u_n^*) : \varepsilon(u_n^*) \right) dx &= \int_{\Omega} \left(\mathbb{C}\varepsilon(u) : \varepsilon(u) \right) dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} (\partial_{x_1} v_n^*)^2 ds &= \int_{\gamma} (\partial_{x_1} v)^2 ds, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} (\partial_{x_1}^2 w_n^*)^2 ds &= \int_{\gamma} (\partial_{x_1}^2 w)^2 ds. \end{aligned}$$

Из первого соотношения следует сильная сходимость u_n^* . \square

Завершая доказательство предложения 2, заметим, что, как отмечалось, сильная сходимость u_n^* влечёт сильную сходимость u_n . Сходимость $J(\gamma_n)$ следует из непрерывности вложения $H^1(\Omega)^2 \hookrightarrow L^2(\tilde{\Gamma})$. Таким образом, мы показали, что функционал J является непрерывным, а значит на компакте \mathcal{P} достигает минимума, что доказывает существование решения рассматриваемой задачи. Заметим, что решение не обязательно является единственным.

4. ГРАДИЕНТ ФУНКЦИОНАЛА J

Раннее рассматриваемая задача была сведена к задаче минимизации. Такие задачи достаточно эффективно решаются, используя различные градиентные методы, например, классический метод градиентного спуска. Для этого нам необходимо вывести выражение для градиента, иначе говоря, для производной по форме, см. [15, 16].

4.1. Производная по форме. Пусть $\Phi_\epsilon(x)$ некоторое преобразование координат, не меняющее внешнюю границу Ω и зависящее от малого параметра ϵ , такое, что для любого $\gamma_0 \in \mathcal{P}$ справедливо $\gamma_\epsilon = \Phi_\epsilon(\gamma_0) \in \mathcal{P}$. Тогда *производной по форме* функционала J мы будем называть следующее отношение

$$(4.1) \quad \dot{J}(\gamma_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(\gamma_\epsilon) - J(\gamma_0)}{\epsilon},$$

Предложение 3. *Имеет место*

$$(4.2) \quad \dot{J}(\gamma_0) = \int_{\tilde{\Gamma}} 2(u^{\gamma_0} - \tilde{u}) \cdot \dot{u} \, ds.$$

Доказательство. Выражение для $\dot{J}(\gamma_0)$ несложно получить, основываясь на сходимости $u^{\gamma_\epsilon} \rightarrow u^{\gamma_0}$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

(4.3)

$$\begin{aligned} \dot{J}(\gamma_0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{\tilde{\Gamma}} |u^{\gamma_0} - \tilde{u}|^2 ds - \int_{\tilde{\Gamma}} |u^{\gamma_\epsilon} - \tilde{u}|^2 ds \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\tilde{\Gamma}} (\tilde{u} \cdot \tilde{u} - 2\tilde{u} \cdot u^{\gamma_\epsilon} + u^{\gamma_\epsilon} \cdot u^{\gamma_\epsilon} - \tilde{u} \cdot \tilde{u} + 2\tilde{u} \cdot u^{\gamma_0} - u^{\gamma_0} \cdot u^{\gamma_0}) ds \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\tilde{\Gamma}} 2\tilde{u} \cdot \frac{u^{\gamma_0} - u^{\gamma_\epsilon}}{\epsilon} ds + \int_{\tilde{\Gamma}} (u^{\gamma_\epsilon} + u^{\gamma_0}) \cdot \frac{u^{\gamma_\epsilon} - u^{\gamma_0}}{\epsilon} ds \right) = \int_{\tilde{\Gamma}} 2(u^{\gamma_0} - \tilde{u}) \cdot \dot{u} \, ds, \end{aligned}$$

где

$$(4.4) \quad \dot{u} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u^{\gamma_\epsilon} - u^{\gamma_0}}{\epsilon}.$$

□

Замечание 2. *Размерность пространства включений зависит от того, как мы будем определять сами включения. В нашем случае включение определяется тройкой (x_1, x_2, α) , где (x_1, x_2) – координаты центра включения, а α – угол отклонения от оси координат. Таким образом производную по форме мы можем взять по 3 направлениям – $\dot{J}_1, \dot{J}_2, \dot{J}_3$, соответственно. Тогда градиент определяется как*

$$(4.5) \quad \nabla J = (\dot{J}_1, \dot{J}_2, \dot{J}_3).$$

Производную поля перемещений u по ϵ после возмущения координат $\Phi_\epsilon(x)$ при малом параметре ϵ мы будем называть *материальной производной* \dot{u} , существованию и исследованию которой отведена оставшаяся часть раздела.

4.2. Возмущение области. Для начала изучим задачу при преобразовании координат Φ_ϵ . Рассмотрим прямую задачу (2.19) в Ω_0 с включением γ_0 . И сделаем замену переменных:

$$(4.6) \quad y = \Phi_\epsilon(x) = x + \epsilon V(x),$$

где $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ $\epsilon_0 = \text{const}$. Функцию V выберем такую, что

$$(4.7) \quad V(x) = \chi(x)p(x),$$

где $\chi(x)|_{\gamma_0} = 1$ и $\chi(x)|_{\partial\Omega} = 0$, а $p(x)$ определяет характер возмущения

$$(4.8) \quad \begin{aligned} p_1(x) &= (1, 0) - \text{сдвиг по оси } x_1, \\ p_2(x) &= (0, 1) - \text{сдвиг по оси } x_2, \\ p_3^\epsilon(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}(-x_2, x_1) + \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} - 1\right)(x_1, x_2) - \text{поворот.} \end{aligned}$$

Таким образом, в случае поворота в окрестности включения имеем

$$(4.9) \quad \Phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} (x_1, x_2)^T,$$

Далее мы введём следующие обозначения: $U^\epsilon(\Phi_\epsilon(x)) = \hat{U}^\epsilon(x) = U^\epsilon(y)$, а $U^0(\Phi_0(x)) = \hat{U}^0(x) = U(x)$, соответственно $y \in \Omega_\epsilon$, а $x \in \Omega_0$.

