S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 19, №1, стр. 241–247 (2022) УДК 517.928.7
DOI 10.33048/semi.2022.19.018 MSC 35Q30

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

В. Л. СЕННИЦКИЙ

Abstract. A problem is formulated and solved on the motion of a viscous liquid in a gravity field. The liquid is in contact with solid walls. The boundary of one of the walls is permeable for the liquid. The liquid is exposed by oscillatory influences which have no predominant direction in space. The problem formulation includes the equation of Navier–Stokes, the equation of continuity, and the conditions at the solid boundaries of the liquid (at the boundaries of the walls). In particular, the new hydromechanical effect is revealed which consists in that the liquid behaves paradoxically, that is (at a background of oscillations) the liquid performs a steady motion in the direction which is opposite the direction of the acceleration of free falling.

Keywords: viscous liquid, gravity field, periodical in time influences having no predominant direction in space.

1. Введение

На протяжении ряда лет успешно ведутся исследования динамики гидромеханических систем при периодических по времени (колебательных, вибрационных) воздействиях (см., например, [1]–[4] и представленную там литературу). В частности, теоретически и экспериментально обнаружено явление преимущественно однонаправленного движения сжимаемых включений в колеблющейся жидкости [1], [5]–[7]; найдено, что вибрационные воздействия могут приводить к гидромеханическому эффекту — аналогу «маятника Капицы» [8], состоящему в том, что в присутствии поля силы тяжести находящееся в жидкости твердое тело совершает «перевернутые» колебания [9]. В настоящей работе рассматривается новая задача о течении в поле силы тяжести вязкой несжимаемой

Sennitskii, V.L., On peculiarities of a liquid flow in a gravity field.

Поступила 20 января 2022 г., опубликована 11 апреля 2022 г.

жидкости, подвергающейся периодическим по времени воздействиям, характеризующимся отсутствием выделенного направления в пространстве. Установлено, в частности, что жидкость (на фоне колебаний) может совершать стационарное движение в направлении, противоположном направлению ускорения свободного падения, то есть «снизу вверх».

2. Постановка задачи

Имеются вязкая несжимаемая жидкость и вертикальные твердые стенки Ξ_A, Ξ_S (рис. 1). Граница стенки Ξ_S проницаема для жидкости. Стенка Ξ_A

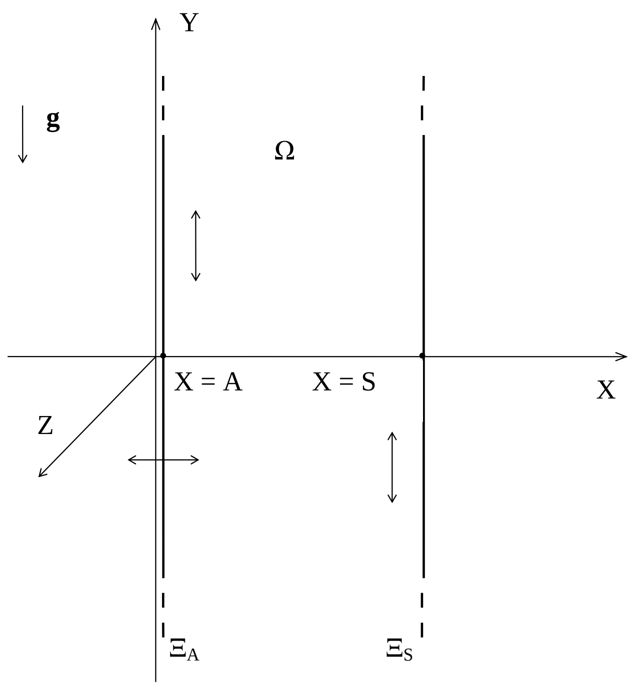

Рис. 1. Гидромеханическая система

совершает заданные периодические поступательные колебания вдоль осей X, Y, стенка Ξ_S — вдоль оси Y инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z. Стенка Ξ_A ограничена плоскостью $X = A$, стенка Ξ_S – плоскостью

$X = S$ ($S > A$ — постоянная). Жидкость заполняет промежуток между стенками — область Ω: $A < X < S$ ($-\infty < Y < \infty, -\infty < Z < \infty$). Требуется определить плоское периодическое по времени t движение жидкости.