Запишем задачу о равновесии в новых переменных:

$$(4.10) \quad \int_{\Omega_\epsilon} \sigma(u^\epsilon) : \varepsilon(\bar{u}) dx + \int_{\gamma_\epsilon} v_{,\tau}^\epsilon \bar{v}_{,\tau} ds + \int_{\gamma_\epsilon} w_{,\tau\tau}^\epsilon \bar{w}_{,\tau\tau} ds = \int_{\Gamma_N} f \cdot \bar{u} ds \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in X(\gamma_\epsilon),$$

$$(4.11) \quad (u^\epsilon, v^\epsilon, w^\epsilon) \in X(\gamma_\epsilon).$$

Здесь $\Omega_\epsilon = \Phi_\epsilon(\Omega_0)$, $\gamma_\epsilon = \Phi_\epsilon(\gamma_0)$.

Так как преобразование координат является биективным, мы можем построить обратное преобразование и переписать производные. Заметим, что нас интересует разложение по ϵ только до первого порядка.

Тогда производные перепишутся, как

$$(4.12) \quad u_{,i} \approx \hat{u}_{,i}^\epsilon - \epsilon V_{k,i} \hat{u}_{,k}^\epsilon.$$

Вспомним, что в случае поворота V тоже зависит от ϵ , но отбросив в нем все члены порядка ϵ и выше, получим

$$(4.13) \quad V = \chi(x) \left(\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}(-x_2, x_1) + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} - 1 \right) (x_1, x_2) \right) = \chi(x) (-x_2, x_1) + O(\epsilon).$$

Тензор деформации после обратной замены переменных

$$(4.14) \quad \varepsilon_{ij}(u) = \varepsilon_{ij}(\hat{u}^\epsilon) - \epsilon E_{ij}(\hat{u}^\epsilon),$$

где

$$(4.15) \quad E_{ij}(u) = \frac{1}{2} (V_{k,j}(\hat{u})_{i,k} + V_{k,i}(\hat{u})_{j,k}).$$

Тензор напряжений:

$$(4.16) \quad \sigma_{ij}(u) = \sigma_{ij}(\hat{u}^\epsilon) - \epsilon \Sigma_{ij}(\hat{u}^\epsilon),$$

где

$$(4.17) \quad \Sigma_{ij}(u) = c_{ijkl} E_{kl}.$$

Производные по касательным перепишутся соответственно как

$$(4.18) \quad v_{,\tau} = \hat{v}_{,\tau}^\epsilon - \epsilon B_0(V; \hat{v}^\epsilon),$$

$$(4.19) \quad w_{,\tau\tau} = \hat{w}_{,\tau\tau}^\epsilon - \epsilon C_0(V; \hat{w}^\epsilon),$$

где

$$(4.20) \quad B_0(V; v) = \nu_2 V_{k,1} v_{,k} + \nu_1 V_{k,2} v_{,k},$$

$$(4.21) \quad C_0(V; w) = \nu_2^2 V_{k,1} w_{,k1} + \nu_1 \nu_2 (V_{k,1} w_{,k2} + V_{k,2} w_{,k1}) + \nu_1^2 V_{k,2} w_{,k2},$$

где ν_1 и ν_2 - компоненты нормали γ .

Заметим, что отображение $\Phi_\epsilon(x)$ задаёт взаимно-однозначное соответствие между пространствами $X(\gamma_\epsilon)$ и $X(\gamma_0)$. Здесь стоит отметить, что в случае сдвига производные по касательным не меняются, но они меняются в случае поворота. Иными словами, в условии склейки $v = u \cdot \tau$ и $w = u \cdot \nu$, при преобразовании координат функция u "проворачивается". Это можно переписать в изменении касательных производных, что и написано выше.

Теперь мы можем переформулировать задачу после возмущения в старых переменных

$$(4.22) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma(\hat{u}^\epsilon) : \varepsilon(\bar{u}) \, dx + \int_{\gamma_0} \hat{v}_{,\tau}^\epsilon \bar{v}_{,\tau} \, ds + \int_{\gamma_0} \hat{w}_{,\tau\tau}^\epsilon \bar{w}_{,\tau\tau} \, ds \\ & + \epsilon \int_{\Omega} A(V; \hat{u}^\epsilon, \bar{u}) \, dx + \epsilon \int_{\gamma_0} B(V; \hat{v}^\epsilon, \bar{v}) \, ds + \epsilon \int_{\gamma_0} C(V; \hat{w}^\epsilon, \bar{w}) \, ds \\ & = \int_{\Gamma_N} f \cdot \bar{u} \, ds + R(\epsilon, \hat{U}^\epsilon, U) \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in X(\gamma_0), \end{aligned}$$

$$(4.23) \quad (\hat{u}^\epsilon, \hat{v}^\epsilon, \hat{w}^\epsilon) \in X(\gamma_0),$$

где

$$(4.24) \quad A(V; u, \bar{u}) = \operatorname{div} V \sigma(u) : \varepsilon(\bar{u}) - \sigma(u) : E(\bar{u}) - \Sigma(u) : \varepsilon(\bar{u}),$$

$$(4.25) \quad B(V; v, \bar{v}) = \operatorname{div} V v_{,\tau} \bar{v}_{,\tau} - B_0(V; v) \bar{v}_{,\tau} - B_0(V; \bar{v}) v_{,\tau},$$

$$(4.26) \quad C(V; w, \bar{w}) = \operatorname{div} V w_{,\tau\tau} \bar{w}_{,\tau\tau} - C_0(V; w) \bar{w}_{,\tau\tau} - C_0(V; \bar{w}) w_{,\tau\tau},$$

$$(4.27) \quad |R(\epsilon, \hat{U}^\epsilon U)| \leq c(\epsilon) \|\hat{U}^\epsilon\|_{X(\gamma_0)} \|U\|_{X(\gamma_0)}, \quad c(\epsilon) = O(\epsilon^2).$$

Замечание 3. Заметим, что J не зависит от выбора $\chi(x)$, отсюда следует, что существует такая Ψ , что

$$(4.28) \quad J(\gamma) = \Psi(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3),$$

где ϵ_i , соответствующие p_i , $i = 1, 2, 3$ - параметры определяющие положение γ_ϵ .

Следуя замечанию 2 вместо ∇J можем рассматривать

$$(4.29) \quad \left. \frac{d\Psi}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left(\left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}, \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}, \left. \frac{\partial \Psi_3}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right),$$

где $\Psi_1 = \Psi(\epsilon_1, 0, 0)$, $\Psi_2 = \Psi(0, \epsilon_2, 0)$, $\Psi_3 = \Psi(0, 0, \epsilon_3)$.

Тогда мы можем рассмотреть три случая отдельно друг от друга

$$(4.30) \quad \Phi_\epsilon(x) = x + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \chi(x)$$

$$(4.31) \quad \Phi_\epsilon(x) = x + \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix} \chi(x)$$

$$(4.32) \quad \Phi_\epsilon(x) = x + \epsilon_3 \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \chi(x)$$

4.3. Материальная производная. Определим материальную производную \dot{U} решения задачи (2.19), как предел

$$(4.33) \quad \dot{U} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{U}^\epsilon - U^0}{\epsilon}.$$

Напомним, что $U^\epsilon(y) \in X(\gamma_\epsilon)$, но выше мы показали $\hat{U}_\epsilon(x) = U^\epsilon(\Phi_\epsilon(x)) \in X(\gamma_0)$. Отсюда ясно, что $\dot{U} = (\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}) \in X(\gamma_0)$, что мы покажем ниже.

Введём пространство

$$(4.34) \quad H(\gamma) = \{U = (u, v, w) \in H^1(\Omega)^2 \times H^1(\gamma) \times H^2(\gamma)\},$$

с нормой

$$(4.35) \quad \|U\|_{H(\gamma)} = \|u\|_{H^1(\Omega)^2} + \|v\|_{H^1(\gamma)} + \|w\|_{H^2(\gamma)}.$$

Теперь сформулируем и докажем несколько утверждений.

Лемма 5. *Существует такая константа c , что*

$$(4.36) \quad \|\hat{U}^\epsilon\|_{H(\gamma_0)} \leq c \quad \forall \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно взять \hat{U}_ϵ в качестве тестовой функции в интегральном тождестве (4.22) и применить неравенства Корна. \square

Следующая лемма характеризует устойчивость решения задачи равновесия (2.19) относительно возмущения (4.6).

Лемма 6. *Для всех $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ верно следующее утверждение*

$$(4.37) \quad \|\hat{U}^\epsilon - U^0\|_{H(\gamma_0)} \leq c|\epsilon|.$$

Доказательство. Из (4.22) вычтем (2.19) и подставим $\hat{U}^\epsilon - U^0$ как тестовую функцию, получим

$$(4.38) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma(\hat{u}^\epsilon - u^0) : \varepsilon(\hat{u}^\epsilon - u^0) dx + \int_{\gamma_0} (\hat{v}^\epsilon - v^0)_{,\tau} (\hat{v}^\epsilon - v^0)_{,\tau} ds \\ & + \int_{\gamma_0} (\hat{w}^\epsilon - w^0)_{,\tau\tau} (\hat{w}^\epsilon - w^0)_{,\tau\tau} ds + \epsilon \int_{\Omega} A(V; \hat{u}^\epsilon, (\hat{u}^\epsilon - u^0)) dx \\ & + \epsilon \int_{\gamma_0} B(V; \hat{v}^\epsilon, (\hat{v}^\epsilon - v^0)) ds + \epsilon \int_{\gamma_0} C(V; \hat{w}^\epsilon, (\hat{w}^\epsilon - w^0)) ds = 0. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Корна и лемму 5, получим (4.37). \square

Теперь можем доказать существование материальной производной.

Теорема 2. *Существует материальная производная первого порядка $\dot{U} \in X(\gamma_0)$ решения задачи (2.19), удовлетворяющая*

$$(4.39) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma(\dot{u}) : \varepsilon(\bar{u}) \, dx + \int_{\gamma_0} \dot{v}_{,\tau} \bar{v}_{,\tau} \, ds + \int_{\gamma_0} \dot{w}_{,\tau\tau} \bar{w}_{,\tau\tau} \, ds \\ & + \int_{\Omega} A(V; u_0, \bar{u}) \, dx + \int_{\gamma_0} B(V; v_0, \bar{v}) \, ds \\ & + \int_{\gamma_0} C(V; w_0, \bar{w}) \, ds = 0 \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in X(\gamma_0), \end{aligned}$$

$$(4.40) \quad (\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}) \in X(\gamma_0).$$

Доказательство. Из леммы 6 следует, что существует такая последовательность $\{\epsilon_n\}$ и $\dot{U} \in X(\gamma_0)$, что при $n \rightarrow \infty$

$$(4.41) \quad \frac{\hat{U}^{\epsilon_n} - U^0}{\epsilon_n} \rightarrow \dot{U} \text{ слабо в } X(\gamma_0),$$

также из леммы 6 следует, что

$$(4.42) \quad \hat{U}^\epsilon \rightarrow U^0 \text{ сильно в } X(\gamma_0).$$

Теперь из (4.22) вычтем (2.19), поделим на ϵ_n и возьмём предел при $n \rightarrow \infty$, из (4.41) и (4.42) получим

$$(4.43) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma(\dot{u}) : \varepsilon(\bar{u}) \, dx + \int_{\gamma_0} \dot{v}_{,\tau} \bar{v}_{,\tau} \, ds + \int_{\gamma_0} \dot{w}_{,\tau\tau} \bar{w}_{,\tau\tau} \, ds + \\ & \int_{\Omega} A(V; u^0, \bar{u}) \, dx + \int_{\gamma_0} B(V; v^0, \bar{v}) \, ds + \\ & \int_{\gamma_0} C(V; w^0, \bar{w}) \, ds = 0 \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in X(\gamma_0). \end{aligned}$$