Пусть $x = X/S; y = Y/S; z = Z/S; T$ — период колебаний стенок Ξ_A , Ξ_S; $\tau = t/T$; $A = \widetilde{A}\sin 2\pi\tau$ ($\widetilde{A} > 0$ — постоянная); $a = A/S$; $\varepsilon = \widetilde{A}/S$; $\mathbf{e}_x = \{1, 0, 0\}$; $\mathbf{e}_y = \{0, 1, 0\}$; $(dA/dt)\mathbf{e}_x + U_A\mathbf{e}_y$ — скорость стенки Ξ_A ; $u_A = TU_A/S = \widetilde{u}_A \sin(2\pi\tau + \varphi)$ ($\widetilde{u}_A \geq 0, \varphi$ — параметры); $U_S\mathbf{e}_y$ — скорость стенки Ξ_S; $u_S = TU_S/S = \widetilde{u}_S \sin(2\pi\tau + \psi)$ ($\widetilde{u}_S \geq 0, \psi$ — параметры); $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$ — ускорение свободного падения ($g > 0$ — постоянная); $\kappa = gT^2/\widetilde{A}$; $\rho, \nu, \mathbf{V}$ — соответственно плотность , кинематический коэффициент вязкости и скорость жидкости; $\mathbf{v} = T\mathbf{V}/S = v_x(x, \tau)\mathbf{e}_x + v_y(x, \tau)\mathbf{e}_y$; P — давление в жидкости; $p = T^2P/(\rho S^2) = p(x, \tau)$; $Re = S^2/(\nu T)$ — число Рейнольдса.

Постановка задачи включает в себя уравнение Навье—Стокса, уравнение неразрывности и условия, которые должны выполняться на границах стенок Ξ_A , Ξ_S:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{v} - \varepsilon\kappa\mathbf{e}_y \qquad \text{в } \Omega; \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \qquad \text{в } \Omega; \tag{2}$$

$$\mathbf{v} = \frac{da}{d\tau}\mathbf{e}_x + u_A\mathbf{e}_y \qquad \text{при } x = a; \tag{3}$$

$$\mathbf{v} = \frac{da}{d\tau}\mathbf{e}_x + u_S\mathbf{e}_y \qquad \text{при } x = 1. \tag{4}$$

3. Решение задачи

Из (2)–(4) следует

$$v_x = 2\pi\varepsilon\cos 2\pi\tau \qquad \text{в } \Omega. \tag{5}$$

Согласно (1), (3)–(5) имеем

$$p = 4\pi^2\varepsilon(\sin 2\pi\tau)x + p' \qquad \text{в } \Omega \tag{6}$$

(p' – функция τ);

$$\frac{\partial v_y}{\partial \tau} + 2\pi\varepsilon(\cos 2\pi\tau)\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \varepsilon\kappa \qquad \text{в } \Omega; \tag{7}$$

$$v_y = u_A \qquad \text{при } x = a; \tag{8}$$

$$v_y = u_S \qquad \text{при } x = 1. \tag{9}$$

Будем рассматривать задачу (7)–(9) при малых по сравнению с единицей значениях ε. Применим метод разложения по степеням малого параметра [10]. Предположим, что

$$v_y \sim v_0 + \varepsilon v_1 \qquad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{10}$$

Используя (7)—(10), в ε^N – приближении $(N=0,1)$ получим

$$\frac{\partial v_N}{\partial \tau}+2N\pi(\cos 2\pi\tau)\frac{\partial v_0}{\partial x}=\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_N}{\partial x^2}-N\kappa \qquad \text{в } \bar{\Omega}; \tag{11}$$

$$v_N=(1-N)u_A-N(\sin 2\pi\tau)\frac{\partial v_0}{\partial x} \qquad \text{при } x=0; \tag{12}$$

$$v_N=(1-N)u_S \qquad \text{при } x=1, \tag{13}$$

где $\bar{\Omega}$ — область $0<x<1$.

Пусть $N=0$. Задача (11)–(13) имеет решение

$$v_0=\mathrm{Imag}\left[\frac{\widetilde{u}_A e^{i\varphi}\,\mathrm{sh}\, q(1-x)+\widetilde{u}_S e^{i\psi}\,\mathrm{sh}\, qx}{\mathrm{sh}\, q}e^{2\pi i\tau}\right] \qquad \text{для } 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{14}$$

Здесь $q=(1+i)\sqrt{\pi Re}$.