Осталось показать, что предел (4.41) на самом деле сильный. Для этого также из (4.22) вычтем (2.19) и поделим на ϵ^2 , получим

$$(4.44) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma\left(\frac{\hat{u}^\epsilon - u^0}{\epsilon}\right) : \varepsilon\left(\frac{\hat{u}^\epsilon - u^0}{\epsilon}\right) \, dx + \int_{\gamma_0} \left(\frac{\hat{v}^\epsilon - v^0}{\epsilon}\right)_{,\tau} \left(\frac{\hat{v}^\epsilon - v^0}{\epsilon}\right)_{,\tau} \, ds \\ & + \int_{\gamma_0} \left(\frac{\hat{w}^\epsilon - w^0}{\epsilon}\right)_{,\tau\tau} \left(\frac{\hat{w}^\epsilon - w^0}{\epsilon}\right)_{,\tau\tau} \, ds + \int_{\Omega} A(V; \hat{u}^\epsilon, \frac{\hat{u}^\epsilon - u^0}{\epsilon}) \, dx \\ & + \int_{\gamma_0} B(V; \hat{v}^\epsilon, \frac{\hat{v}^\epsilon - v^0}{\epsilon}) \, ds + \int_{\gamma_0} C(V; \hat{w}^\epsilon, \frac{\hat{w}^\epsilon - w^0}{\epsilon}) \, ds = 0. \end{aligned}$$

Перейдём к пределу

$$(4.45) \quad \begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \sigma\left(\frac{\hat{u}^\epsilon - u^0}{\epsilon}\right) : \varepsilon\left(\frac{\hat{u}^\epsilon - u^0}{\epsilon}\right) dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_0} \left(\frac{\hat{v}^\epsilon - v^0}{\epsilon}\right)_{,\tau} \left(\frac{\hat{v}^\epsilon - v^0}{\epsilon}\right)_{,\tau} ds \\ & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_0} \left(\frac{\hat{w}^\epsilon - w^0}{\epsilon}\right)_{,\tau\tau} \left(\frac{\hat{w}^\epsilon - w^0}{\epsilon}\right)_{,\tau\tau} ds + \int_{\Omega} A(V; u^0, \dot{u}) dx \\ & + \int_{\gamma_0} B(V; v^0, \dot{v}) ds + \int_{\gamma_0} C(V; w^0, \dot{w}) ds = 0, \end{aligned}$$

отсюда и из (4.43) при $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$, получим

$$(4.46) \quad \begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\hat{u}^\epsilon - u^0}{\epsilon} \right\|_{X(\gamma_0)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \sigma\left(\frac{\hat{u}^\epsilon - u^0}{\epsilon}\right) : \varepsilon\left(\frac{\hat{u}^\epsilon - u^0}{\epsilon}\right) dx \\ & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_0} \left(\frac{\hat{v}^\epsilon - v^0}{\epsilon}\right)_{,\tau} \left(\frac{\hat{v}^\epsilon - v^0}{\epsilon}\right)_{,\tau} ds + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_0} \left(\frac{\hat{w}^\epsilon - w^0}{\epsilon}\right)_{,\tau\tau} \left(\frac{\hat{w}^\epsilon - w^0}{\epsilon}\right)_{,\tau\tau} ds \\ & = \int_{\Omega} \sigma(\dot{u}) : \varepsilon(\dot{u}) dx + \int_{\gamma_0} \dot{v}_{,\tau} \dot{v}_{,\tau} ds + \int_{\gamma_0} \dot{w}_{,\tau\tau} \dot{w}_{,\tau\tau} ds = \|\dot{U}\|_{X(\gamma_0)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$(4.47) \quad \frac{\hat{U}^{\epsilon_n} - U^0}{\epsilon_n} \rightarrow \dot{U} \text{ сильно в } X(\gamma_0),$$

что заканчивает доказательство теоремы. \square

5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Выпуклость области позволяет решать задачу минимизации (2.23) методом градиентного спуска, так как в условиях выпуклости исключаются случаи, в которых решение после некоторой итерации будет лежать вне области. Это следует из того, что траектория на которой будут располагаться итерационные решения будет точно принадлежать выпуклой области. Таким образом выпуклость является достаточным условием реализуемости алгоритма.

Приближенное решение находится следующим образом: выбирается начальное положение γ_0 , совершается итерация, после которой значение целевого функционала J уменьшается, то есть уменьшается среднее отклонение на $\tilde{\Gamma}$ решения u^i от данного \tilde{u} , результатом каждой итерации будут параметры $\epsilon_1^i, \epsilon_2^i, \epsilon_3^i$ координаты центра и угол отклонения тонкого включения, по которым строится γ^i ; после остановки получим приближенное решение $\tilde{\gamma}$.

5.1. Алгоритм. Опираясь на замечание 3 и предложение 3, построим алгоритм

$$(5.1) \quad \epsilon_j^{i+1} = \epsilon_j^i - \lambda_j^i J_j^i \quad j = 1, 2, 3,$$

где $J_j^i = \int_{\tilde{\Gamma}} 2(u^i - \tilde{u}) \cdot \dot{u}_j^i ds$ - производная целевого функционала по j -ому направлению после i -ой итерации, направления соответствуют рассмотренным выше случаям: p_1, p_2, p_3 (см. (4.30)-(4.32)), u^i - решение задачи равновесия с упругим включением, положение которого определяется параметрами $(\epsilon_1^i, \epsilon_2^i, \epsilon_3^i)$ -

координаты центра и поворот, а \dot{u}_j^i - материальная производная u^i по соответствующему направлению, которая находится вместе с решением (4.39)-(4.41). На каждой итерации решается всего 4 вспомогательных задачи: на $\dot{u}_1^i, \dot{u}_2^i, \dot{u}_3^i$ и u^i

Критерий остановки выбирается в виде:

$$(5.2) \quad |\epsilon^{i+1} - \epsilon^i| < m,$$

где $\epsilon^i = (\epsilon_1^i, \epsilon_2^i, \epsilon_3^i) \in \mathbb{R}^3$, а m - заданное малое число.

5.2. Численные эксперименты. Для численного эксперимента область выбиралась в виде квадрата $\Omega : (-3, 3) \times (-3, 3)$ с упругим включением $\tilde{\gamma}$, положение которого будут рассмотрены в отдельных случаях.

Предполагалось, что на свободную часть границы $\Gamma_N : (0, 3) \times \{3\} \cup \{3\} \times (0, 3)$ действуют внешние поверхностные силы f направленные вдоль нормали n , то есть задано условие Неймана: $\sigma(u)n|_{\Gamma_N} = f$, остальная часть внешней границы Γ_D считалась жёстко закреплённой, то есть задано условие Дирихле: $u|_{\Gamma_D} = (0, 0)$.

Модель плоско-напряжённого состояния Ламе изотропного твёрдого тела приведена в терминах тензора напряжений:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}(u) &= (2\mu + \lambda)\varepsilon_{11}(u) + \lambda\varepsilon_{22}(u), \quad \sigma_{12}(u) = \sigma_{21}(u) = 2\mu\varepsilon_{12}(u), \\ \sigma_{22}(u) &= \lambda\varepsilon_{11}(u) + (2\mu + \lambda)\varepsilon_{22}(u), \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu},$$

где тензор деформаций ε задан в (2.5). Мы выбрали следующие параметры материала

$$(5.4) \quad \nu = 0.25, \quad E = 200, \text{ мПа}$$

и упругого включения:

$$(5.5) \quad EI = 39, \text{ мПа} \cdot \text{м}^4, \quad ES = 390, \text{ мПа} \cdot \text{м}^2.$$

Положим

$$(5.6) \quad f = 3 \cdot 10^{-4} \mu.$$

Вспомогательная функция срезки χ , которая необходима для вычисления материальной производной выбиралась следующим образом. Рассмотрим две окружности B_1 и B_2 внутри Ω с радиусами $r_1 < r_2$ и с одним центром O . Функцию χ выберем так, что

$$(5.7) \quad \chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x \in B_1 \\ 1 & \text{если } x \in \Omega \setminus B_2. \end{cases}$$

Построим функцию $\chi(x) \in C_0^1(\Omega)$ как полином от расстояния от точки x до центра окружностей O , удовлетворяющий (5.7):

$$(5.8) \quad \chi(x) = P(|x - O|),$$

где

$$(5.9) \quad P(x) = \frac{-2x^3 + 3(r_1 + r_2)x^2 - 6r_1r_2x + 3r_1r_2^2 - r_2^3}{(r_1 - r_2)^3}.$$

Пространство $X(\gamma)$ аппроксимируется пространством конечных элементов, состоящим из кусочно-линейных функций-лагранжевых $P1$ элементов.

Длина включения фиксировалась и считалась равной 2.

Для наглядности представления результатов отдельно рассматривались два случая. В первом случае центр включения фиксировался и оптимизация проводилась по углу наклона включения к горизонтальной оси. Во втором случае угол наклона фиксировался и оптимизация проводилась по координатам центра включения.

Численные эксперименты были проведены с помощью пакета FreeFEM.

Случай с неизвестным углом. Рассмотрим включение $\tilde{\gamma}$ длины 2 под углом $\alpha = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$ к оси x_1 с центром в точке $(0, 0)$. Решив задачу равновесия с $\tilde{\gamma}$, получим дополнительные данные \tilde{u} , которые будем использовать в целевом функционале. Таким образом $\tilde{\gamma}$ будет являться точным решением рассматриваемой обратной задачи. Далее мы выбрали начальное включение γ_0 под нулевым углом к оси x_1 , длины 2 и с центром в $(0, 0)$ (см. рис. 1).

Возьмём шаг $\lambda_i^j = (2|J_{,j}^i|(1 + \frac{i}{5}))^{-1}$ и установим параметр остановки $m = 0.01$, получим следующий результат работы алгоритма (см. рис. 2 и таблицу 1).

Всего итераций для построения приближенного решения потребовалось 247, найденный угол $\alpha^* = 0.772924$.

Сравнив b и c на рис. 2 видно, что алгоритм осциллировал и уже давал решение, близкое к точному. На последней итерации включения практически совпали.

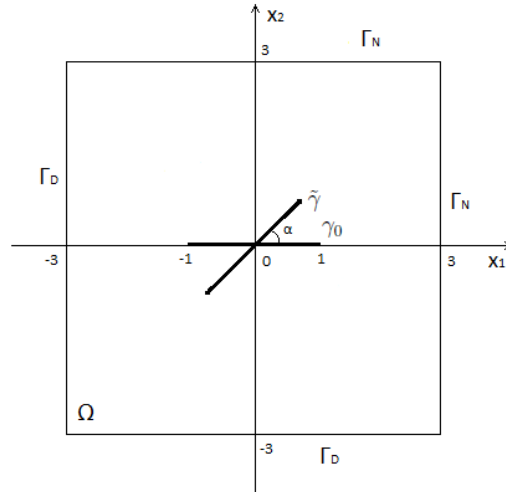


Рис. 1. Точное положение $\tilde{\gamma}$ и начальное положение γ_0 .

i	J	ϵ_3
0	$4.10691 \cdot 10^{-5}$	0
100	$6.6928 \cdot 10^{-8}$	0.780771
200	$2.24256 \cdot 10^{-8}$	0.794644
247	$1.15073 \cdot 10^{-8}$	0.772924