Пусть $N=1$. Из (11)–(13) следует

$$2\pi\left\langle(\cos 2\pi\tau)\frac{\partial v_0}{\partial x}\right\rangle=\frac{1}{Re}\frac{d^2\bar{v}}{dx^2}-\kappa \qquad \text{в } \bar{\Omega}; \tag{15}$$

$$\bar{v}=-\left\langle(\sin 2\pi\tau)\frac{\partial v_0}{\partial x}\right\rangle \qquad \text{при } x=0; \tag{16}$$

$$\bar{v}=0 \qquad \text{при } x=1, \tag{17}$$

где $\langle ... \rangle=\int_\tau^{\tau+1} ... \,d\tau'$; $\bar{v}=\langle v_1\rangle$. Задача (11)—(13) имеет решение

$$v_1=\bar{v}+\mathrm{Real}\left(\widetilde{v}e^{4\pi i\tau}\right) \qquad \text{для } 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{18}$$

($\widetilde{v}$ — функция x).

Используя (14)—(17), найдем

$$\bar{v}=-\frac{1}{2}\ \kappa\ Re\ x(1-x)$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{Real}\left\{\frac{q}{\mathrm{sh}\, q}[\widetilde{u}_A e^{i\varphi}(\mathrm{ch}\, q(1-x)-x)+\widetilde{u}_S e^{i\psi}((\mathrm{ch}\, q)x-\mathrm{ch}\, qx)]\right\} \tag{19}$$

для $0\leqslant x\leqslant 1$.

Формулами

$$v_y=v_0+\varepsilon v_1 \tag{20}$$

и (5), (6), (14), (18), (19) определяется приближенное решение задачи (1)–(4). Это решение свидетельствует о наличии ряда необычных, качественно различных (происходящих на фоне колебаний) стационарных течений жидкости. В частности, для малых по сравнению с единицей значений $\eta=1-x: 0<\eta\leqslant\eta^*$ ($\eta^*\ll 1$ — постоянная), при

$$\widetilde{u}_S=0;$$

$$\mathrm{Real}\left(\chi e^{i\varphi}\right) > 0; \tag{21}$$

$$\widetilde{u}_A > \frac{\kappa Re}{\mathrm{Real}\left(\chi e^{i\varphi}\right)}$$

($\chi = q\ /\operatorname{sh} q$) выполняется соотношение

$$\bar{v} > 0.$$

Данное соотношение означает, что жидкость занимающая слой

$$1 - \eta^* \leqslant x < 1$$

ведет себя парадоксально — на фоне колебаний совершает стационарное движение в направлении, противоположном направлению ускорения свободного падения (то есть «снизу вверх»). Отметим, что условие (21) для любого значения $Re > 0$ выполняется, например, при $\varphi = \pi/4 - \arg\chi$.

Остановимся на вопросе о среднем по времени течении жидкости при малых по сравнению с единицей значениях Re.

Пусть

$$\widetilde{u}_A \cos\varphi - \widetilde{u}_S \cos\psi \neq 0.$$

Используя (5), (14), (18)-–(20), получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim \frac{1}{2}\varepsilon\left(\widetilde{u}_A \cos\varphi - \widetilde{u}_S \cos\psi\right)(1-x)\,\mathbf{e}_y \qquad \text{при } Re \to 0. \tag{22}$$

Согласно (22) (на фоне колебаний) имеет место следующее. При $\widetilde{u}_A \cos\varphi - \widetilde{u}_S \cos\psi < 0$ жидкость в области $\bar{\Omega}$ движется «сверху вниз» (однако, данное движение существенным образом отличается от движения, происходящего в отсутствие колебаний стенок); при $\widetilde{u}_A \cos\varphi - \widetilde{u}_S \cos\psi > 0$ жидкость в области $\bar{\Omega}$ движется «снизу вверх».