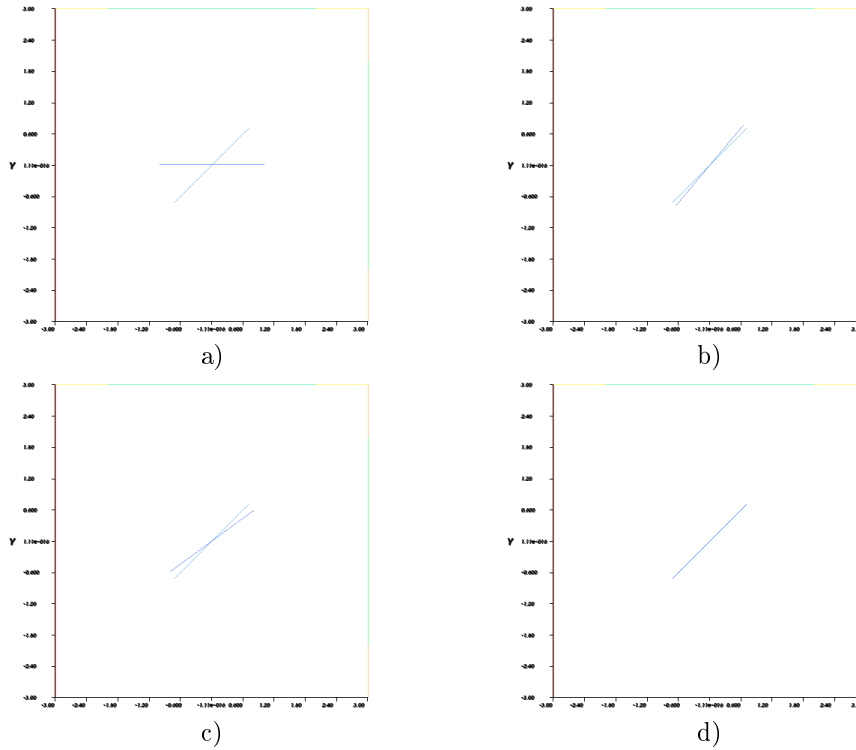
ТАБЛИЦА 1. Значение функционала J и угла ϵ_3 на i -ой итерации.

Рис. 2. Точное и приближённое решения при различных итерациях: а) начальное положение, б) 5 итерация, в) 15 итерация, д) последняя итерация.

Случай с неизвестным центром. Рассмотрим включение $\tilde{\gamma}$ длины 2 и коллинеарное оси x_1 , центр которого расположен в точке $(1, -1)$. Решив прямую задачу с включением $\tilde{\gamma}$, мы получили перемещения \tilde{u} , которые использовали как дополнительные данные в обратной задаче. Далее мы выбрали начальное включение γ_0 как интервал длины 2 с центром в $(0, 0)$ (см. рис. 3).

Тогда алгоритм с шагом $\lambda_i^j = (2|J_{,j}^i|(1 + \frac{i}{5}))^{-1}$ и параметром остановки $m = 0.01$ даст следующий результат (см. рис. 5 и таблицу 2). Количество итераций: 350, координаты центра включения: $(\epsilon_1^*, \epsilon_2^*) = (1.01627, -1.00918)$.

На рисунке 5 также видны осцилляции работы алгоритма (ср. *b* и *c*).

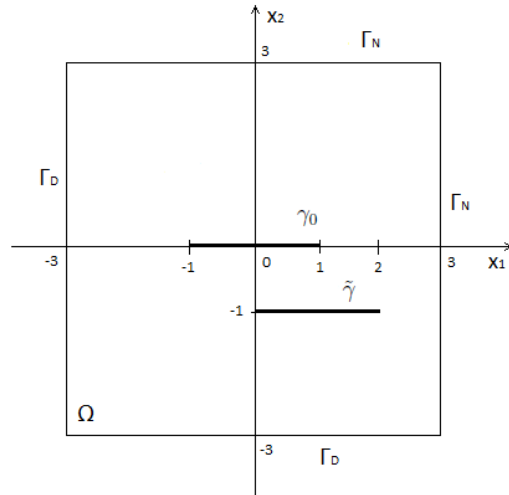


Рис. 3. Точное положение $\tilde{\gamma}$ и начальное положение γ_0 .

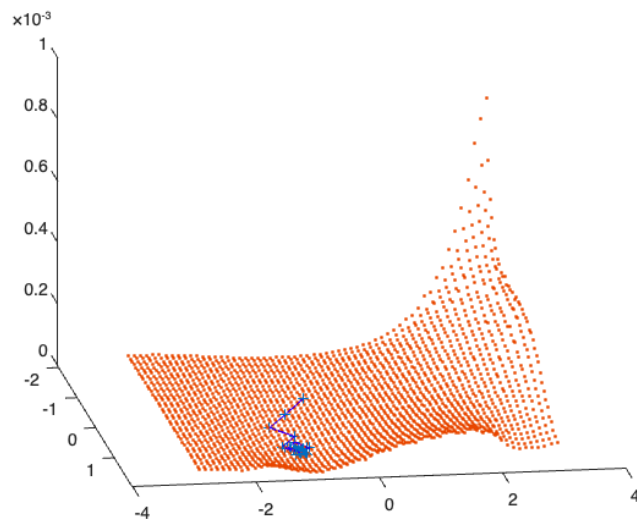


Рис. 4. График функционала J (красный) и промежуточные значения функционала на каждой итерации (синий).

i	J	ϵ_1	ϵ_2
0	$1.83994 \cdot 10^{-5}$	0	0
100	$3.67533 \cdot 10^{-8}$	1.07152	-1.01121
200	$2.01466 \cdot 10^{-8}$	0.984537	-0.998156
350	$9.61861 \cdot 10^{-9}$	1.01627	-1.00918

ТАБЛИЦА 2. Значение функционала J и координаты центра ϵ_1 , ϵ_2 на i -ой итерации.

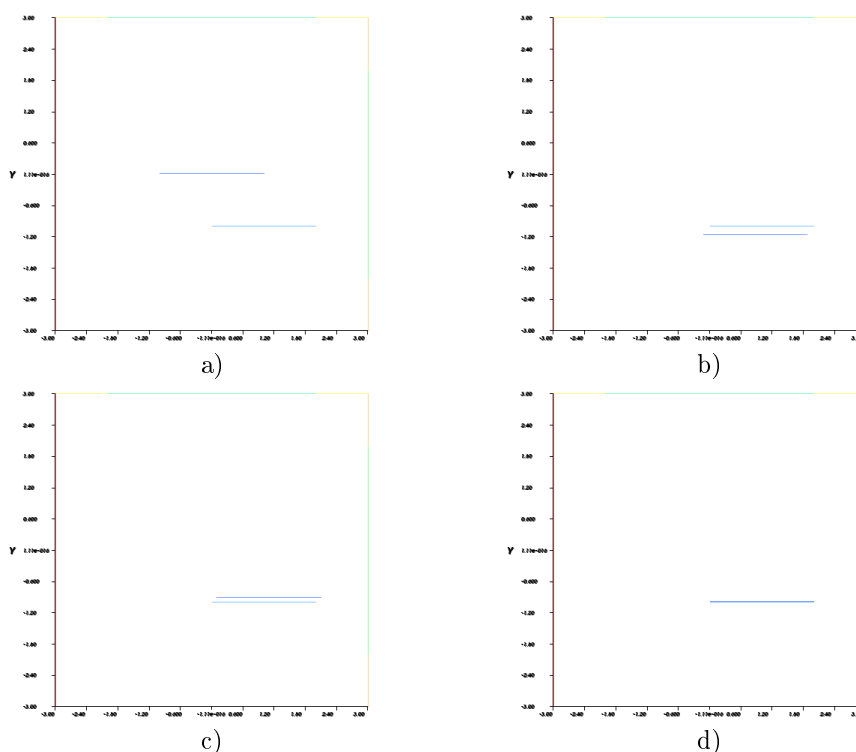


Рис. 5. Точное и приближённое решения при различных итерациях: а) начальное положение, б) 10 итерация, в) 30 итерация, г) последняя итерация.

5.3. Выводы. Необходимо подчеркнуть слабую чувствительность перемещений тонкого включения в теле, относительно положения, это видно на рис. 4. Слабая чувствительность проявляется в осцилляциях градиентного спуска, что существенно затрудняло работу алгоритма и подбор итерационных шагов λ . Поэтому можно заключить, что задача требует дальнейшего изучения: использование более сложных и подходящих алгоритмов численного решения, исследование задачи на устойчивость и анализа второго порядка.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ

Известно, что армирование тонкими включениями заметно упрочняют конструкцию, при этом неправильное размещение включения может привести к нулевому результату. На рис. 6 изображена интенсивность напряжений в цветовой системе HSV. Сравнив *a* и *b*, можно видеть, что тонкое включение не дало эффекта упрочнения.

Поэтому логичным будет поставить вопрос об оптимальном положении тонкого включения.

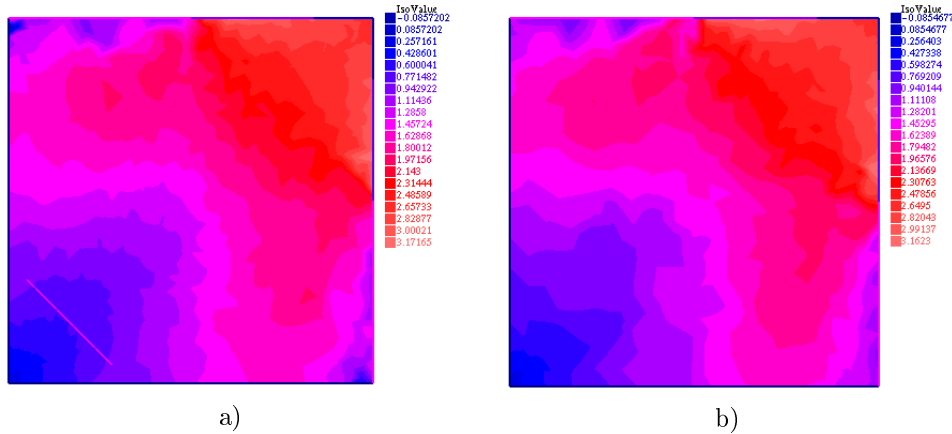


Рис. 6. а) армирование тонким включением, б) отсутствие включения.

Благодаря результатам полученным в ходе доказательства предложения 2, мы можем заключить существование решения следующей задачи: найти $\gamma^* \in \mathcal{P}$ такое, что

$$(6.1) \quad F(\gamma^*) = \inf_{\gamma \in \mathcal{P}} F(\gamma),$$

где

$$(6.2) \quad F(\gamma) = \int_{\Gamma_N} f u^\gamma ds.$$

Аналогично предложению 3 можем вывести производную функционала F .

$$(6.3) \quad \dot{F} = \int_{\Gamma_N} f \dot{u}^\gamma.$$

Механический смысл задачи состоит в минимизации работы внешних поверхностных сил.

Применив алгоритм (5.1) к задаче (6.1) в условиях экспериментов описанных выше (см. раздел 5.2) с известным углом $\alpha = \pi/4$, получим следующий результат (см. *a* на рис. 8). Количество итераций: 350, координаты центра включения: $(\epsilon_1^*, \epsilon_2^*) = (-0.0168991, 0.00621681)$.