Пусть

$$\widetilde{u}_A \cos\varphi - \widetilde{u}_S \cos\psi = 0. \tag{23}$$

Используя (5), (14), (18)–(20), получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim \frac{\pi}{6}\,\varepsilon\left(F + Gx\right)(1-x)\,Re\ \mathbf{e}_y \qquad \text{при } Re \to 0. \tag{24}$$

Здесь

$$F = -2\widetilde{u}_A \sin\varphi - \widetilde{u}_S \sin\psi; \quad G = 3\left(\widetilde{u}_A \sin\varphi - \widetilde{u}_S \sin\psi - \frac{\kappa}{\pi}\right).$$

Согласно (24) (на фоне колебаний) имеет место следующее. При $F \leqslant 0,\ G < 0$ и $F < 0,\ G \leqslant 0$ жидкость в области $\bar{\Omega}$ движется «сверху вниз»; при $F \geqslant 0,\ G > 0$ и $F > 0,\ G \geqslant 0$ жидкость в области $\bar{\Omega}$ движется «снизу вверх»; при $F > 0,\ G < 0,\ -F/G < 1$ жидкость, занимающая слой $0 < x < -F/G$, движется «снизу вверх», а жидкость, занимающая слой $-F/G < x < 1$, — «сверху вниз»; при $F > 0,\ G < 0,\ -F/G \geqslant 1$ жидкость в области $\bar{\Omega}$ движется «снизу вверх»; при $F < 0,\ G > 0,\ -F/G < 1$ жидкость, занимающая слой $0 < x < -F/G$, движется «сверху вниз», а жидкость, занимающая слой $-F/G < x < 1$, —

«снизу вверх»; при $F < 0,\ G > 0,\ -F/G \geqslant 1$ жидкость в области $\bar{\Omega}$ движется «сверху вниз»; при

$$F = 0, \quad G = 0 \tag{25}$$

жидкость в области $\bar{\Omega}$ пребывает в состоянии «левитации» — находясь в поле силы тяжести, (на фоне колебаний) покоится. Отметим, что условия (23), (25) для любого значения $\kappa > 0$ выполняются, например, при $\widetilde{u}_A = \kappa\ /\,(3\pi)\,,\ \widetilde{u}_S = 2\kappa\ /\,(3\pi)\,,\ \varphi = \pi/2,\ \psi = 3\pi/2.$

4. Заключение

Результаты настоящей работы свидетельствуют о том, что в присутствии поля силы тяжести оказываемые на жидкость периодические по времени воздействия, не имеющие выделенного направления в пространстве, способны приводить к эффектам многообразно проявляющегося необычного, парадоксального поведения жидкости. Причиной обнаруженных эффектов является согласованность (друг с другом) оказываемых на жидкость воздействий, что находится в непосредственной связи с принципом среднего движения (см. [4], [11], [12]).

Представленное в настоящей работе, в частности, может служить теоретической основой для проведения направленных экспериментальных исследований движения жидкости при периодических по времени воздействиях.

References

[1] V.L. Sennitskii, *Predominantly-unidirectional motion of a gas bubble in a vibrating liquid*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **319**:1 (1991), 117–119.
[2] D.V. Lyubimov, T.P. Lyubimova, A.A. Cherepanov, *Dynamics of separating surfaces in vibratory fields*, Fizmatlit, Moscow, 2003.
[3] D.V. Lyubimov, A.Y. Baydin, T.P. Lyubimova, *Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization*, Microgravity Sci. Technol., **25**:2 (2013), 121–126.
[4] V.L. Sennitskii, *Predominantly unidirectional motion of a viscous liquid*, J. Appl. Industr. Math., **15**:2 (2021), 326–330. MR4286396
[5] V.L. Sennitskii, *On the motion of a gas bubble in a viscous vibrating liquid*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **29**:6 (1988), 865–870.
[6] V.L. Sennitskii, *Predominantly unidirectional motion of a compressible solid body in a vibrating liquid*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **34**:1 (1993), 96–97.
[7] V. L. Sennitskii, *On the motion of a pulsating solid body in an oscillating viscous liquid*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **42**:1 (2001), 72–76.
[8] P.L. Kapitsa, *Pendulum with an oscillating suspension*, UFN, **44**:1 (1951), 7–20.
[9] V.L. Sennitskii, *Pulsating motion of an inhomogeneous solid sphere in a vibrating liquid*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **50**:6 (2009), 936–943.
[10] A.H. Nayfeh, *Pertubation Methods*, John Wiley & Sons, New York etc., 1973. Zbl 0265.35002
[11] V.L. Sennitskii, *Motion of inclusions in an oscillating liquid*, Siberian Physical Journal, **1995**:4 (1995), 18–26.
[12] V.L. Sennitskii, *Force interaction of a sphere and a viscous liquid in the presence of a wall*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **41**:1 (2000), 50–54. Zbl 0999.76034

Vladimir Leonidovich Sennitskii
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
15, acad. Lavrentyeva ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: sennitskii@yandex.ru