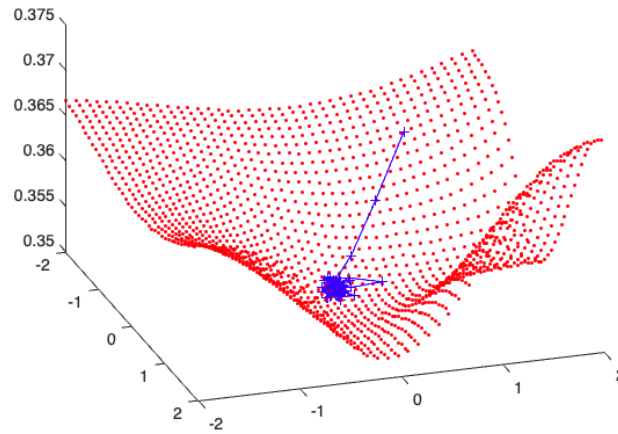


Рис. 7. График функционала J (красный) и промежуточные значения функционала на каждой итерации (синий).

i	J	ϵ_1	ϵ_2
0	0.363367	-1	1
100	0.351694	-0.0491298	0.0609901
200	0.35156	-0.024377	0.042802
350	0.351444	-0.0168991	0.00621681

Таблица 3. Значение функционала J и координаты центра ϵ_1 , ϵ_2 на i -ой итерации

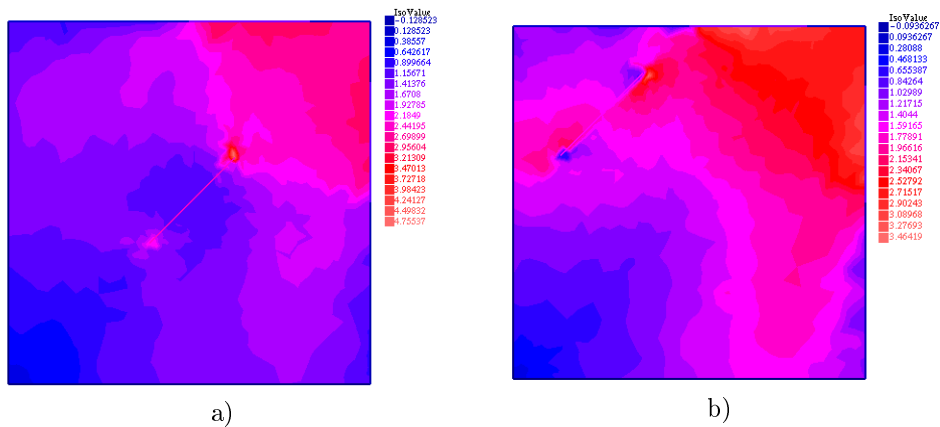


Рис. 8. а) результат алгоритма , б) неоптимальное включение

На рис. 8 показано сравнение интенсивности напряжений с оптимальным и неоптимальным положением тонкого упругого включения. Отчётливо видно, что правильное положение заметно упрочняет конструкцию, при этом решение обратной задачи даёт близкий к симметричному результату.

Заметим, что для данной задачи алгоритм работает более гладко и даёт хороший результат при всех трёх неизвестных: угол и координаты центра.

Также судя по графику 7, мы можем сказать о большей чувствительности работы сил относительно положения включения, что проявляется в отсутствии осцилляций и более гладкой работе алгоритма (см. таблицу 3).

REFERENCES

- [1] Hoshino Tetsuya, et al, *Mechanical stress analysis of a rigid inclusion in distensible material: a model of atherosclerotic calcification and plaque vulnerability*, Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol., **297**:2 (2009), H802–H810.
- [2] A. Khludnev, G.R. Leugering, *Delaminated thin elastic inclusions inside elastic bodies*, Math. Mech. Complex Syst., **2**:1 (2014), 1–21. Zbl 1459.74163
- [3] A. Khludnev, G.R. Leugering, *On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies*, Math. Mech. Solids, **20**:5 (2015), 495–511. Zbl 1327.74100
- [4] H. Itou, A.M. Khludnev, *On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies*, Math. Methods Appl. Sci., **39**:17 (2016), 4980–4993. Zbl 1356.35241
- [5] V. Shcherbakov, *Optimal control of the rigidity parameter of thin inclusions in elastic bodies with curvilinear cracks*, J. Math. Sci., **203**:4 (2014), 591–604. Zbl 1289.74119
- [6] V. Shcherbakov, *On an optimal control problem for the shape of thin inclusions in elastic bodies*, J. Appl. Ind. Math., **7**:3 (2013), 435–443. Zbl 1340.74086
- [7] A.A. Novotny, R. Feijóo, E. Taroco, C. Padra, *Topological sensitivity analysis*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **192**:7-8 (2003), 803–829. Zbl 1025.74025
- [8] S. Amstutz, A.A. Novotny, *Topological optimization of structures subject to von Mises stress constraints*, Struct. Multidiscip. Optim., **41**:3 (2010), 407–420. Zbl 1274.74053
- [9] V.A. Kovtunencko, *Sensitivity of cracks in 2D-Lamé problem via material derivatives*, Z. Angew. Math. Phys., **52**:6 (2001), 1071–1087. Zbl 1153.74370
- [10] N.P. Lazarev, E.M. Rudoy, *Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition*, ZAMM, Z. Angew. Math. Mech., **94**:9 (2014), 730–739. Zbl 1298.74081
- [11] P.I. Plotnikov, E.M. Rudoy, *Shape sensitivity analysis of energy integrals for bodies with rigid inclusions and cracks*, Dokl. Math., **84**:2 (2011), 681–684. Zbl 1234.35273
- [12] E.M. Rudoy, *First-order and second-order sensitivity analyses for a body with a thin rigid inclusion*, Math. Methods Appl. Sci., **39**:17 (2016), 4994–5006. Zbl 1352.74126
- [13] E. Taroco, *Shape sensitivity analysis in linear elastic fracture mechanics*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **188**:4 (2000), 697–712. Zbl 0964.74047
- [14] J. Sokolowski, A. Zochowski, *Topological derivative in shape optimization*, Encyclopedia of Optimization, 2009, 3908–3918.
- [15] J. Sokolowski, Jean-Paul Zolesio, *Introduction to shape optimization: shape sensitivity analysis*, Springer Series in Computational Mathematics, **16**, Springer, Berlin etc., 1992. Zbl 0761.73003
- [16] A.A. Novotny, J. Sokolowski, *Topological derivatives in shape optimization*, Springer, Berlin, 2013. Zbl 1276.35002

VYACHESLAV MIKHAILOVICH KARNAEV
 LAVRENTYEV INSTITUTE OF HYDRODYNAMICS,
 15, LAVRENTIEVA AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
Email address: karnaevvm@gmail.com